



论 文

基于微分几何的蛇形机器人移动与操作统一动力学模型研究

王智锋^{①③*}, 马书根^{①②}, 李斌^①, 王越超^①

① 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室, 沈阳 110016

② 日本立命馆大学理工学部机器人学系, 滋贺 525-8577, 日本

③ 中国科学院研究生院, 北京 100039

* 通信作者. E-mail: zfwang@sia.cn

收稿日期: 2009-09-11; 接受日期: 2010-04-12

中国科学院知识创新工程青年人才领域前沿资助项目 (批准号: 07A1200101) 和国家高技术研究发展计划 (批准号: 2006AA04Z254) 资助项目

摘要 蛇形机器人本体是一种多关节串联机构, 可以在各种环境中运动, 并且当一端固定时可以实现操作. 本文提出一种蛇形机器人移动与操作的统一动力学建模方法, 统一蛇形机器人移动状态及操作状态的动力学方程. 机器人从移动状态到操作状态的转换意味着机构上的重构, 即移动状态无固定基座, 而操作状态有固定基座. 应用虚设机构法在机构学上统一这两种状态 (即构形空间中的嵌入关系), 利用指数积公式描述这两种状态的运动学方程. 在 Riemann 流形上建立起蛇形机器人移动和操作的统一动力学模型, 并在对动力学模型中各项计算分析的基础上发现机器人操作动力学方程可直接由移动动力学方程退化得到, 同时应用子流形的 Gauss 公式给出证明. 由此在微分几何框架下建立蛇形机器人移动与操作的统一动力学模型. 按照几何的观点将蛇形机器人移动与操作动力学模型的统一看作是子流形问题, 并赋予几何意义. 较单独针对蛇形机器人的一种状态 (移动或操作) 的动力学模型而言, 这种统一的动力学模型能够更深刻地揭示蛇形机器人动力学的特征.

关键词 蛇形机器人 动力学 统一模型 微分几何 移动 操作

1 引言

通过模仿生物蛇而设计的蛇形机器人本体是一无固定基座的多关节串联机构. 相比于其他类型的移动机器人 (如轮式、腿式等) 蛇形机器人具有更好的环境适应能力, 如穿行于狭窄的空间或适应不同的地形等. 当蛇形机器人一端固定于基座时, 机器人的机构和功能便发生了本质的变化, 此时机器人变为冗余自由度机械臂 (或蛇形机械臂), 可实现操作功能. 把蛇形机器人的移动和操作功能组合起来可使其应用于更多的领域, 如灾难现场的搜索和营救、工业环境的检查和维修、星球探测与采样等^[1].

蛇形机器人移动时无固定基座、与环境交互等特点使得移动动力学过程变得非常复杂, 即运动的同一时刻同时存在着逆动力学过程与正动力学过程. 国内外许多学者对蛇形机器人移动动力学进行了深入的研究. Hirose^[1] 基于大量的生物蛇实验推导出了蜿蜒运动轨迹曲线 (Serpensoid 曲线) 用于

蛇形机器人的运动控制. Ma 和 Saito 等^[2,3]应用 Newton-Euler 方程建立起了考虑环境摩擦作用的封闭形式的蛇形机器人移动动力学模型, 其中 Ma^[2]侧重于研究运动参数与环境参数对动力学的影响, 而 Saito 等^[3]把移动动力学模型解耦为形状运动和惯性移动. Liljebäck 等^[4]提出应用虚设的机构 (virtual structure for orientation and position, VSOP) 将蛇形机器人等效为机械臂进行建模研究, Transeth 等^[5]基于 VSOP 与 Euler-Lagrange 方程建立了移动动力学方程并进行了解耦. Zhao 等^[6]基于虚设机构法与影响系数法提出了一种蛇形机器人移动动力学建模方法, 并研究了动力学的耦合特征. 另外, 非完整约束^[7]、几何力学^[8]、非光滑动力学^[9]等也都被应用于蛇形机器人移动动力学建模中. 相对于移动动力学, 蛇形机器人操作动力学可以参照冗余度机械臂动力学获得. Andersson^[10]基于指数积公式 (product-of-exponentials formula, POE) 研究了用蛇形机器人本体实现连续曲线的离散化拟合, 其实是一个冗余度机械臂的逆运动学问题. 现有蛇形机器人动力学模型的研究都没有把移动和操作两种状态进行统一考虑和比较, 都是分别建模进行研究. 缺少对两种动力学状态的比较与统一研究, 必然不利于对蛇形机器人复杂动力学的深刻理解.

