



带跳的分数倒向重随机微分方程及相应的随机积分偏微分方程

郭冬梅^①, 井帅^{②*}, 汪寿阳^③

① 中央财经大学经济学院, 北京 100081;

② 中央财经大学管理科学与工程学院, 北京 100081;

③ 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: guodongmeicufe@163.com, shuaijingsj@gmail.com, sywang@amss.ac.cn

收稿日期: 2013-07-24; 接受日期: 2013-11-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71301173 和 11301560)、北京市哲学社会科学规划项目 (批准号: 13JGB018) 和中国博士后科学研究基金 (批准号: 2012M520419 和 2013T60186) 资助项目

摘要 本文首次把 Poisson 随机测度引入分数倒向重随机微分方程, 基于可料的 Girsanov 变换证明由 Brown 运动、Poisson 随机测度和 Hurst 参数在 $(1/2, 1)$ 范围内的分数 Brown 运动共同驱动的半线性倒向重随机微分方程解的存在唯一性. 在此基础上, 本文定义一类半线性随机积分偏微分方程的随机黏性解, 并证明该黏性解由带跳分数倒向重随机微分方程的解唯一地给出, 对经典的黏性解理论作出有益的补充.

关键词 分数 Brown 运动 倒向重随机微分方程 Poisson 随机测度 Girsanov 变换 随机积分偏微分方程

MSC (2010) 主题分类 35D40, 60H10, 62P05

1 引言

非线性倒向随机微分方程的理论首先由 Pardoux 和 Peng^[1] 于 1990 年提出, 之后倒向随机微分方程被广泛研究并应用在数理金融和偏微分方程领域, 如文献 [2–4]. Pardoux 和 Peng^[5] 引入了倒向重随机微分方程的概念, 并给出了半线性随机偏微分方程解的概率表达形式. 然后许多学者致力于倒向重随机微分方程及相关随机偏微分方程的研究, 如文献 [6–10]. 2012 年, Zhu 和 Shi^[11] 利用平滑技术证明了由 Brown 运动和 Poisson 过程驱动的具有非线性系数倒向重随机微分方程在随机区间上解的存在唯一性, 并给出了拟线性随机积分偏微分方程解的概率表达式.

最近, 对于由分数 Brown 运动驱动的倒向随机微分方程的研究越来越受到学者的关注. 分数倒向随机微分方程首先由 Hu^[12] 研究. Bender^[13] 于 2005 年给出了 Hurst 参数在 $(1/2, 1)$ 范围内的线性分数倒向随机微分方程的解析解. Hu 和 Peng^[14] 基于拟条件期望的技术证明了非线性分数倒向随机微分方程解的存在唯一性, 而 Katarzyna^[15] 进一步拓展了文献 [14] 的结果. 利用 Girsanov 变换和 Doss-Sussmann 变换, Jing 和 León^[16] 以及 Jing^[17] 分别对 Hurst 参数在 $(0, 1/2)$ 和 $(1/2, 1)$ 范围内的分数 Brown 运动和标准 Brown 运动共同驱动的倒向重随机微分方程的解进行了研究.

本文首次把 Poisson 随机测度引入分数倒向重随机微分方程, 研究由相互独立的标准 Brown 运动、Poisson 随机测度和 Hurst 参数在 $(1/2, 1)$ 范围内的分数 Brown 运动驱动的倒向重随机微分方程

英文引用格式: Guo D M, Jing S, Wang S Y. Fractional backward doubly stochastic differential equations with jumps and the related SIPDEs (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 73–87, doi: 10.1360/N012013-00109

解的存在唯一性. 利用文献 [18] 提出的可料 Girsanov 变换, 本文建立带跳的分数倒向重随机微分方程的解与依 (分数 Brown 运动的) 路径带跳的倒向随机微分方程解之间的一一对应关系. 值得注意的是, 为使这两个方程的解处于同一空间, 本文引入经典 L^2 空间的子空间. 并且基于文献 [5, 11, 16] 的结果, 本文考虑一类由分数 Brown 运动驱动的半线性随机积分偏微分方程解的概率表达式, 研究结果证明, 通过依路径积分偏微分方程的可料 Girsanov 变换, 由分数 Brown 运动驱动的随机积分偏微分方程的随机黏性解可由带跳的分数倒向重随机微分方程的解唯一给出.

本文主要的贡献有两方面. 首先, 本文通过证明带跳分数倒向重随机微分方程解的存在唯一性, 为研究由 Brown 运动、Poisson 随机测度和分数 Brown 运动这三类具有代表性的特殊过程共同驱动的倒向重随机微分方程提供了思路, 从而将这三类过程同倒向随机微分方程理论完整地结合在一起. 其次, 基于可料 Girsanov 变换, 我们对由分数 Brown 运动驱动的半线性随机积分偏微分方程的随机黏性解给出定义, 对经典的黏性解理论作出有益的补充, 并为将来研究非线性随机积分偏微分方程的随机黏性解打下了基础.

本文结构如下: 第 2 节给出文章的基本假设和理论基础; 第 3 节研究由标准 Brown 运动、Poisson 随机测度和分数 Brown 运动驱动的半线性倒向重随机微分方程解的存在唯一性; 第 4 节证明一类半线性随机积分偏微分方程解的概率表达式可由带跳的分数倒向重随机微分方程给出.

2 预备知识

2.1 概念与假设

本文固定实数 $T > 0$, 且令 $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

假设 $\{W_s, s \in [0, T]\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ 上的一个 d 维标准 Brown 运动, $\{B_s^H, s \in [0, T]\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ 上 Hurst 参数在 $(1/2, 1)$ 范围内的一维分数 Brown 运动, 以及 $\{N(ds, de), (s, e) \in [0, T] \times E\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, \mathbb{P}_3)$ 上的 Poisson 随机测度.

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为上述三个空间的乘积空间, 即

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2) \otimes (\Omega_3, \mathcal{F}_3, \mathbb{P}_3) = (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \mathbb{P}_3),$$

那么, 我们重新定义过程 W , B^H 和 N 为它们分别从 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ 和 $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, \mathbb{P}_3)$ 到 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的扩张. 同时令 $\tilde{N}$ 为相应的补偿 Poisson 随机测度, 即

$$\tilde{N}(ds, de) = N(ds, de) - ds\Pi(de), \quad (s, e) \in [0, T] \times E,$$

其中, Π 是定义在 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上的对应的 Lévy 测度, 其中, $\mathcal{B}(E)$ 是由 E 生成的 Borel σ -代数.

分数 Brown 运动 $\{B_t^H, t \in [0, T]\}$ 是一个中心化的 Gauss 过程, 且其协方差函数满足下面的关系式:

$$R_H(t, s) = \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

其中, $H \in (0, 1)$ 是 Hurst 参数. 当 $H \in (1/2, 1)$ 时, 分数 Brown 运动可有下列表达式:

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s^0,$$

W^0 是空间 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ 上的典则 Brown 运动, 且核函数

$$K_H(t, s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du, \quad t > s,$$

其中, $c_H = [H(2H-1)/\beta(2-2H, H-1/2)]^{1/2}$.

