

Doi: 10.11840/j.issn.1001-6392.2020.05.002

极值波高与历时联合分布的重现水平分析

陈子燊^{1,2}, 位帅³

(1. 中山大学 新华学院, 广东 广州, 510520; 2. 中山大学 地理科学与规划学院, 广东 广州 510275;
3. 中山市水库水电工程管理中心, 广东 中山 528400)

摘 要: 使用美国北卡罗来纳州的 FRF 1985—2016 年的极值波高及其持续时间数据, 采用最优的 Gumbel-Hougaard copula 函数和 Kendall 分布函数构建极值波高和相应历时不同组合的联合概率分布模式, 分析各个组合的遭遇概率、“或”重现期、“且”重现期和 Kendall 重现期, 以出现最大可能概率的方法推算各组合联合设计值。结果表明: Kendall 重现期所对应的累积频率更准确地代表了特定设计频率下的风险率; 重现期分别为 5 年、10 年、20 年、50 年、100 年、200 年推算的 Kendall 重现期设计值介于“或”重现期和“且”重现期设计值之间, 小于相应的边缘分布设计值; 基于 Kendall 重现期的极值波高及其持续时间不同重现期组合推算的结果可为海洋工程构筑物设计与风险管理提供新的选择与参考。

关键词: 海洋工程构筑物风险评估; 设计波高与相应历时; “或”重现期; “且”重现期; Kendall 重现期

中图分类号: P731.22

文献标识码: A

文章编号: 1001-6932(2020)05-0530-06

Return level analysis on joint distribution of extreme wave heights and durations

CHEN Zishen^{1,2}, WEI Shuai³

(1. Xinhua College of Sun Yat-sen University, Guangzhou 510520, China; 2. School of Geography and Planning, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 3. Reservoir and Hydropower Engineering Management Center of Zhongshan, Zhongshan, 528400, China)

Abstract: Extreme wave heights and their duration data from 1985 to 2016 were used in Field of Research Facility (FRF) from north Carolina, USA. The optimal Gumbel-Hougaard copula and Kendall distribution function were used to construct the joint probability distribution model of different combinations of extreme wave height and corresponding duration. The probability of encounter, the 'OR' return period, the 'AND' return period and Kendall return period of each combination were analyzed to calculate the joint design value of each combination by the method of maximum probability. The results show that the cumulative frequency corresponding to Kendall return period more accurately represents the risk rate under the specific design frequency. The design values of Kendall return period calculated with return periods of 5 years, 10 years, 20 years, 50 years, 100 years and 200 years are between 'OR' return period and 'AND' return period, and less than the corresponding marginal distribution design values. Based on the combination of extreme wave height in Kendall return period and its duration in different return periods, the results can provide new options for the design reference and risk management of marine engineering structures.

Key words: Risk assessment of marine engineering structures; Design wave height and corresponding duration; 'OR' return periods; 'AND' return periods; Kendall return periods

我国现有的港口工程技术规范对各种型式的建筑物规定了不同的设计波浪重现期标准, 其标准是基于单变量重现期估计工程建筑物的设计失效风险, 推算按某一重现期波高设计的建筑物在使用年

限内可能遭受破坏的概率。已有研究指出极端波浪发生的频次、历时以及强度也是影响航运和海岸、海洋工程建设, 造成高损毁风险的重要指标, 可用不同的阈值来定义极端波浪事件 (Weisse et al,

收稿日期: 2020-02-03; 修订日期: 2020-04-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41371498)

