相互势能驻值原理与最佳振动结构设计

李　旭

(清华大学，北京)

关键词　相互势能驻值原理、振动结构、最小重量设计、变分法

Shield 和 Prager[2] 相互势能驻值原理可以看作是最小势能原理由一个载荷系到两个载荷系的推广．根据这一原理，我们可以得到使结构设计最佳的必要充分条件．

在本文中，我们将研究承受周期动载荷的线性弹性结构对于结构指定点处已知静态挠度情形的最小重量设计．我们的分析足够地概括了以前完成的大多数著作[1-5]．例如，如果动载荷的频率为零，那末，我们的问题便退化为对于静载荷的最佳设计问题[1-3]． 如果载荷只包含一单个集中载荷，我们的问题便与 Icerman[4] 研究过的问题相似．

在本文中，相互势能驻值原理被推广到了周期动载荷情形，由这个原理导出了使重量取驻值的必要充分条件．考虑了一个弹性夹层梁的例子．

一、相互势能驻值原理

Shield 和 Prager 相互势能驻值原理可以推广以包括惯性力效应．考虑一静定或超静定梁． 设 x 是沿梁轴线量度的距离． 梁的变化弯曲刚度用 $S(x)$ 表示． 每单位长度的质量用 $m(x)$ 表示．分布载荷用 $q(x)\cos\omega t$ 表示，典型集中载荷用 $Q\cos\omega t$ 表示，典型集中力偶用 $C\cos\omega t$ 表示．设 $u(x)\cos\omega t$ 是梁的挠度，梁轴转角 $\theta(x)=u'(x)$．

在我们的问题中，如下弯矩与曲率关系必须满足

$$u''=-\frac{M}{S}. \tag{1.1}$$

对于周期运动的虚功原理可以表示为

$$-\int M\bar{u}''dx=\int q\bar{u}dx+\sum Q\bar{u}+\sum C\bar{\theta}+\omega^2\int mu\bar{u}dx, \tag{1.2}$$

式中 $\bar{u}$ 和 $\bar{\theta}$ 是运动学容许的挠度和转角．

让我们考虑两个载荷系，它们是 $q\cos\omega t$，$Q\cos\omega t$，$C\cos\omega t$ 和 $\bar{q}\cos\omega t$，$\bar{Q}\cos\omega t$，$\bar{C}\cos\omega t$．由第一个载荷系引起的挠度和转角是 u 和 θ，而由第二个载荷系引起的挠度和转角是 $\bar{u}$ 和 $\bar{\theta}$．与这两个载荷系相关联的相互势能定义为如下泛函

$$U=\int Su''\bar{u}''dx-\int q\bar{u}dx-\int\bar{q}udx-\sum Q\bar{u}-\sum\bar{Q}u-\sum C\bar{\theta}-\sum\bar{C}\theta-\omega^2\int mu\bar{u}dx. \tag{1.3}$$

(1.3) 式所定义的 U 由运动学容许变分 δu 和 $\delta\bar{u}$ 引起的一次变分是

本文 1987 年 10 月 6 日收到．

$$\delta U=-\int M\delta\bar{u}''dx-\int \bar{M}\delta u''dx-\int q\delta\bar{u}dx-\int \bar{q}\delta udx-\sum Q\delta\bar{u}-\sum\bar{Q}\delta u$$
$$-\sum C\delta\bar{\theta}-\sum\bar{C}\delta\theta-\omega^2\int mu\delta\bar{u}dx-\omega^2\int m\bar{u}\delta udx, \tag{1.4}$$

式中 $\delta\theta=\delta u'$, $\delta\bar{\theta}=\delta\bar{u}'$. 由虚功原理,可以看出

$$\delta U=0. \tag{1.5}$$

U 的二次变分是

$$\delta^2U=\int S\delta u''\delta\bar{u}''dx-\omega^2\int m\delta u\delta\bar{u}dx. \tag{1.6}$$

这样,我们得到相互势能驻值原理: 在所有运动学容许的位移 u 和 $\bar{u}$ 中, u 和 $\bar{u}$ 的真实解使(1.3)式所定义的 U 值取驻值.

然而,应当指出,因为一般地说,(1.6)式右端的积分,其符号是不定的,所以我们不能断言对于 u 和 $\bar{u}$ 的真实解, U 值是极大还是极小.