对于任意的 $t \in [0, T]$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t,T}^W &= \sigma\{W_T - W_s, t \leq s \leq T\} \vee \mathcal{N}, \\ \mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}} &= \sigma\{N_T(A) - N_s(A), t \leq s \leq T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \vee \mathcal{N}, \\ \mathcal{F}_t^B &= \sigma\{B_s^H, 0 \leq s \leq t\} \vee \mathcal{N},\end{aligned}$$

其中, $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{P}$ -零测集. 同时我们令 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t,T}^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}} \vee \mathcal{F}_t^B$ 且 $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_{t,T}^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}} \vee \mathcal{F}_t^B$, $t \in [0, T]$. 这里需要指出的是, $\mathcal{F}_{t,T}^W$, $\mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}}$ 和 $\mathcal{H}_t$ 是关于 t 递减的, $\mathcal{F}_t^B$ 关于 t 递增, 但 $\mathcal{G}_t$ 关于 t 无单调关系. 将 σ 代数族 $\{\mathcal{G}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 记为 $\mathbb{G}$. 进一步, 我们引入倒向信息流 $\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

另外, 我们给出本文所用到的一些空间的定义. 令 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$) 代表 d 维过程 $\{\varphi_t, t \in [0, T]\}$ 组成的空间, 其中, $\{\varphi_t, t \in [0, T]\}$ 满足下述条件: 对于任意的 $t \in [0, T]$, φ_t 是 $\mathcal{G}_t$ - (相应地, $\mathcal{H}_t$ -) 可测的且

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] < +\infty.$$

令 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^2(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$) 代表映射 $U : \Omega \times [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ 组成的空间, 其中, $U : \Omega \times [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下述条件: $U : \Omega \times [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{G}$ - (相应地, $\mathbb{H}$ -) 可测的且

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E |U_s(e)|^2 \Pi(de) ds \right] < +\infty.$$

2.2 Skorohod 积分和 Malliavin 分析

本节引入 Skorohod 积分和 Malliavin 分析的一些基本知识. 对于更详细的相关内容可参见文献 [19, 20].

假设 $\mathcal{E}$ 代表定义在区间 $[0, T]$ 上的阶梯函数的集类. 令 $\mathcal{H}_H$ 为 $\mathcal{E}$ 通过由下述内积所定义的范数完备化的 Hilbert 空间,

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}_H} = R_H(t, s) = E[B_t^H B_s^H], \quad t, s \in [0, T],$$

则映射 $1_{[0,t]} \mapsto B_t$ 可扩展成定义在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的闭 Gauss 子空间 $\mathcal{H}_H$ 上的等距变换 $\varphi \mapsto B(\varphi)$. 同时, 我们在 $L^2([0, T])$ 定义算子 $\mathcal{K}$:

$$(\mathcal{K}f)(t) = \int_0^t K_H(t, s) f(s) ds, \quad f \in L^2([0, T]),$$

其共轭算子为 $\mathcal{K}^*$. 容易证明 $\mathcal{K}1_{[0,t]} = K_H(t, \cdot)1_{[0,t]}$, $t \in [0, T]$.

定义空间 $L^2((\lambda \times \Pi)^n) = L^2([0, T] \times E^n)$ 为满足下述条件的函数空间,

$$\|f\|_{L^2((\lambda \times \Pi)^n)} = \left(\int_{([0, T] \times E)^n} f^2(t_1, z_1, \dots, t_n, z_n) dt_1 \Pi(de_1) \cdots dt_n \Pi(de_n) \right)^{1/2} < \infty,$$

其中, λ 是 $[0, T]$ 上的 Lebesgue 测度, 令 $\tilde{L}^2((\lambda \times \Pi)^n)$ 代表 $L^2((\lambda \times \Pi)^n)$ 中由对称函数组成的子空间. 若 $f \in \tilde{L}^2((\lambda \times \Pi)^n)$, 则可定义 f 对于 Poisson 随机测度的 n 重累次迭代积分为

$$I_n(f) = \int_{([0, T] \times E)^n} f(t_1, z_1, \dots, t_n, z_n) \tilde{N}(dt_1, de_1) \cdots \tilde{N}(dt_n, de_n).$$

随机 Sobolev 空间 $\mathbb{D}_{1,2}$ 由所有 $\mathcal{F}_{0,T}^{\tilde{N}}$ 可测的随机变量 $Q \in L^2(\mathbb{P})$ 组成且其混沌分解为

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n \in \tilde{L}^2((\lambda \times \Pi)^n),$$

其中,

$$\|Q\|_{\mathbb{D}_{1,2}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2((\lambda \times \Pi)^n)}^2 < \infty.$$

令 $\mathcal{S}$ 代表光滑随机变量族, 其随机变量满足

$$F = \sum_{i=1}^k f_i(W(\psi_{i_1}), \dots, W(\psi_{i_m}), B(\varphi_{i_{m+1}}), \dots, B(\varphi_{i_{m+n}})) Q_i, \quad (2.1)$$

其中, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_m} \in L^2([0, T])$, $\varphi_{i_{m+1}}, \dots, \varphi_{i_{m+n}} \in \mathcal{H}_H$,

$$Q_i = \sum_{j=1}^{\infty} I_n(g_n) \in \mathbb{D}_{1,2}$$

且 $f_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$. 这里, $C_b^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$ 是属于 C^∞ 的有界函数 $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合.

对于由 (2.1) 定义的 F , 令 $D^W F$ 代表光滑随机变量 F 关于 W 的 Malliavin 导数, 则

$$D^W F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(W(\psi_{i_1}), \dots, W(\psi_{i_m}), B(\varphi_{i_{m+1}}), \dots, B(\varphi_{i_{m+n}})) Q_i \psi_j.$$

令 $D^B F$ 代表 F 关于 B^H 的 Malliavin 导数, 则

$$D^B F = \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(W(\psi_{i_1}), \dots, W(\psi_{i_m}), B(\varphi_{i_{m+1}}), \dots, B(\varphi_{i_{m+n}})) Q_i \mathcal{K} \varphi_j.$$

同时, 令 $D^N F$ 代表 F 关于 $\tilde{N}$ 的 Malliavin 导数, 则

$$D^N F = \sum_{i=1}^k f_i(W(\psi_{i_1}), \dots, W(\psi_{i_m}), B(\varphi_{i_{m+1}}), \dots, B(\varphi_{i_{m+n}})) \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(g_n(\cdot, t, e)).$$

类似于经典 Brown 运动的情形, 对 B^H 的 Skorohod 积分可定义为 Malliavin 导数的对偶算子. 下面分别给出关于 Brown 运动 W 和分数 Brown 运动 B^H 和补偿的 Poisson 随机测度 $\tilde{N}$ 的 Skorohod 积分.