作者简介: 陈子燊 (1952-), 教授, 主要从事极端水文气象事件的风险研究。电子邮箱: eesczs@mail.sysu.edu.cn

2007; 徐佳丽等, 2019; Liang et al, 2019)。沈栋等 (2000) 针对极端海浪持续时间对海工构筑物的影响, 采用了在随机波作用下船舶保持不倾覆状态所能持续的时间作为表征船舶稳性的指标。相关研究表明, 极端波浪的长时间冲击荷载会造成结构物的弹性变形进而导致结构物坍塌和疲劳破坏 (郭保臣等, 2011)。蔡正银等 (2010) 实施的波浪荷载作用下箱筒型基础防波堤性状试验研究, 探讨了波浪载荷强度和作用持续时间等对防波堤结构位移的影响。海岸和海洋工程事故通常是极端波浪多变量要素联合作用的结果, Copula 函数的应用促进了多变量联合分布及其风险概率在海洋工程领域的应用。已有研究人员采用可有效描述两变量联合分布的阿基米德 Copulas 函数构建了风速与波高或波高与周期联合分布 (董胜等, 2011; 秦振江等, 2007; 徐龙军等, 2013; 陈子桑等, 2012, 2018) 或极值波高与相应周期和风速三变量联合概率分布 (陈子桑等, 2017)。海洋结构物对波高和相应周期联合分布的响应已得到较多关注 (Ochi, 1978; 马桂芝, 1988; 方钟圣等, 1989; 潘锦娥, 1989; Favre et al, 2004)。赵耀南 (1982) 建议限定在“等重现期”的原则下, 依据构筑物的耐波特性, 选定一组产生最大波浪荷载的最不利波高和周期的组合, 用以计算设计波浪。周道成等 (2003) 研究了波高和相应风速对设计构筑物荷载的影响。鉴于海岸和海洋工程失事代价很高, 探索极端海况下极值波高及其历时联合分布的风险概率, 推算其不同重现期组合下的设计值, 对于工程的设计与风险管理具有重要的应用参考价值。

Salvadoriet 等 (2011) 针对当前常用的两种多变量重现期“或” (‘OR’) 重现期和“且” (‘AND’) 重现期的定义方法及其在安全与危险事件的判定上存在的不足, 提出了划分安全与危险临界域的新的多变量重现期——Kendall 重现期 (Kendall Return Period), 其研究成果已在海岸工程设计研究中得到初步应用 (Corbella et al, 2012; Salvadori et al, 2013)。本文拟通过实例研究, 对比 Kendall 重现期和“或”重现期、“且”重现期及其危险率, 推算此三类重现期的极值波高及其相应历时联合分布设计值和不同 Kendall 重现期的组合设计值。此将有助于深入认识极端风浪对海岸和海洋工程的致灾风险, 有助于相关工程的风险管

理, 并为工程设计提供参考。

1 理论与方法

1.1 Copula 函数与联合分布重现期

根据 Sklar 定理, 若 $F(\cdot)$ 是一个二维随机变量 (X, Y) 的累积分布函数, 其边缘分布函数是连续函数。 $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$, 则有唯一的 Copula 函数 C 使得:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = C(F_X(x), \\ F_Y(y)) &= C(u, v) \end{aligned} \quad (1)$$

采用算符“ \vee ”定义“或”极端事件 E_{XY}^{\vee} : $E_{XY}^{\vee} = \{X > x \vee Y > y\}$; 以“ \wedge ”定义“且”极端事件 E_{XY}^{\wedge} : $E_{XY}^{\wedge} = \{X > x \wedge Y > y\}$, 则极端事件 E_{XY}^{\vee} 的“或”联合分布重现期为:

$$T_{\text{OR}} = \frac{E(L)}{1 - C(F_X(x), F_Y(y))} = \frac{E(L)}{1 - C(u, v)} \quad (2)$$

极端事件 E_{XY}^{\wedge} 的“且”联合分布重现期为:

$$T_{\text{AND}} = \frac{E(L)}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))} = \frac{E(L)}{1 - u - v + C(u, v)} \quad (3)$$

式中, $E(L)$ 表示两个连续事件的平均到达时间。

1.2 Kendall 分布函数与 Kendall 重现期

从首次重现期可知, 不同的 u, v 组合只要其出现累积概率 (记为 t) 相同都可产生相同的重现期。为解决由“或”重现期定义的安全域/危险域误判问题, 利用 Kendall 分布函数 (Nelsen, 2006) 划分出亚临界 (安全域)、临界 (警戒事件) 和超临界 (危险域) 三种情景 (Salvadori et al, 2011)。通过求解累积概率小于或等于某临界概率 (记为 t), 将多维的极值事件投射为一维分布。基于 Copula 函数累积概率为 t 的 (u, v) 组合值, Kendall 分布函数 K_C 为:

$$K_C(t) = t - \varphi(t)/\varphi'(t), 0 < t \leq 1 \quad (4)$$

式中, $\varphi'(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的右导数。由 Kendall 分布函数确定的重现期称为 Kendall 重现期 (Kendall Return Period):

$$T_K(x, y) = \frac{E(L)}{1 - K_C(t)} \quad (5)$$

对二维 Copulas 的“或”、“且”和 Kendall 重

现期三种联合重现期 (JRP) 的不等关系 (Graler et al, 2013) 可以图示解释 (图 1): 对于一固定的设计事件 (u, v) , 其累积分布单位平方图内不同的重现期 T_{OR} 、 T_{KEN} 和 T_{AND} 可以用 $1/(1-\text{面积}(\text{安全事件}))$ 表示。如图 1 所示, “或” 重现期定义仅将左下角矩形中的所有事件视为安全的。Kendall 重现期将左上角和右下角的曲线区域 (KEN) 与左下角的矩形区划为安全域, 从而使同一设计事件 (u, v) 产生的重现期比 “或” 重现期更大。“且” 重现期则进一步添加了左上角和右下角的矩形, 从而得到最大的重现期。