蛇形机器人从移动状态到操作状态的转换对应着机构上的重构 (即联接于固定的基座), 但移动状态与操作状态还都是多关节串联机构. 这种机构上的相似必然导致构形空间描述形式上的相似, 进一步使得两种状态在构形空间上的动力学方程也将存在某种关系. 有了以上移动与操作动力学比较的基础, 当蛇形机器人移动动力学很复杂模型特征很难把握时, 自然希望通过与相对简单的操作臂动力学模型进行比较, 以获得关于蛇形机器人动力学模型的更多深入信息.

基于以上的原因, 本文尝试对蛇形机器人移动与操作进行统一的动力学建模并对模型进行比较研究. 借鉴 Liljebäck 和 Zhao 等的虚设机构法^[4,6]统一移动和操作的机构模型; 应用指数积公式描述统一的运动学方程, 因为指数积公式适合于描述重构过程的运动学; Riemann 流形上建立动力学方程赋予统一动力学模型几何意义, 把动力学建模转化为几何运算, 并且把移动与操作统一动力学模型问题归结为子流形问题. 基于微分几何的方法通过类比移动动力学与操作动力学建立统一的动力学模型具有以下特点: 1) 提供一个统一的视角理解链式机构移动状态与操作状态的力学模型, 2) 赋予蛇形机器人统一动力学模型以几何意义简化问题的描述, 3) 揭示蛇形机器人动力学模型特殊的结构信息.

2 蛇形机器人运动学

2.1 构形分析

蛇形机器人由多个模块串联铰接而成, 二维蛇形机器人每个关节对应一个自由度. 本文仅对二维蛇形机器人移动与操作的统一动力学模型进行研究, 但基本运动学及动力学公式建立于 $SE(3)$ 空间, 一方面为了使用指数积公式方便, 另一方面为下一步研究提供一个更一般的三维动力学模型框架.

蛇形机器人无固定基座时可以移动, 当到达操作对象附近时可以固定尾部作为基座并实现操作. 机器人移动时的构形空间 Q 可以分解为代表外部位姿的纤维空间 G 和代表内部形状的基空间 N , 即 $Q = G \times N$. 蛇形机器人的构形坐标表示为 $\mathbf{x} = [x^1, x^2, \dots, x^n]^T \in Q$, 其中电机控制相对关节角度 $([x^4, \dots, x^n]^T \in N)$ 使得机器人在平面内移动和转动 $([x^1, x^2, x^3]^T \in G)$. 当蛇形机器人操作时机器人尾部固定, 不产生位姿变化只有身体形状的变换, 此时的构形空间 Q' 是 Q 的子空间 (即 $Q' \subset Q$), 构形坐标为 $\mathbf{x}' = [0, 0, 0, x^4, \dots, x^n]^T \in Q'$. 当蛇形机器人一端固定时, 可以看作是冗余度机械臂, 其构形空间就是关节空间 (即机器人移动的基空间 N), 坐标表示为 $\mathbf{x}'' = [x^4, \dots, x^n]^T \in N$. 应用虚设机构法^[4,6]把蛇形机器人在惯性坐标系中相对于 X 和 Y 方向的移动及绕 Z 方向的转动等效为虚拟的关