定义 2.1 令 $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$. 如果存在 $\delta^W(u) \in L^2(\Omega)$ 使得

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (D^W F)(t) u(t) dt \right] = E[F \delta^W(u)], \quad \forall F \in \mathcal{S}. \quad (2.2)$$

那么, u 属于 $\text{Dom } \delta^W$, 在这种情形下随机变量 $\delta^W(u)$ 称为 u 关于 W 的 Skorohod 积分.

定义 2.2 令 $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$. 如果存在 $\delta^B(u) \in L^2(\Omega)$, 使得

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (D^B F)(t) \mathcal{K}u(t) dt \right] = E[F \delta^B(u)], \quad \forall F \in \mathcal{S}. \quad (2.3)$$

那么, u 属于 $\text{Dom } \delta^B$, 在这种情形下随机变量 $\delta^B(u)$ 称为 u 关于 B^H 的 Skorohod 积分.

同理, 我们有如下的定义:

定义 2.3 令 $u \in L^2(\Omega \times [0, T] \times E)$. 如果存在随机变量 $\delta^N(u) \in L^2(\Omega)$, 使得

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E (D^N F)(t, e) u(t, e) \Pi(de) dt \right] = E[F \delta^N(u)], \quad \forall F \in \mathcal{S}. \quad (2.4)$$

那么 u 属于 $\text{Dom } \delta^N$, 在这种情形下随机变量 $\delta^N(u)$ 称为 u 关于 $\tilde{N}$ 的 Skorohod 积分.

若 $u1_{[0,t]} \in \text{Dom } \delta^B$, 则有

$$\int_0^t u_s dB_s^H = \delta^B(u1_{[0,t]}).$$

接着引入下述经典的结果:

命题 2.1 令 $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$ 且 $v \in L^2(\Omega \times [0, T] \times E)$ 是 $\mathbb{H}$ -适应的. 那么, Itô 倒向积分 $\int_0^T u(s) \downarrow dW_s$ 和 $\int_0^T \int_E v(s, e) \downarrow \tilde{N}(ds, de)$ 分别与关于 W 和 $\tilde{N}$ 的 Skorohod 积分一致, 即

$$\int_0^T u(s) \downarrow dW_s = \delta^W(u) \quad \text{且} \quad \int_0^T \int_E v(s, e) \downarrow \tilde{N}(ds, de) = \delta^N(v).$$

2.3 Girsanov 变换

下面将引入本文证明中的一个重要的工具 — 可料 Girsanov 变换.

令 γ 为 $\mathcal{H}_H$ 的确定性函数. 对于任意的 $t \in [0, T]$, 在 Ω_2 中我们定义以下变换:

$$\mathcal{T}_t(\omega) = \omega + \int_0^{\cdot \wedge t} (\mathcal{K}\gamma)(r) dr, \quad \mathcal{A}_t(\omega) = \omega - \int_0^{\cdot \wedge t} (\mathcal{K}\gamma)(r) dr.$$

显然, $\mathcal{A}_t \mathcal{T}_t$ 和 $\mathcal{T}_t \mathcal{A}_t$ 在 Ω_2 上为单位不变算子. 根据可料 Girsanov 定理^[18], 对于任意平方可积的随机变量 F , 我们有

$$\mathbb{E}[F] = \mathbb{E}[F(\mathcal{A}_t) \varepsilon_t] = \mathbb{E}[F(\mathcal{T}_t) \varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t)], \quad (2.5)$$

其中,

$$\varepsilon_t = \exp \left(\int_0^t \gamma_r dB_r^H - \frac{1}{2} \int_0^t ((\mathcal{K}\gamma)(r))^2 dr \right). \quad (2.6)$$

容易证明

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_r dB_r^H \right| \right\} \right] < +\infty.$$

为证明在 Girsanov 变换下一类随机过程的不变性, 我们引入空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$) 和 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^2(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$) 的子空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d)$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d)$) 和 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$).

定义 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d)$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d)$) 为一类 $\mathbb{G}$ - (相应地, $\mathbb{H}$ -) 适应过程 $\{\varphi_t, t \in [0, T]\}$ 的集类, 其满足

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_r dB_r^H \right| \right\} \int_0^T |\varphi_t|^2 dt \right] < +\infty, \quad \text{对所有 } p \geq 1,$$

同时定义 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ (相应地, $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$) 为一类 $\mathbb{G}$ (相应地, $\mathbb{H}$) 可料过程 $\{\varphi_t, t \in [0, T]\}$ 的集类, 其满足

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_r dB_r^H \right| \right\} \int_0^T \int_E |U_s(e)|^2 \Pi(de) ds \right] < +\infty, \quad \text{对所有 } p \geq 1.$$

引理 2.1 表明了上述空间的不变性.

引理 2.1 假设任意随机过程三元组 $(Y, Z, U) \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$, 那么 (Y, Z, U) 经过 Girsanov 变换后仍属于空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$, 即

(1) $\{(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t, \tilde{U}_t) = (Y_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t), Z_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t), U_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t)), t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$;

(2) $\{(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t) = (Y_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t, Z_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t, U_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t), t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$.

证明 由于证明技术相似, 我们只证明 (1) 中关于过程 U 的结论.

对于 $U \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$, 应用 Girsanov 变换, 对于任意的 $p \geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\} \int_0^T \int_E |\tilde{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\} \int_0^T \int_E |U_s(\mathcal{T}_s, e)\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)|^2 \Pi(de) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H(\mathcal{A}_s) \right| \right\} \int_0^T \int_E |U_s(e)|^2 \varepsilon_s^{-1} \Pi(de) ds \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\exp \left\{ (p+1) \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\} \int_0^T \int_E |U_s(e)|^2 \Pi(de) ds \right] \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

因此, $\{\tilde{U}_t, t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$. □

注 2.1 此引理对于我们主要结果的证明非常重要, 因为 Girsanov 变换的不变性在空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ 并不是一个明显的结论, 它使得利用 Girsanov 变换后的过程仍与原过程保持在同一个空间, 因此, 基于引理 2.1, 我们将对倒向随机微分方程的解应用 Girsanov 变换.

3 带跳的分数重倒向随机微分方程解的存在唯一性

本节考虑下述由 Brown 运动 W 、Poisson 随机测度 $\tilde{N}$ 和分数 Brown 运动 B^H 驱动的半线性倒向重随机微分方程:

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t, Z_t, U_t)dt + Z_t \downarrow dW_t + \int_E U_t(e) \downarrow \tilde{N}(dt, de) + \gamma_t Y_t dB_t^H, \\ Y_0 = \xi, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{0,T}^W \vee \mathcal{F}_{0,T}^{\tilde{N}}, \mathbb{P})$ 且泛函

$$f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{B}(E), \Pi; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$$

是可测的, 满足如下条件:

(H1) (i) 对于任意的 $t \in [0, T]$ 和 $(y, z, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{B}(E), \Pi; \mathbb{R}^n)$, $f(\cdot, t, y, z, u)$ 是 $\mathcal{F}_{t,T}^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}}$ 可测的;

(ii) $f(\cdot, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega \times [0, T])$;

(iii) 对于任意的 $(y_1, z_1, u_1), (y_2, z_2, u_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{B}(E), \Pi; \mathbb{R}^n)$, 存在常数 $K \in \mathbb{R}^+$, 使得

$$|f(t, y_1, z_1, u_1) - f(t, y_2, z_2, u_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \|u_1 - u_2\|),$$

其中,

$$\|u_1 - u_2\| = \left(\int_E |u_1(e) - u_2(e)|^2 \Pi(de) \right)^{1/2}.$$

需要注意的是关于 W 和 $\tilde{N}$ 的积分是倒向积分, 因为为了应用关于 B^H 的 Skorohod 积分, 我们对方程 (3.1) 中的积分表达式进行了时间反演.