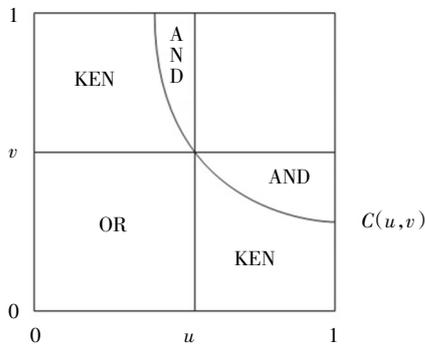


图 1 三种联合分布重现期定义的图示说明
(引自 Graler et al, 2013)

1.3 联合分布设计值

多变量联合分布同一个重现期可以有不同的分位数组合与之对应, 这些分位数组合无法通过概率分布的反函数直接计算。然而, 具有相同重现期 $T_p(C(u, v) = p)$ 的分位值组合构成了一个二维点集等值线 S_p^V , 设计分位数组合必然存在一个使联合概率密度 $f(u, v)$ 达到最大值的组合 (u_m, v_m) , 即该组合出现的可能性最大。因此, 在设定重现期条件下出现最大可能组合的设计值可作为工程设计与风险管控标准的合理选择。联合分布设计值的计算式为:

$$(u_m, v_m) = \arg \max_{(u, v) \in S_p^V} f(u, v) \quad (6)$$

$$f(u, v) = c(u, v)f(u)f(v) \quad (7)$$

式中, c 为二维 copula 的概率密度函数。

2 实例研究

2.1 基本数据

研究数据采用美国陆军工程师团在北卡罗来纳

州 Duck 的 FRF (Field Research Facility) 试验场测量的波高数据。FRF 试验场直接面向美国大西洋。采用投放在水深 17.4 m 处的波浪骑士浮标 (地理坐标: 36.12°N, 75.4°W) 1985—2016 年观测的波浪要素, 以满足最大 0 阶谱矩波高 H_{m0} 大于 2 m 和历时大于 8 h 为超限阈值的极值波高与相应历时共 463 组波要素作为研究样本。其中, 2003 年 9 月 13 日极端波况下测量的最大波高为 8.1 m, 周期 15 s, 大于 2 m 的波高持续时间 79 h。

2.2 边缘分布与联合分布

采用 4 种三参数概率分布: 皮尔逊三型分布 (PE3)、广义极值分布 (GEV)、广义正态分布 (GNO)、广义逻辑斯特分布 (GLO) 分别拟合波高和历时样本。参数估计使用线性矩 (L-矩) 法。经验频率分布使用 Gringorten 公式。拟合结果采用均方根误差 (RMSE)、和概率点据相关系数 (PPCC) 检验其拟合优度。根据对表 1 择优对比结果, 边缘分布波高和历时样本均选用 PE3 分布。

表 1 波高和历时的分布参数与优度检验值

| 样本 | 边缘分布 | 位置参数 | 尺度参数 | 形态参数 | RMSE | PPCC |
|-----|------|--------|--------|--------|-------|-------|
| H/m | GNO | 2.878 | 0.648 | -0.658 | 0.098 | 0.994 |
| | GEV | 2.698 | 0.498 | -0.212 | 0.144 | 0.988 |
| | GLO | 2.901 | 0.370 | -0.314 | 0.211 | 0.975 |
| | PE3 | 2.198 | 1.127 | 1.228 | 0.072 | 0.997 |
| D/h | GNO | 24.504 | 18.204 | -0.821 | 4.670 | 0.988 |
| | GEV | 19.800 | 13.370 | -0.311 | 7.563 | 0.970 |
| | GLO | 25.349 | 10.510 | -0.386 | 9.544 | 0.954 |
| | PE3 | 9.026 | 0.741 | 0.030 | 1.857 | 0.998 |