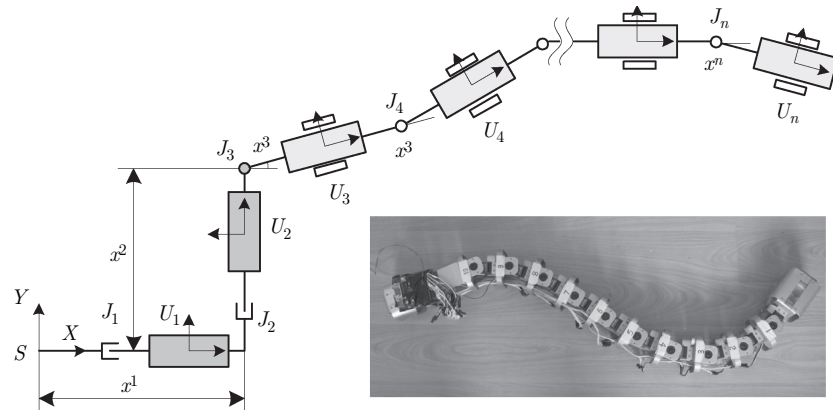


图 1 蛇形机器人机构模型

Figure 1 Mechanism of the snake-like robot

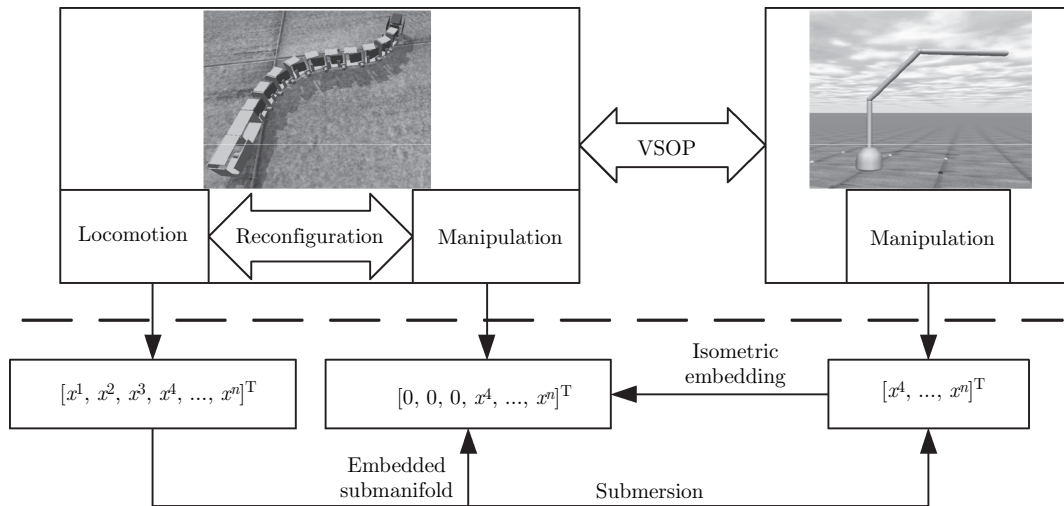


图 2 蛇形机器人构形的几何关系

Figure 2 Mathematical relationships of the configurations

节运动, 如图 1 所示. 在机构上把蛇形机器人 (移动状态与操作状态) 等效为冗余度机械臂, 相应地在构形上把原来描述蛇形机器人构形的纤维丛看作是普通的构形流形. 蛇形机器人的各种构形表示具有如下几何关系:

$$\alpha : N \rightarrow Q', \quad \beta : N \rightarrow Q,$$

其中 α 和 β 分别是嵌入和浸入映射, N 和 Q' 是拓扑同胚的, 如图 2 所示.

2.2 运动学分析

如图 1, 蛇形机器人所处的全局惯性坐标系为 S , 机器人虚设单元为 U_1 和 U_2 , 长度 L_1 和 L_2 都为零, 实际单元为 U_i ($i = 3, \dots, n$), 长度为 L_i ($i = 3, \dots, n$), 在蛇形机器人每个单元 (包括虚设单元) 几何中心处建立局部单元坐标系, 虚设的关节包括两个移动关节 J_1 和 J_2 及一个转动关节 J_3 , 实际转动关节为 J_i ($i = 4, \dots, n$). 设初始时刻所有关节控制量为零, 则蛇形机器人尾部 (即关节 J_3) 与全局

式中 Ad —Lie 群的伴随表示. 通过计算

$$e^{-\hat{\xi}_2 x^2} \hat{\xi}_1 e^{\hat{\xi}_2 x^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可知 $\xi_{i,j}$ 与 x^1 、 x^2 无关. 结合式 (3) 知, $\xi_{i,j}$ 只依赖于 $(x^l, \dots, x^i)$, 其中 $l = \max\{j+1, 3\}$.

与刚体速度相对应, 蛇形机器人第 i 个模块相对于全局坐标系的速度在全局坐标系中的描述 $V_{S,i}^S$ 称为空间速度^[11,12], 可以表示为

$$V_{S,i}^S = J_{S,i}^S(x) \dot{x}, \quad (4)$$

式中 $J_{S,i}^S(x)$ — $6 \times n$ 的空间操作 Jacobian 矩阵, 即 $J_{S,i}^S(x) = [\xi_{S,1}(x), \dots, \xi_{S,i}(x), 0, \dots, 0]$, 其中第 j 列为

$$\xi_{S,j} = \text{Ad}_{\exp(\hat{\xi}_1 x^1) \dots \exp(\hat{\xi}_{j-1} x^{j-1})} \xi_j. \quad (5)$$