下面建立方程 (3.1) 与倒向方程 (3.2) 的联系,

$$\begin{cases} d\hat{Y}_t = f(t, \hat{Y}_t \varepsilon_t(\mathcal{T}_t), \hat{Z}_t \varepsilon_t(\mathcal{T}_t), \hat{U}_t \varepsilon_t(\mathcal{T}_t)) \varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t) dt + \hat{Z}_t \downarrow dW_t + \int_E \hat{U}_t(e) \downarrow \tilde{N}(dt, de), \\ \hat{Y}_0 = \xi. \end{cases} \quad (3.2)$$

这里值得注意的是, 文献 [19, 22] 等已对带跳的倒向随机微分方程 (不含分数 Brown 运动) 的相关理论进行了深入研究, 且文献 [23] 利用受控的带跳倒向随机微分方程研究了 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 型的积分偏微分方程黏性解的正则性.

首先, 我们证明方程 (3.2) 解的存在唯一性.

定理 3.1 在空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 中, 倒向随机微分方程 (3.2) 存在唯一的解.

证明 我们将分两步证明上述定理.

第 1 步 首先证明方程 (3.2) 在空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 中存在唯一的解.

令 $G_t(y, z, u) = f(t, y \varepsilon_t(\mathcal{T}_t), z \varepsilon_t(\mathcal{T}_t), u \varepsilon_t(\mathcal{T}_t)) \varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t)$. 则对于任意 $t \in [0, T]$, $G_t(y, z, u)$ 是 $\mathcal{G}_t$ -可测的, 因此也是 $\mathcal{H}_t$ -可测的. 而且, 对于任意的 $t \in [0, T]$ 和 $(y_i, z_i, u_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{E}, \Pi; \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, 我们有

$$|G_t(y_1, z_1, u_1) - G_t(y_2, z_2, u_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \|u_1 - u_2\|),$$

即函数 G 对于 $(y, z, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{E}, \Pi; \mathbb{R})$ 是一致 Lipschitz 的, 且 $G_t(0, 0, 0) \in L^2(\Omega \times [0, T])$. 利用假设 (H1) [21, 23] 可以证明方程 (3.2) 在空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^2(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 中存在唯一的解 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U})$.

接着将证明 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U}) \in \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$. 对 $|\hat{Y}_t|^2$ 应用 Girsanov 变换得

$$d|\hat{Y}_t|^2 = 2\hat{Y}_t G_t(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{U}_t) dt + 2\hat{Y}_t \hat{Z}_t \downarrow dW_t + 2 \int_E \hat{Y}_t \hat{U}_t(e) \downarrow \tilde{N}(dt, de) - |\hat{Z}_t|^2 dt - \int_E |\hat{U}_t(e)|^2 \Pi(de) dt.$$

由假设 (H1), 我们有

$$\begin{aligned}
& |\hat{Y}_t|^2 + \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 ds + \int_0^t \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \\
&= \xi^2 + 2 \int_0^t \hat{Y}_s G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s) ds + 2 \int_0^t \hat{Y}_s \hat{Z}_s \downarrow dW_s + 2 \int_0^t \int_E \hat{Y}_s \hat{U}_s(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de) \\
&\leq \xi^2 + \int_0^t (C_1 |\hat{Y}_s|^2 + \frac{1}{2} |\hat{Z}_s|^2 + \frac{1}{2} \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) + C_2 |G_s(0, 0, 0)|^2) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \hat{Y}_s \hat{Z}_s \downarrow dW_s + 2 \int_0^t \int_E \hat{Y}_s \hat{U}_s(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de).
\end{aligned}$$

不等式两端对 $\mathcal{F}_T^B$ 取条件期望得

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[|\hat{Y}_t|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \mid \mathcal{F}_T^B \right] \\
&\leq \mathbb{E}[\xi^2] + \int_0^t (C_1 |\hat{Y}_s|^2 + C_3 \varepsilon_s^{-2}) ds \\
&\leq \mathbb{E}[\xi^2] + C_1 \int_0^t |\hat{Y}_s|^2 ds + C_4 \exp \left\{ 2 \sup_{s \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_r dB_r^H \right| \right\}.
\end{aligned}$$

因此, 根据 Gronwall 不等式, 我们可以推出

$$\mathbb{E} \left[|\hat{Y}_t|^2 + \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 ds + \int_0^t \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \mid \mathcal{F}_T^B \right] \leq C \exp \left\{ 2 \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\}.$$

由上述不等式, 容易证明

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\} \left(|\hat{Y}_t|^2 + \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 ds + \int_0^t \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ p \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_s dB_s^H \right| \right\} \mathbb{E} \left[|\hat{Y}_t|^2 + \int_0^t |\hat{Z}_s|^2 ds + \int_0^t \int_E |\hat{U}_s(e)|^2 \Pi(de) ds \mid \mathcal{F}_T^B \right] \right] \\
&\leq C \mathbb{E} \left[\exp \left\{ (p+2) \sup_{s \in [0, T]} \left| \int_0^t \gamma_r dB_r^H \right| \right\} \right] \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

即 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U}) \in \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$.

第 2 步 下面证明 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U})$ 不仅属于空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$, 而且属于空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$. 为了证明该结论, 取任意的 $\tau \in [0, T]$, 我们考虑区间 $[0, \tau]$ 上的方程

$$\begin{cases} d\hat{Y}_t = G_t(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{U}_t) dt + \hat{Z}_t \downarrow dW_t + \int_E \hat{U}_t(e) \downarrow \tilde{N}(dt, de), & t \in [0, \tau], \\ \hat{Y}_0 = \xi. \end{cases} \quad (3.3)$$

令 $\mathcal{H}_t^\tau := \mathcal{F}_{t,T}^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^{\tilde{N}} \vee \mathcal{F}_\tau^B$, $t \in [0, \tau]$, 则 $\mathbb{H}^\tau = \{\mathcal{H}_t^\tau\}_{t \in [0, \tau]}$ 是关于 W 和 $\tilde{N}$ 的倒向信息族, 具有鞅表示定理. 因为 $G_t(y, z, u)$ 在 $[0, \tau]$ 上是 $\mathcal{G}_t$ -可测的, 那么也是 $\mathcal{H}_t^\tau$ -可测的, dt -a.e. 由经典倒向随机微分方程理论, 我们知方程 (3.3) 存在一个解 $(\hat{Y}^\tau, \hat{Z}^\tau, \hat{U}^\tau) \in \mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$.