计算的波高和历时的 Kendall 相关系数为 0.434。采用相关性指标法计算二者联合分布的 Gumbel copula、Frank copula、A-M-H copula 和 Clayton copula 的参数 θ 及相应的 AIC 和 OLS 值, 见表 2。以 OLS 和 AIC 值最小, 拟合度最高的 Gumbel copula 构建 H-D 的分布模式如下:

$$C(F_H(h), F_D(d)) = \exp\{-[(-\ln F_H(h))^{1.762} + (-\ln F_D(d))^{1.762}]^{1/1.762}\} \quad (8)$$

表 2 Copula 参数估计及拟合优度评价

| Copula | θ | OLS | AIC |
|---------|----------|-------|--------|
| Clayton | 1.524 | 0.410 | -831 |
| A-M-H | 0.990 | 0.038 | -3 042 |
| Gumbel | 1.762 | 0.022 | -3 581 |
| Frank | 4.629 | 0.024 | -3 478 |

2.3 条件概率分布

对于给定 $D \geq d$ 时, $H \geq h$ 的条件概率为:

$$P(H \geq h | D \geq d) = \frac{P(H \geq h, D \geq d)}{P(D \geq d)} = \frac{1 - F_H(h) - F_D(d) + F(d, h)}{E(L) \cdot 1 - F_D(d)} \quad (9)$$

条件重现期为:

$$T_{H \geq h | D \geq d} = \frac{1}{1 - F_H(h)} \cdot \frac{E(L)}{1 - F_H(h) - F_D(d) + F(d, h)} \quad (10)$$

表 3 和图 2 反映了表示当历时 D 出现概率大于等于 20%、10%、5%、2%、1% 和 0.5% 时, 波高 H 的条件概率 $P(H \geq h | D \geq d)$ 。由此可知: (1) 当 D 大于等于某一特定频率设计值时, H 出现大于等于该频率设计值的条件概率随着超值概率的减小而减小, 以 D 出现概率大于等于 1% 时的 223h 为例, H 出现概率大于等于 20%、10%、5%、2%、1% 和 0.5% 的条件概率分别为 0.943、0.903、0.836、0.685、0.518 和 0.342, 其相应的条件重现期为: 1.1 年、1.1 年、1.1 年、1.5 年、1.9 年和 2.9 年。(2) 当 H 大于等于某一特定频率设计值时, H 出现大于等于该频率设计值的条件概率随着超值

表 3 波高-历时联合分布条件概率

| H/m | D/h | $P(H \geq h D \geq d)$ | | | | | |
|-------|-------|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 129 | 151 | 172 | 201 | 223 | 245 |
| | P | 20% | 10% | 5% | 2% | 1% | 0.5% |
| 5.9 | 20% | 0.523 | 0.688 | 0.809 | 0.904 | 0.943 | 0.967 |
| 6.5 | 10% | 0.344 | 0.520 | 0.686 | 0.837 | 0.903 | 0.943 |
| 7.1 | 5% | 0.202 | 0.343 | 0.519 | 0.730 | 0.836 | 0.903 |
| 7.9 | 2% | 0.090 | 0.167 | 0.292 | 0.518 | 0.685 | 0.807 |
| 8.4 | 1% | 0.047 | 0.090 | 0.167 | 0.342 | 0.518 | 0.684 |
| 9.0 | 0.5% | 0.024 | 0.047 | 0.090 | 0.202 | 0.342 | 0.518 |

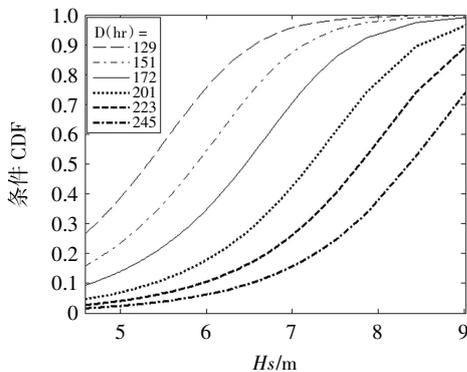


图 2 波高-历时联合分布条件概率图

概率的减小而增大。如百年一遇的 $H = 8.4 \text{ m}$, H 与 D 的遭遇概率随超值概率的减小而增大, H 出现概率大于等于 20%、10%、5%、2%、1% 和 0.5% 的条件概率分别为 0.047、0.090、0.167、0.342、0.518、0.684, 其相应的条件重现期为: 21.2 年、11.1 年、6.0 年、2.9 年、1.9 年和 1.5 年。(3) $H-D$ 主对角线以上组合的概率超过 51.8%, 表明二者遭遇的概率非常高, $H-D$ 存在多种组合的设计标准, 需要进一步推算其组合设计值。