值得注意的是 $V_{S,i}^S$ 的线速度分量并不表示蛇形机器人模块坐标系原点 (模块几何中心) 的线速度, 而是机器人模块坐标系中与全局坐标系原点瞬时重合的那一点的速度. 可以通过下面的公式计算蛇形机器人模块坐标系原点在全局坐标系中的速度

$$\dot{\tilde{b}}_{S,i} = \dot{g}_{S,i} e_4^T = \sum_{j=1}^n \hat{\xi}_{S,j} g_{S,i} e_4^T \dot{x}^j, \quad (6)$$

式中 $\tilde{b}_{S,i}$ —位置的齐次坐标, 即 $\tilde{b}_{S,i} = [\tilde{b}_{S,i}^T, 1]^T$; e_4 —单位向量, $e_4 = [0, 0, 0, 1]^T$. 由式 (1) 和 (5) 可知, 当蛇形机器人尾部固定于基座时, 可以直接去除式 (6) 中的 $e^{\hat{\xi}_1 x^1} e^{\hat{\xi}_2 x^2} e^{\hat{\xi}_3 x^3}$ 项而不影响速度表达式的正确性. 把这一特性看作是移动与操作在速度层面上的统一关系.

3 蛇形机器人动力学

在这一部分中将使用基本的微分几何概念建立蛇形机器人移动与操作的动力学方程. 构形流形上的动力学方程可以写为如下形式^[12,13]:

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = -\text{grad}V(x) + M^{-1}Y, \quad (7)$$

式中 M —Riemann 度量矩阵; ∇ —Levi-Civita 联络; V —重力势能函数; Y —构形空间上广义力. 式 (7) 是 Lagrange 动力学方程在 Riemann 流形上的等效形式. 等号右边各项与重力、摩擦力及驱动力有关, 左边项与构形空间的几何特性有关, 当右边各项为零时, 左边项代表构形空间中的测地线. 值得注意的是: 1) 本文只建立二维蛇形机器人的动力学, 把移动和操作都限制在同一水平面内, 所以有 $V(x) \equiv 0$; 2) 上式等号右边第二项更严格的定义需要引入“井号映射”的概念^[13], 此处作了简化处理; 3) 本文构形空间中的广义力都被视作为列向量. 下面就蛇形机器人动力学方程中各部分分别进行解释和计算.

3.1 Riemann 度量

构形空间的 Riemann 度量通过系统的动能定义, 决定了构形空间的几何性质. 首先定义第 i 个模块在局部坐标系中的广义惯性矩阵为

$$\mathbf{M}_i^b = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_i \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

式中 $\mathbf{I}_i^b$ —第 i 个模块的惯性张量; m_i —第 i 个模块的质量; $\mathbf{E}$ — 3×3 的单位矩阵. 根据虚设机构的定义^[4,6], 虚拟的关节和模块没有质量和惯性, 也不产生任何的力和力矩作用, 所以 $\mathbf{M}_1^b = \mathbf{M}_2^b = \mathbf{0}_{6 \times 6}$. 第 i 个模块的动能为

$$T_i = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{S,i}^b)^T \mathbf{M}_i^b \mathbf{V}_{S,i}^b = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}))^T \mathbf{M}_i^b \mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}, \quad (8)$$

则整个系统的动能为

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}))^T \mathbf{M}_i^b \mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}) \right\} \dot{\mathbf{x}}. \quad (9)$$

此时 Riemann 度量不仅是 $n \times n$ 的矩阵而且是 $T_2^0(Q)$ 型的张量, 可以写成

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}))^T \mathbf{M}_i^b \mathbf{J}_{S,i}^b(\mathbf{x}). \quad (10)$$

该度量可以看成是整个系统的惯性矩阵. 度量矩阵 $\mathbf{M}$ 的元素 M_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) 可以写成

$$M_{ij} = \sum_{k \geq \max\{i,j\}}^n \boldsymbol{\xi}_{k,i}^T \mathbf{M}_k^b \boldsymbol{\xi}_{k,j}. \quad (11)$$

已知 $\boldsymbol{\xi}_{k,i}$ 只依赖于 $(x^l, \dots, x^k)$ 其中 $l = \max\{i+1, 3\}$, 及 $\boldsymbol{\xi}_{k,j}$ 只依赖于 $(x^l, \dots, x^k)$ 其中 $l = \max\{j+1, 3\}$, 所以 M_{ij} 是 $(x^l, \dots, x^n)$ 的函数, 其中 $l = \min\{\max\{i+1, 3\}, \max\{j+1, 3\}\}$.