基于倒向随机微分方程的唯一性结果, 该解在空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{H}^\tau}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 是唯一的. 则当 $t < \tau$ 时, $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U}) = (\hat{Y}^\tau, \hat{Z}^\tau, \hat{U}^\tau)$, dt -a.e.

因此, 当 $t < \tau$ 时, $(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{U}_t)$ 是 $\mathcal{H}_t^\tau$ -可测的, dt -a.e. 令 $\tau \downarrow t$, 根据信息族 $\mathbb{F}^B$ 的右连续性, 我们得出 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U})$ 是 $\mathbb{G}$ -适应的. $\square$

接下来, 我们证明定理 3.2, 这是本文的一个重要结果.

定理 3.2 (1) 令 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U}) \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 是重倒向随机微分方程 (3.2) 的一个解, 则

$$(Y_t, Z_t, U_t) = (\hat{Y}_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t, \hat{Z}_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t, \hat{U}_t(\mathcal{A}_t)\varepsilon_t), \quad t \in [0, T]$$

在 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 上是方程 (3.1) 的一个解.

(2) 令 $(Y, Z, U) \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 是方程 (3.1) 的解, 则

$$(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{U}_t) = (Y_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t), Z_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t), U_t(\mathcal{T}_t)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t)), \quad t \in [0, T]$$

是倒向随机微分方程 (3.2) 的解.

证明 我们来证明 (1) 给定方程 (3.1) 的解

$$(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{U}) \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R}).$$

我们将证明上述定义的 $(Y, Z, U) \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}_{\mathbb{G}}^{2,*}(0, T; \tilde{N}, \mathbb{R})$ 是方程 (3.1) 的解.

任意给定光滑泛函 $F \in \mathcal{S}$, 由 Girsanov 变换和方程 (3.2) 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FY_t - F\xi] &= \mathbb{E}[F(\mathcal{T}_t)\hat{Y}_t - F\hat{Y}_0] \\ &= \mathbb{E}\left[F(\mathcal{T}_t)\left(\hat{Y}_0 + \int_0^t G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s)ds + \int_0^t \hat{Z}_s \downarrow dW_s + \int_0^t \int_E \hat{U}_s(e)\tilde{N}(ds, de)\right) - F\hat{Y}_0\right]. \end{aligned}$$

通过回顾以下等式:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[F(\mathcal{T}_t) \int_0^t \hat{Z}_s \downarrow dW_s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t D_s^W F(\mathcal{T}_t) \hat{Z}_s ds\right], \\ \mathbb{E}\left[F(\mathcal{T}_t) \int_0^t \int_E \hat{U}_s(e)\tilde{N}(ds, de)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_E D_{s,e}^{\tilde{N}} F(\mathcal{T}_t) \hat{U}_s(e)\Pi(de)ds\right]. \end{aligned}$$

并根据下述表达式 [24, 定理 6.1]:

$$\frac{dF(\mathcal{T}_t)}{dt} = (\mathcal{K}\gamma)(t)(D_t^B F)(\mathcal{T}_t),$$

我们得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FY_t - F\xi] &= \mathbb{E}\left[\hat{Y}_0 \int_0^t (\mathcal{K}\gamma)(s)(D_s^B F)(\mathcal{T}_s)ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t F(\mathcal{T}_s)G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s)ds\right. \\ &\quad + \int_0^t \int_s^t \mathcal{K}\gamma(r)D_r^B F(\mathcal{T}_r)dr G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s)ds\Big] + \mathbb{E}\left[\int_0^t D_s^W F(\mathcal{T}_s)\hat{Z}_s ds\right. \\ &\quad + \int_0^t \int_s^t D_s^W (\mathcal{K}\gamma(r)D_r^B F(\mathcal{T}_r))dr \hat{Z}_s ds\Big] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_E D_{s,e}^{\tilde{N}} F(\mathcal{T}_s)\hat{U}_s(e)\Pi(de)ds\right. \\ &\quad + \left.\int_0^t \int_E \int_s^t D_{s,e}^{\tilde{N}} (\mathcal{K}\gamma(r)D_r^B F(\mathcal{T}_r))dr \hat{U}_s(e)\Pi(de)ds\right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

则基于 Fubini 定理和方程 (2.2)–(2.4) 对偶公式的 Skorohod 积分, 对于分数 Brown 运动的情形, 我们得

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_s^t \mathcal{K}\gamma(r) D_r^B F(\mathcal{T}_r) dr G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s) ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_0^s \mathcal{K}\gamma(s) D_s^B F(\mathcal{T}_s) G_r(\hat{Y}_r, \hat{Z}_r, \hat{U}_r) dr ds \right].$$

对于 Brown 运动的部分得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_s^t D_s^W (\mathcal{K}\gamma(r) D_r^B F(\mathcal{T}_r)) dr \hat{Z}_s ds \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathcal{K}\gamma(s) \int_0^s D_r^W (D_s^B F(\mathcal{T}_s) \hat{Z}_r) dr ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathcal{K}\gamma(s) \int_0^s D_s^B F(\mathcal{T}_s) \hat{Z}_r \downarrow dW_r ds \right]. \end{aligned}$$

对于 Poisson 随机测度的部分, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_E \int_s^t D_{s,e}^{\tilde{N}} (\mathcal{K}\gamma(r) (D_r^B F)(\mathcal{T}_r)) dr \hat{U}_s(e) \Pi(de) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_0^s \int_E D_{r,e}^{\tilde{N}} (\mathcal{K}\gamma(s) (D_s^B F)(\mathcal{T}_s)) \hat{U}_r(e) \Pi(de) dr ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathcal{K}\gamma(s) \int_0^s \int_E (D_s^B F)(\mathcal{T}_s) \hat{U}_r(e) \downarrow \tilde{N}(dr, de) ds \right]. \end{aligned}$$

那么, 再次应用 Girsanov 变换和 Fubini 定理, 由方程 (3.4) 和上述等式得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FY_t - F\xi] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t F(\mathcal{T}_s) G_s(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s, \hat{U}_s) ds + \int_0^t D_s^W F(\mathcal{T}_s) \hat{Z}_s ds + \int_0^t \int_E D_{s,e}^{\tilde{N}} F(\mathcal{T}_s) \hat{U}_s(e) \Pi(de) ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathcal{K}\gamma(s) (D_s^B F)(\mathcal{T}_s) \left(\tilde{Y}_0 + \int_0^s G_r(\hat{Y}_r, \hat{Z}_r, \hat{U}_r) dr + \int_0^s \hat{Z}_r \downarrow dW_r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^s \int_E \hat{U}_r(e) \downarrow \tilde{N}(dr, de) \right) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t F f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t D_s^W F Z_s ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_E D_{s,e}^{\tilde{N}} F U_s(e) \Pi(de) ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathcal{K}\gamma(s) D_s^B F Y_s ds \right], \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中, 最后一个等式是因为 $\hat{Y}$ 是方程 (3.2) 的解.