2.4 联合分布重现期

设定重现期标准下 $H-D$ 联合分布的 3 种重现期计算结果见表 4、图 3。由式 (2)、(3)、(5) 和 C 的非递减性可知, 对于设定的某一重现期 T , “或” 重现期、“且” 重现期和 Kendall 重现期之间的关系为: $T_{OR} < T_K < T_{AND}$ 。重现期大则危险率小, 反之则危险率大。由表 4 可见, 对于设定的重现期, “或” 重现期最小且小于设定的重现期标准, 以任一极端波况要素超标可能致灾的“或” 重现期为标准的危险率最大, “且” 重现期最大且大于设定的重现期标准, 按两变量极端波况要素同时超标的“且” 重现期设计的海岸和海洋工程构筑物出现的危险率最小。然而由于“或” 重现期和“且” 重现期都存在确定危险率不准确的问题, 如按此两种重现期标准设计的工程将存在高估或低估风险的问题。从安全角度考虑, 对两变量任一极端波况要素超标致灾的重现期标准宜采用大于“或” 重现期的 Kendall 重现期更合理。

表 4 波高-历时联合分布重现期

| 重现期(年) P | $T_{OR} P$ | $T_{AND} P$ | $T_K P$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| 200 0.005 | 135.3 0.007 4 | 382.9 0.002 6 | 309.7 0.003 2 |
| 100 0.01 | 67.8 0.014 8 | 190.8 0.005 2 | 154.3 0.006 5 |
| 50 0.02 | 34.0 0.029 4 | 94.8 0.010 6 | 76.6 0.013 1 |
| 20 0.05 | 13.7 0.073 1 | 37.1 0.026 9 | 30.0 0.033 3 |
| 10 0.10 | 6.9 0.144 3 | 18.0 0.055 7 | 14.5 0.069 0 |
| 5 0.20 | 3.6 0.281 2 | 8.4 0.118 8 | 6.8 0.147 1 |

2.5 波高与历时设计值

按设定重现期推算的波高和历时的边缘分布设计值, 以出现概率最大的原理推算二者组合的“或” 重现期、“且” 重现期和 Kendall 重现期设计值分别列于表 5 和表 6。表 5 显示, 对于设定的 5~200 年重现期, 按 Kendall 重现期推算的设计波高 H 和设计历时 D 分别小于“或” 重现期设计值