根据以上的分析得到关于蛇形机器人动力学模型的 Riemann 度量的结论如下.

结论 3.1.1 度量矩阵 $\mathbf{M}$ 的部分元素值 (M_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$) 如附录 A 表 A1 所示; $\mathbf{M}$ 是一个正定对称阵, 所以借鉴机械臂模型等效的蛇形机器人的构形空间 $(Q, \mathbf{M})$ 是一个 Riemann 流形.

结论 3.1.2 M_{ij} 仅与 x^k 有关, 其中 $k \geq \min\{\max\{i+1, 3\}, \max\{j+1, 3\}\}$. 也就是说, M_{ij} 必然与 x^1, x^2 无关; 当 $i, j \geq 4$ 时, M_{ij} 与 x^1, x^2 及 x^3 无关.

3.2 Levi-Civita 联络

符号 ∇ 表示构形流形切空间上对应于度量 $\mathbf{M}$ 的 Levi-Civita 联络, $\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}$ 为协变导数, 代表 $\dot{\mathbf{x}}$ 沿 $\dot{\mathbf{x}}$ 求方向导数, 计算如下:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \left(\dot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (12)$$

式中 Γ_{jk}^i —第二类 Christoffel 符号. 相应地 Γ_{jkl} 被称为第一类 Christoffel 符号, 两者之间的关系式为

$$\Gamma_{jkl} = \sum_{i=1}^n M_{li} \Gamma_{jk}^i. \quad (13)$$

其中第一类 Christoffel 符号通过度量矩阵定义为

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (14)$$

并且有 $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$. 由结论 3.1.2, $\frac{\partial M_{kj}}{\partial x^i} = 0$, 当 $3 \leq j \leq n, 3 \leq k \leq n$ 时, $\frac{\partial M_{k1}}{\partial x^j} = \frac{\partial M_{1j}}{\partial x^k}$ (详见附录 A), 所以此时 $\Gamma_{1jk} = 0$; 另外当 $1 \leq j \leq 2$ (或 $1 \leq k \leq 2$) 时, 由 $M_{1:2 \times 1:2}$ 为常数矩阵 (见附录表 A1) 及结论 3.1.2 知, 此时 $\Gamma_{1jk} = 0$. 同理 $\Gamma_{2jk} = 0$. 所以当 $i = 1, 2$ (或 $j = 1, 2$) 时, $\Gamma_{ijk} = 0$. 第一类 Christoffel 符号定义式 (14) 适用于分析而不适用于程序计算, 因为该式中包含偏导数符号运算. Park 等基于 Lie 代数方法给出了机械臂动力学的第一类 Christoffel 符号程序迭代计算公式^[14], 修改整理如下:

- 当 $k \leq i \leq j$ 时,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{l=j}^n \left\{ (\text{Ad}_l^i(\text{ad}_{\hat{\xi}_{i-1,k}} \hat{\xi}_i))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,j} + (\text{Ad}_l^j(\text{ad}_{\hat{\xi}_{j-1,k}} \hat{\xi}_j))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,i} \right. \\ \left. + (\text{Ad}_l^j(\text{ad}_{\hat{\xi}_{j-1,i}} \hat{\xi}_j))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,k} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

- 当 $i < k \leq j$ 时,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{l=j}^n \left\{ (\text{Ad}_l^j(\text{ad}_{\hat{\xi}_{j-1,k}} \hat{\xi}_j))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,i} + (\text{Ad}_l^j(\text{ad}_{\hat{\xi}_{j-1,i}} \hat{\xi}_j))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,k} \right. \\ \left. - (\text{Ad}_l^k(\text{ad}_{\hat{\xi}_{k-1,i}} \hat{\xi}_k))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,j} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

- 当 $i \leq j < k$ 时,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{l=k}^n \left\{ (\text{Ad}_l^j(\text{ad}_{\hat{\xi}_{j-1,i}} \hat{\xi}_j))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,k} - (\text{Ad}_l^k(\text{ad}_{\hat{\xi}_{k-1,i}} \hat{\xi}_k))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,j} \right. \\ \left. - (\text{Ad}_l^k(\text{ad}_{\hat{\xi}_{k-1,j}} \hat{\xi}_k))^{\vee T} M_l^b \xi_{l,i} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 ad — 伴随表示; $[\cdot]^{\vee T} = ([\cdot]^{\vee})^T$; 运算符 Ad_j^i 的定义如下.