根据对偶公式 (2.2)–(2.4) 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t D_s^W F Z_s ds \right] &= \mathbb{E} \left[F \int_0^t Z_s \downarrow dW_s \right], \\ \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_E D_{s,e}^{\tilde{N}} F U_s(e) \Pi(de) ds \right] &= \mathbb{E} \left[F \int_0^t \int_E U_s(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de) \right]. \end{aligned}$$

因此, 由方程 (3.5), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[F \int_0^t Y_s dB_s^H \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t D_s^B F \gamma_s Y_s ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[F \left(Y_t - \xi - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_0^t Z_s \downarrow dW_s - \int_0^t \int_E U_s(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de) \right) \right]. \end{aligned}$$

由 F 的任意性, 对于任意的 $t \in [0, T]$, 我们得

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds + \int_0^t \gamma_s Y_s dB_s^H + \int_0^t Z_s \downarrow dW_s + \int_0^t \int_E U_s(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de),$$

因此, 结论得证.

类似于 (1) 的证明, 易证 (2) 成立. $\square$

4 分数 Brown 运动驱动的随机积分偏微分方程

本节将研究带跳的分数倒向重随机微分方程的概率表达式 — 随机积分偏微分方程及依路径的积分偏微分方程. 为此, 我们引入下述假设:

(H2) 系数 $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ 和 $\beta: \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是有界可测的且满足下述 Lipschitz 条件: 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 存在一个正常数 K 满足

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| + \left(\int_E |\beta(x, e) - \beta(y, e)|^2 \Pi(de) \right)^{1/2} \leq K(|x - y|);$$

(H3) 函数 $f: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times L^2(E, \mathcal{E}, \Pi; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 在区间 $t \in [0, T]$ 上是一致 Lipschitz 的且 $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 的;

(H4) 对于任意的 $(t, \xi) := (t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 且 $p, p' \in L^2(E, \mathcal{B}(E), \Pi; \mathbb{R})$, 存在两个常数 $-1 < C_1 < 0$ 和 $C_2 > 0$ 满足

$$f(t, \xi, p) - f(t, \xi, p') \leq \int_E (p(e) - p'(e)) \theta_t^{\xi; p, p'}(e) \Pi(de),$$

其中, $\{\theta_t^{\xi; p, p'}(e)\}_{t \in [0, T]}$ 是可测的函数且对于任意 $t \in [0, T]$,

$$C_1(1 \wedge |e|) \leq \gamma_t^{\theta; p, p'}(e) \leq C_2(1 \wedge |e|).$$

值得注意的是, 引入假设 (H4) 是为了利用带跳的倒向随机微分方程的比较定理来证明随机积分偏微分方程黏性解的唯一性. 对于更多的细节, 可参见文献 [22, 23, 25].

我们考虑下述带跳的随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_s^{t,x} = -b(X_s^{t,x})ds - \sigma(X_s^{t,x}) \downarrow W_s - \int_E \beta(X_s^{t,x}, e) \downarrow \tilde{N}(ds, de), & s \in [0, t], \\ X_0^{t,x} = x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.1)$$

其相关的分数倒向重随机微分方程为

$$\begin{cases} dY_s^{t,x} = f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, U_s^{t,x})ds + Z_s^{t,x} \downarrow dW_s \\ \quad + \int_E U_s^{t,x}(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de) + \gamma_s Y_s^{t,x} dB_s^H, & s \in [0, t], \\ Y_0^{t,x} = \Phi(X_0^{t,x}), \end{cases} \quad (4.2)$$

其中, 在随机微分方程 (4.1) 中, 因为时间反演, 过程 $X_{s-}^{t,x}$ 变为 $X_{s+}^{t,x}$. 在标准的假设 (H2) 下, 方程 (4.1) 有唯一的解 $X^{t,x}$, 且该解为 $\{\mathcal{F}_{[s,t]}^W \vee \mathcal{F}_{[s,t]}^N\}$ 适应的. 那么, 由第 3 节的结果, 我们得出带跳的分数倒向重随机微分方程 (4.2) 有唯一的解 $(Y^{t,x}, Z^{t,x}, U^{t,x})$, 即

$$(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, U_s^{t,x}) = (\hat{Y}_s^{t,x}(\mathcal{A}_s)\varepsilon_s, \hat{Z}_s^{t,x}(\mathcal{A}_s)\varepsilon_s, \hat{U}_s^{t,x}(\mathcal{A}_s)\varepsilon_s), \quad s \in [0, t],$$

其中, $(\hat{Y}^{t,x}, \hat{Z}^{t,x}, \hat{U}^{t,x})$ 是下述方程唯一的解,

$$\begin{cases} d\hat{Y}_s^{t,x} = f(s, X_s^{t,x}, \hat{Y}_s^{t,x}\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \hat{Z}_s^{t,x}\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \hat{U}_s^{t,x}\varepsilon_s(\mathcal{T}_s))\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)ds + \hat{Z}_s^{t,x} \downarrow dW_s \\ \quad + \int_E \hat{U}_s^{t,x}(e) \downarrow \tilde{N}(ds, de), \quad s \in [0, t], \\ \hat{Y}_0^{t,x} = \Phi(X_0^{t,x}). \end{cases} \quad (4.3)$$

对 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, 令 $\hat{u}(t, x) := \hat{Y}_t^{t,x}$. 那么, 在方程 (4.2) 中固定 ω , 即我们在分数 Brown 运动的情形下依路径考虑方程 (4.2). 则基于假设 (H2)–(H4), 利用 Barles 等人^[22] 的经典结果, 我们得 $\hat{u}(t, x)$ 是下列积分偏微分方程唯一的黏性解:

$$\begin{cases} D_t \hat{u}(t, x) = (\mathcal{L} + \mathcal{B})\hat{u}(t, x) + f(t, x, \hat{u}(t, x)\varepsilon_t(\mathcal{T}_t), (D_x \hat{u}\sigma)(t, x)\varepsilon_t(\mathcal{T}_t), \\ \quad (\hat{u}(t, x + \beta(x, \cdot)) - \hat{u}(t, x))\varepsilon_t(\mathcal{T}_t))\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}(0, x) = \Phi(x), \end{cases} \quad (4.4)$$

其中, $\mathcal{L}$ 是线性二阶微分算子,

$$\mathcal{L}\hat{u}(t, x) = \text{tr}\left(\frac{1}{2}\sigma\sigma^T(t, x)D_{xx}^2\hat{u}(t, x)\right) + b(t, x) \cdot D_x\hat{u}(t, x)$$

且 $\mathcal{B}$ 是积分微分算子:

$$\mathcal{B}\hat{u}(t, x) = \int_E [\hat{u}(t, x + \beta(x, e)) - \hat{u}(t, x) - \beta(x, e) \cdot D_x\hat{u}(t, x)]\Pi(de).$$

由 $\hat{Y}_s^{t,x}$ 与 $Y_s^{t,x}$ 之间的关系, 我们定义 $u(t, x) = \hat{u}(\mathcal{A}_t, t, x)\varepsilon_t$. 我们希望得到如下结论: $u(t, x)$ 是下述随机积分偏微分方程的唯一解,

$$\begin{cases} du(t, x) = (\mathcal{L} + \mathcal{B})u(t, x) + f(t, x, u(t, x), (D_x u\sigma)(t, x), u(t, x + \beta(x, \cdot)) \\ \quad - u(t, x))dt + \gamma_t u(t, x)dB_t^H, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = \Phi(x). \end{cases} \quad (4.5)$$

实际上在一定条件下, 下述命题 4.1 给出了该结论.