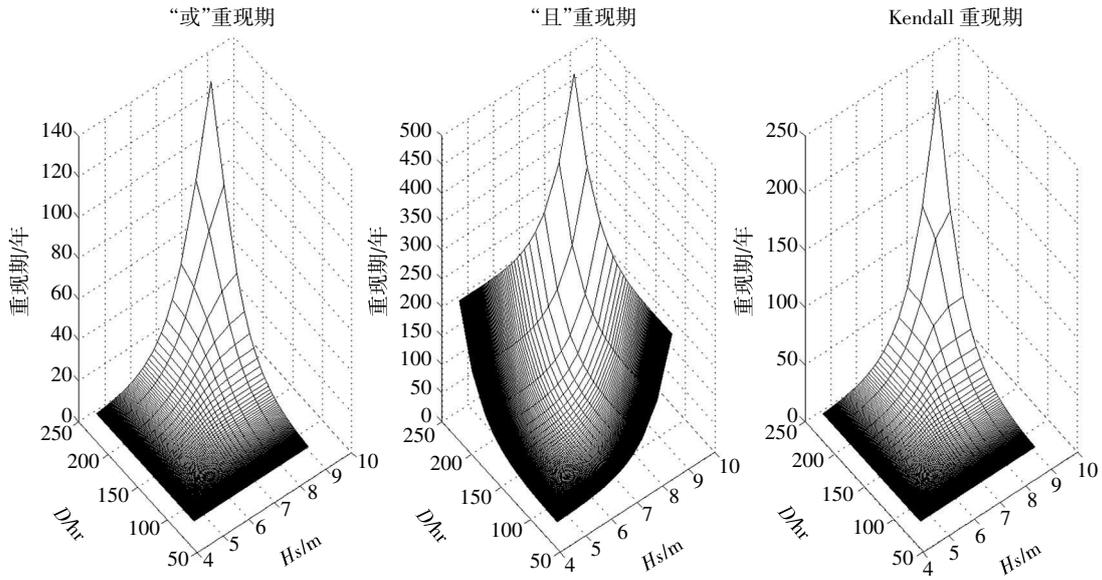


图3 波高与历时三种联合分布重现期

和边缘分布设计值。这一结果表明，按两变量“或”重现期推算的设计值存在高估问题，按两变量“且”重现期推算的设计值存在低估问题，可能导致工程结构物事故风险加大。按 Kendall 重现期推算的设计值可为工程安全与建设投资提供更合理的参考依据。作为比较进一步推算 H-D 两变量同频率分布设计值：

$$\begin{aligned}
 u_1 = u_2 &= [1 - (E(L)/T_{u_1, u_2})]^\alpha; \\
 H &= F^{-1}(u_1); \quad D = F^{-1}(u_2)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

式中， $\alpha = 2^{-1/\theta}$ ； T_{u_1, u_2} 为“或”重现期； $F^{-1}(u_i)$ 为边缘分布函数的反函数。从计算结果可见，两变量同频率设计值十分接近于按联合概率密度最大值推算的两变量“或”重现期设计值。换言之，使用两变量同频率分布设计值作为工程设计标准同样偏高。

按出现概率最大的原理进一步推算二者不同重现期组合下的 Kendall 重现期设计值。从表 6 可见二者组合设计值有以下特点：①对应于某给定重现期的波浪持续时间，设计波高随重现期的减小而降

表5 不同重现期下波高与历时设计值

| T/年 | 边缘分布 | | “或”重现期 | | “且”重现期 | | Kendall 重现期 | | 同频率 | |
|-----|------|------|------------|-------------|-------------|--------------|-------------|----------|---------|----------|
| | H/m | D/hr | H_{OR}/m | D_{OR}/hr | H_{AND}/m | D_{AND}/hr | H_K/m | D_K/hr | H_T/m | D_T/hr |
| 200 | 9.02 | 245 | 9.46 | 261 | 7.91 | 188 | 8.65 | 231 | 9.34 | 257 |
| 100 | 8.44 | 223 | 8.80 | 233 | 7.68 | 179 | 8.08 | 209 | 8.77 | 235 |
| 50 | 7.86 | 201 | 8.21 | 211 | 7.40 | 168 | 7.50 | 188 | 8.19 | 214 |
| 20 | 7.10 | 172 | 7.44 | 185 | 6.89 | 149 | 6.73 | 159 | 7.43 | 185 |
| 10 | 6.52 | 151 | 6.85 | 163 | 5.89 | 126 | 6.15 | 137 | 6.85 | 163 |
| 5 | 5.94 | 129 | 6.27 | 141 | 5.44 | 104 | 5.58 | 116 | 6.27 | 141 |

表6 波高与历时不同重现期组合设计值

| T/年 | 200 | | 100 | | 50 | | 20 | | 10 | | 5 | |
|-----|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|
| | H/h | D/m |
| 200 | 8.65 | 231 | 8.32 | 197 | 8.32 | 182 | 8.43 | 214 | 8.40 | 211 | 8.38 | 207 |
| 100 | 8.18 | 220 | 8.08 | 209 | 7.75 | 175 | 7.90 | 197 | 7.86 | 192 | 7.83 | 189 |
| 50 | 7.41 | 219 | 7.60 | 198 | 7.50 | 188 | 7.17 | 148 | 7.33 | 175 | 7.28 | 171 |
| 20 | 6.49 | 219 | 6.59 | 197 | 6.82 | 175 | 6.73 | 159 | 6.40 | 126 | 6.40 | 110 |
| 10 | 5.87 | 219 | 5.91 | 197 | 6.01 | 175 | 6.26 | 148 | 6.15 | 137 | 5.82 | 105 |
| 5 | 5.27 | 219 | 5.29 | 197 | 5.34 | 175 | 5.49 | 147 | 5.68 | 127 | 5.58 | 116 |

低。当给定设计波浪持续时间的重现期大于设计波高重现期, 持续时间趋于定值; ②根据条件概率组合可认为主对角线以上出现的二者组合设计值的可能性大(表 6 中的加粗数字); ③同频率 H 和 D 组合设计值同表 5 中的 Kendall 重现期设计值。