二、对于给定挠度的最小重量设计

在下面,我们将应用相互势能驻值原理于周期振动梁的最小重量设计. 首先,我们必须先来求出梁中指定点处挠度与相互势能的关系. 通过虚功原理,相互势能可以写成

$$U=-\left(\int\bar{q}udx+\sum\bar{Q}u+\sum\bar{C}\theta\right). \tag{2.1}$$

如果第二个载荷系只是由作用在结构 P 点处的一单个单位力组成,那末,(2.1)式的右端便可以看成是在 P 点处在单位力方向上由第一个载荷系引起的位移. 这个位移我们用 u_P 表示. 这样,由(2.1)式,我们有

$$U=-u_P. \tag{2.2}$$

我们的结构最佳化问题是来求出 $m(x)$ 的最佳分布,使在 P 点处在已知方向上由已知载荷系引起的位移给定为 u_P, 以及结构的总质量

$$M_t=\int mdx \tag{2.3}$$

为最小. 我们的问题可以借助于变分法来分析,在这里约束条件由(2.2)式给出. 让我们定义如下一个泛函

$$\Phi=\int mdx-\frac{b^2}{k^2}(U+u_P), \tag{2.4}$$

式中 $\frac{b^2}{k^2}$ 是一个 Lagrange 乘子. 由于变分 δm, Φ 的变分是

$$\delta\Phi=\frac{b^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{b^2}\int\delta mdx-\Delta U-\delta U\right), \tag{2.5}$$

式中

$$\Delta U=\int S_{1m}u''\bar{u}''\delta mdx-\omega^2\int u\bar{u}\delta mdx \tag{2.6}$$

是直接由变分 δm 引起的 U 的变分; δU 是由于 δm 引起的运动学容许变分 δu 和 $\delta\bar{u}$ 所导致的 U 的变分. 由相互势能驻值原理,我们有

$$\delta U=0. \tag{2.7}$$

因此,使

$$\delta\Phi=0, \tag{2.8}$$

我们得到如下 Euler-Lagrange 方程

$$S_{1m}u''\bar{u}'' - \omega^2 u\bar{u} - \frac{k^2}{b^2} = 0, \tag{2.9}$$

这个方程就称为最佳条件. 它是使 M_t 取驻值的必要充分条件.

假设这梁具有夹层截面,其芯部高度为常数,因而其质量与刚度关系为[4]

$$m(x) = a^2 + b^2 S(x), \tag{2.10}$$

式中 a 和 b 是常数.

将(2.10)式代入(2.9)式,我们便可得到

$$u''\bar{u}'' - \omega^2 b^2 u\bar{u} - k^2 = 0, \tag{2.11}$$

式中 k 是常数. (2.11) 式就是文献[5]中的(3)式.

如果第一个载荷系与第二个载荷系各各相等,则 $u = \bar{u}$, 由此得出

$$u''^2 - \omega^2 b^2 u^2 - k^2 = 0. \tag{2.12}$$

这就是文献[4]中的(4.8)式.

为了解实际结构最佳化问题,除了最佳条件方程(2.9)或(2.11)外,还必须应用包括惯性力的平衡方程及边界条件.

如果 $\omega = 0$, 此情形相应于静载荷,那末,(2.11)式便退化为

$$u''\bar{u}'' = k^2. \tag{2.13}$$

这就是文献[2]中的(3.4)式.

三、举　例

考虑一长度为 l, 在分布载荷 $q(x)\cos\omega t$ 作用下的悬臂夹层梁. 要将此梁设计成在自由端挠度具有振幅 u_0 这一约束下,其重量为最小.

设在插入端 $x = 0$, 在自由端 $x = l$. $u(x)$ 的微分运动方程是[6]

$$[S(x)u''(x)]'' - \omega^2 m(x)u(x) = q(x). \tag{3.1}$$

边界条件是

$$\left.\begin{array}{l} \text{在 } x = 0:\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0, \\ \text{在 } x = l:\ S(l)u''(l) = 0,\ [S(x)u''(x)]'_{x=l} = 0. \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

挠度 $\bar{u}(x)$ 是由作用在梁 $x = l$ 处的集中载荷 $\bar{Q}$ 引起的,因此

$$[S(x)\bar{u}''(x)]'' - \omega^2 m(x)\bar{u}(x) = 0, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{在 } x = 0:\ \bar{u}(0) = 0,\ \bar{u}'(0) = 0, \\ \text{在 } x = l:\ S(l)\bar{u}''(l) = 0,\ [S(x)\bar{u}''(x)]'_{x=l} = -\bar{Q}. \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

使重量取驻值的条件是(2.11)式.

为了求出最佳设计 $S(x)$, 必须解联立方程 (2.11), (3.1) 和 (3.3) 连同它们的边界条件及约束条件 $u(l) = u_0$.

参　考　文　献

[1] Barnett, R. L., *ASCE Transactions*, 128(1963), Part I, 221.
[2] Shield, R. T. and Prager, W., *ZAMP*, 21(1970), 513.
[3] Huang, N. C., *ZAMP*, 22(1971), 608.
[4] Icerman, L. J., *Int. J. Solids Structures*, 5(1969), 473.
[5] Plaut, R. H., *Q. Appl. Math.* 29(1971), 315.
[6] Nowachi, W., *Dynamics of Elastic Systems*, Chapman & Hall, 1963.