命题 4.1 假设系数足够光滑以使 u 和 $\hat{u}$ 在 $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ 上是 $C^{0,2}$ 的随机场, 那么, u 是方程 (4.5) 的经典解当且仅当 $\hat{u}$ 是方程 (4.4) 的经典解.

证明 假设 $\hat{u}$ 是方程 (4.4) 的经典解. 令 F 是 $\mathcal{S}$ 中任意固定的过程. 利用 Girsanov 变换得

$$\begin{aligned} E[u(t, x)F - u(0, x)F] &= E[F(\mathcal{T}_t)\hat{u}(t, x) - F\hat{u}(0, x)] \\ &= E[F(\mathcal{T}_t)\hat{u}(0, x) - F\hat{u}(0, x)] + E\left[F(\mathcal{T}_t) \int_0^t [(\mathcal{L} + \mathcal{B})\hat{u}(s, x) \right. \\ &\quad \left. + f(s, x, \hat{u}(s, x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), D_x\hat{u}(s, x)\sigma(x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \hat{u}(s, x) \right. \\ &\quad \left. + (\beta(x, \cdot) - \hat{u}(s, x))\varepsilon_s(\mathcal{T}_s))\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)]ds\right]. \end{aligned}$$

正如定理 3.2 的证明, 我们利用下述等式:

$$\frac{dF(\mathcal{T}_t)}{dt} = (\mathcal{K}\gamma)(t)(D_t^B F)(\mathcal{T}_t)$$

因而,

$$\begin{aligned}
 E[u(t, x)F - u(0, x)F] &= E[\hat{u}(0, x) \int_0^t (\mathcal{K}\gamma)(s)(D_s^B F)(\mathcal{T}_s)ds] \\
 &\quad + E\left[\int_0^t \int_s^t (\mathcal{K}\gamma)(r)(D_r^B F)(\mathcal{T}_r)dr(\mathcal{L} + \mathcal{B})\hat{u}(s, x)ds\right] \\
 &\quad + E\left[\int_0^t F(\mathcal{T}_s)[(\mathcal{L} + \mathcal{B})\hat{u}(s, x) + f(s, x, \hat{u}(s, x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \right. \\
 &\quad \left. D_x \hat{u}(s, x)\sigma(x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), (\hat{u}(s, x + \beta(x, \cdot)) - \hat{u}(s, x))\varepsilon_s(\mathcal{T}_s))\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)]ds\right] \\
 &\quad + E\left[\int_0^t \int_s^t (\mathcal{K}\gamma)(r)(D_r^B F)(\mathcal{T}_r)dr f(s, x, \hat{u}(s, x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \right. \\
 &\quad \left. D_x \hat{u}(s, x)\sigma(x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), (\hat{u}(s, x + \beta(x, \cdot)) - \hat{u}(s, x))\varepsilon_s(\mathcal{T}_s))\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)ds\right].
 \end{aligned}$$

若假设 $\hat{u}(t, x)$ 是方程 (4.4) 经典解, 那么, 我们有

$$\begin{aligned}
 E[u(t, x)F - u(0, x)F] &= E\left[\int_0^t (\mathcal{K}\gamma)(s)(D_s^B F)(\mathcal{T}_s)\hat{u}(s, x)ds\right] + E\left[\int_0^t F(\mathcal{T}_s)[(\mathcal{L} + \mathcal{B})\hat{u}(s, x) + f(s, x, \hat{u}(s, x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), \right. \\
 &\quad \left. D_x \hat{u}(s, x)\sigma(x)\varepsilon_s(\mathcal{T}_s), (\hat{u}(s, x + \beta(x, \cdot)) - \hat{u}(s, x))\varepsilon_s(\mathcal{T}_s))\varepsilon_s^{-1}(\mathcal{T}_s)ds\right] \\
 &= E\left[\int_0^t (\mathcal{K}\gamma)(s)D_s^B F u(s, x)ds\right] + E\left[\int_0^t F[(\mathcal{L} + \mathcal{B})u(s, x) + f(s, x, u(s, x), \right. \\
 &\quad \left. D_x u(s, x)\sigma(x), (u(s, x + \beta(x, \cdot)) - u(s, x)))]ds\right].
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 E\left[\int_0^t (\mathcal{K}\gamma)(s)D_s^B F u(s, x)ds\right] &= E\left[F\left(u(t, x) - u(0, x) - \int_0^t [(\mathcal{L} + \mathcal{B})u(s, x) + f(s, x, u(s, x), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. D_x u(s, x)\sigma(x), (u(s, x + \beta(x, \cdot)) - u(s, x)))]ds\right)\right].
 \end{aligned}$$

由定义 2.2 得

$$\begin{aligned}
 E\left[F \int_0^t \gamma_s u(s, x)dB_s^H\right] &= E\left[F\left(u(t, x) - u(0, x) - \int_0^t ((\mathcal{L} + \mathcal{B})u(s, x) + f(s, x, u(s, x), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. D_x u(s, x)\sigma(x), (u(s, x + \beta(x, \cdot)) - u(s, x)))]ds\right)\right].
 \end{aligned}$$

因此, 由 $F \in \mathcal{S}$ 的任意性, 我们有

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \Phi(x) + \int_0^t \gamma_s u(s, x)dB_s^H + \int_0^t [(\mathcal{L} + \mathcal{B})u(s, x) + f(s, x, u(s, x), \\
 &\quad D_x u(s, x)\sigma(x), (u(s, x + \beta(x, \cdot)) - u(s, x)))]ds.
 \end{aligned}$$

结论的充分性得证. 同理我们可以证明结论的必要性. $\square$

基于上述命题, 我们给出随机黏性解的定义.

定义 4.1 连续的随机场 $u : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 称为随机积分偏微分方程 (4.5) 的随机黏性解当且仅当 $\hat{u}(t, x) = u(\mathcal{T}_t, t, x)\varepsilon_t^{-1}(\mathcal{T}_t)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ 是积分方程 (4.4) 依路径黏性解.