3 结论

分析极端海浪要素联合分布及其重现水平, 是一个需要深入研究的关键科技问题, 本文应用判断安全与危险临界域的多变量重现期-Kendall 重现期对此作了尝试。基于 Kendall 重现期的极值波高及其持续时间联合分布的统计分析有以下结论:

(1) 对比三种联合分布重现期, 相对于“或”和“且”首次重现期, Kendall 重现期可更准确地识别特定设计频率下的超临界事件的风险率。

(2) 极值波高及其持续时间相关性高, 主对角线以上的条件概率介于 51% ~ 97%, 二者遭遇风险概率大, 分析多种组合出现的不同遭遇概率有利于工程构筑物设计时的风险管理。

(3) Kendall 重现期推算的设计波要素介于“或”重现期与“且”重现期设计值之间, 小于边缘分布设计值。基于 Kendall 重现期的超限极值波高与持续时间不同重现期组合的推算结果可为海洋工程构筑物荷载设计提供参考。

致谢: 本文使用 FRF 提供的波浪观测数据, 在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

蔡正银, 徐光明, 顾行文, 等, 2010. 波浪荷载作用下箱筒型基础防波堤性状试验研究[J]. 中国港湾建设, 增刊 1: 90-95.
陈子桑, 曹深西, 2012. 基于 Copula 函数的波高与周期长期联合分布[J]. 海洋通报, 31(6): 8-13.
陈子桑, 路剑飞, 于吉涛, 2017. 基于非对称 Archimedean Copula 的三变量风浪重现水平分析[J]. 海洋通报, 36(6): 631-637.

陈子桑, 施伟勇, 路剑飞, 2018. 波高周期联合分布四种重现水平对比分析[J]. 热带海洋学报, 37(4): 18-23.
董胜, 周冲, 陶山山, 等, 2011. 基于 Clayton copula 函数的二维 Gumbel 模型及其在海洋平台设计中的应用[J]. 中国海洋大学学报, 41(10): 117-120.
方钟圣, 戴顺孙, 金承仪, 1989. 海洋特征波高和周期的长期联合分布及其应用[J]. 海洋学报, 11(5): 535-543.
郭保臣, 任冰, 刘明, 2011. 波浪冲击作用下海洋结构物的动力响应[J]. 水道港口, 32(3): 168-172.
马桂芝, 1988. 重现期设计波高相对应的波浪周期推算方法的讨论[J]. 海洋湖沼通报, 4: 87-90.
潘锦娥, 1989. 显著(或有效)波高与平均周期的长期联合分布探讨[J]. 海洋通报, 8(3): 1-10.
秦振江, 孙广华, 闫同新, 等, 2007. 基于 Copula 函数的联合概率法在海洋工程中的应用[J]. 海洋预报, 24(2): 83-90.
沈栋, 黄祥鹿. 随机波浪作用下船舶倾覆前持续时间的研究[J]. 中国造船, 2000, 41(3): 14-22.
徐佳丽, 时健, 张弛, 等, 2019. 近 40 年中国近海波浪数据库的建立及极值分析[J]. 海洋工程, 37(6): 94-103.
徐龙军, 陈祉宏, 周道成, 等, 2013. 基于 Archimedean Copula 模型的风浪联合分布第二重现期[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 46(2): 114-120.
周道成, 段忠东, 2003. 耿贝尔逻辑模型在极值风速和有效波高联合概率分布中的应用[J]. 海洋工程, 21(2): 45-51.
赵耀南, 1982. 等重现期的最不利设计波浪[J]. 海洋学报, 4(5): 754-762.
CORBELLA S, STRETCH D D, 2012. Multivariate return periods of sea storms for coastal erosion risk assessment[J]. Natural Hazards and Earth System Sciences, 12(8): 2699-2708.
FAVRE A C, ADLOUNI S E, PERRAULT L, et al, 2004. Multivariate hydrological frequency analysis using Copulas[J]. Water resources research, 40(11): 1-12.
GRALER B, VAN DEN BERG M J, VANDENBERGHE S, et al, 2013. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation [J]. Hydrology and Earth System Sciences, 17: 1281-1296.
LIANG B C, GAO H J, SHAO Z X, 2019. Characteristics of global waves based on the third-generation wave model SWAN [J]. Marine Structures, 64: 35-53.
NELSON R B, 2006. An introduction to copulas (Second edition) [M]. New York: Springer., 275.

(本文编辑: 王少朋)