注 4.1 定义 4.1 关于随机黏性解的定义与文献 [26] 的定义有所区别, 它是基于文献 [7] 中关于随机黏性解的定义. 但是定义 4.1 与文献 [7] 中的定义不同点在于后者的定义是建立在 Doss-Sussmann 变换基础上的, 不涉及路径的改变, 而定义 4.1 是建立在 Girsanov 变换的基础上, 改变了分数 Brown 运动的路径.

因此, 通过讨论随机偏微分方程与随机积分偏微分方程的关系, 我们得出定理 4.1.

定理 4.1 令 $Y^{t,x}$ 是带跳的分数重倒向随机微分方程 (4.2) 的解. 那么, 由

$$u(t, x) = Y_t^{t,x}, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$$

所定义的随机场是半线性随机积分偏微分方程 (4.5) 唯一的随机黏性解.

5 结论与展望

本文对带跳的分数倒向重随机微分方程和相应的随机积分偏微分方程进行了研究. 首先, 基于可料 Girsanov 变换, 本文建立了带跳的分数倒向重随机微分方程的解与依 (分数 Brown 运动的) 路径带跳的倒向随机微分方程解之间的一一对应关系, 从而证明了由 Brown 运动、Poisson 随机测度和 Hurst 参数在 $(1/2, 1)$ 范围内的分数 Brown 运动共同驱动的半线性倒向重随机微分方程解的存在唯一性, 为研究由 Brown 运动、Poisson 随机测度和分数 Brown 运动这三类代表性的特殊过程共同驱动的倒向重随机微分方程提供了思路. 其次, 本文还研究了一类由分数 Brown 运动驱动的半线性随机积分偏微分方程解的概率表达式, 通过依路径积分偏微分方程的可料 Girsanov 变换, 证明了由分数 Brown 运动驱动的随机积分偏微分方程的随机黏性解可由带跳的分数倒向重随机微分方程的解唯一给出, 为将来研究非线性随机积分偏微分方程的随机黏性解奠定了基础.

值得注意的是, 本文仅限于研究关于分数 Brown 运动的被积函数是线性的情形, 关于非线性情形, Girsanov 变换则不再适用, 这就需要寻找新方法进行研究, 也是我们下一步的研究方向.

致谢 感谢审稿人和编辑提出的修改意见, 也感谢中国科学院国家数学与交叉科学中心经济金融部和中央财经大学科研创新团队支持计划的资助.

参考文献

- 1 Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett*, 1990, 14: 55–61
- 2 El Karoui N, Peng S, Quenez M. Backward stochastic differential equations in finance. *Math Finance*, 1997, 7: 1–71
- 3 Pardoux E, Peng S. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In: Rozovski B L, Sowers R B, eds. *Stochastic PDE and Their Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 176. Berlin: Springer, 1992, 200–217
- 4 林乾, 石玉峰. Peng g -期望下的大数定律. *中国科学: 数学*, 2012, 42: 295–302
- 5 Pardoux E, Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear parabolic SPDEs. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 98: 209–227
- 6 Bally V, Matoussi A. Weak solutions for SPDEs and backward doubly stochastic differential equations. *J Theoret Probab*, 2001, 14, 125–164
- 7 Buckdahn R, Ma J. Stochastic viscosity solutions for nonlinear stochastic partial differential equations, Part I. *Stochastic Process Appl*, 2001, 93, 181–204

- 8 Buckdahn R, Ma J. Stochastic viscosity solutions for nonlinear stochastic partial differential equations, Part II. *Stochastic Process Appl*, 2001, 93, 205–228
- 9 Zhang Q, Zhao H. Stationary solutions of SPDEs and infinite horizon BDSDEs. *J Funct Anal*, 2007, 252: 171–219
- 10 Zhu Q, Shi Y. Forward-backward doubly stochastic differential equations and related stochastic partial differential equations. *Sci China Math*, 2012, 55: 2517–2534
- 11 Zhu Q, Shi Y. Backward doubly stochastic differential equations with jumps and stochastic partial differential-integral equations. *Chin Ann Math Ser B*, 2012, 33: 127–142
- 12 Hu Y. *Integral Transformations and Anticipative Calculus for Fractional Brownian Motions*. Providence, RI: Amer Math Soc, 2005
- 13 Bender C. Explicit solutions of a class of linear fractional BSDEs. *Systems Control Lett*, 2005, 54: 671–680
- 14 Hu Y, Peng S. Backward stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion. *SIAM J Control Optim*, 2009, 48: 1675–1700
- 15 Katarzyna J B. Generalized BSDEs driven by fractional Brownian motion. *Statist Probab Lett*, 2013, 83: 805–811
- 16 Jing S, León J A. Semilinear backward doubly stochastic differential equations and SPDEs driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter in $(0, 1/2)$. *Bull Sci Math*, 2011, 135: 896–935
- 17 Jing S. Nonlinear fractional stochastic PDEs and BDSDEs with Hurst parameter in $(1/2, 1)$. *Systems Control Lett*, 2012, 61: 655–665
- 18 Buckdahn R. *Anticipative Girsanov Transformations and Skorohod Stochastic Differential Equations*. Providence, RI: Amer Math Soc, 1994
- 19 Nualart D. *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006
- 20 Di Nunno G, Øksendal B, Proske F. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*. New York: Springer, 2009
- 21 Barles G, Buckdahn R, Pardoux E. BSDEs and integral-partial differential equations. *Stoch Stoch Rep*, 1997, 60: 57–83
- 22 Jing S. Regularity properties of viscosity solutions of integro-partial differential equations of Hamilton-Jacobi-Bellman type. *Stochastic Process Appl*, 2013, 123: 300–328
- 23 Tang S, Li X. Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps. *SIAM J Control Optim*, 1994, 32: 1447–1475
- 24 Jien Y, Ma J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motions. *Bernoulli*, 2009, 15: 846–870
- 25 Royer M. Backward stochastic differential equations with jumps and related non-linear expectations. *Stochastic Process Appl*, 2006, 116: 1358–1376
- 26 Lions P L, Souganidis P E. Fully nonlinear stochastic partial differential equations. *C R Acad Sci Paris*, 1998, 326: 1085–1092

Fractional backward doubly stochastic differential equations with jumps and the related SIPDEs

GUO DongMei, JING Shuai & WANG ShouYang

Abstract We study semilinear backward doubly stochastic differential equations driven by a Brownian motion, a Poisson random measure and a fractional Brownian motion with Hurst parameter in $(1/2, 1)$. We obtain the existence and uniqueness of the solutions. We also prove that the solution of semilinear fractional backward doubly stochastic differential equation with jumps defines the unique stochastic viscosity solution of a semilinear stochastic integral-partial differential equation driven by a fractional Brownian motion.

Keywords fractional Brownian motion, backward doubly stochastic differential equation, Poisson random measure, Girsanov transformation, stochastic integral-partial differential equation

MSC(2010) 35D40, 62P05, 60H10

doi: 10.1360/N012013-00109