定义^[14] 设 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \in \mathfrak{se}(3)$, $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$, 则定义映射 $\text{Ad}_j^i : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$ 为

$$\text{Ad}_j^i(\mathbf{H}) = \begin{cases} e^{-\mathbf{A}_j x^j} \dots e^{-\mathbf{A}_i x^i} \mathbf{H} e^{\mathbf{A}_i x^i} \dots e^{\mathbf{A}_j x^j}, & i \leq j, \\ \mathbf{H}, & i > j. \end{cases}$$

通过分析计算得到关于蛇形机器人动力学方程的第一类 Christoffel 符号的结论如下:

结论 3.2.1 当 $i, j, k = 1, 2, 3$ 时, Γ_{ijk} 的计算值如附录 B 中表 B1 所示; 当 $i = 1, 2$ (或 $j = 1, 2$) 时, $\Gamma_{ijk} = 0$.

结论 3.2.2 根据结论 3.1.2 和式 (14) 可知, Γ_{ijk} 与 x^l 无关, 其中 $l \leq \min\{\max\{i, 2\}, \max\{j, 2\}, \max\{k, 2\}\}$.

结论 3.2.3 由结论 3.2.1 和 3.2.2 知, 当 $k \geq 4$ 时, Γ_{ijk} 与 x^1, x^2 及 x^3 无关.

3.3 广义力

蛇形机器人构形空间上的广义力 $\mathbf{Y}$ ($[Y_1, \dots, Y_n]^T$) 包括由关节力矩引起的广义力 ${}^\tau\mathbf{Y}$ ($[{}^\tau Y_1, \dots, {}^\tau Y_n]^T$) 和机器人与环境的相互摩擦作用引起的广义力 ${}^f\mathbf{Y}$ ($[{}^f Y_1, \dots, {}^f Y_n]^T$) 两部分, 即 $\mathbf{Y} = {}^\tau\mathbf{Y} + {}^f\mathbf{Y}$. 蛇形机器人每一模块上所受力/力矩组合用力旋量的概念进行描述^[11], 为 $se^*(3)$ 空间上的元素. 可以使用扩展前向运动学映射 κ 的拉回映射把 Cartesian 空间中机器人各模块上的力/力矩组合 $\mathbf{W}$ ($[\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n]^T$) 映射到构形空间中的广义力 $\mathbf{Y}$, 即

$$\begin{aligned}\kappa^* : se^{n*}(3) &\rightarrow T^*Q \\ \mathbf{W} &\mapsto \mathbf{Y}.\end{aligned}$$

已知 x^i 为构形空间 Q 的第 i 个坐标, 则 dx^i 为广义力空间 T^*Q 中的第 i 个基; 设 $\mathbf{y}^i = \mathbf{g}_{S,i}$ 为 Cartesian 空间 $SE^n(3)$ 的第 i 个坐标, 则 $d\mathbf{y}^i$ 是力旋量空间 $se^{n*}(3)$ 中的第 i 个基. 应用坐标系下余切映射 κ^* 的表达式获得广义力的计算公式如下:

$$\mathbf{Y} = \kappa^* \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i d\mathbf{y}^i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i \frac{\partial \mathbf{g}_{S,i}}{\partial x^j} \Big|_{SE(3)} \right) dx^j, \quad (18)$$

其中 $\frac{\partial \mathbf{g}_{S,i}}{\partial x^j} \Big|_{SE(3)}$ 为 $SE(3)$ 空间中的偏导运算, 由于 $SE(3)$ 空间特性决定了其与一般的 $\mathbb{R}^n$ 空间中的偏导不同. 本文计算时把该表达式分解为 $\frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^j} \Big|_{\mathbb{R}^3}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{R}_{S,i}}{\partial x^j} \Big|_{SO(3)} = \frac{\partial \mathbf{R}_{S,i}}{\partial x^j} \mathbf{R}_{S,i}^{-1}$ 两部分分别进行计算.

根据式 (18) 分别计算关节力矩对应广义力和摩擦力对应广义力. 则由关节力矩引起的作用于关节相对角度变量 x^j 上的广义力分量为

$${}^\tau Y_j = \begin{cases} \tau_j, & j \geq 4, \\ 0, & j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (19)$$

式中 τ_j —第 j 个关节的关节力矩. 另外由摩擦力引起的作用于 x^j 上的广义力分量为

$${}^f Y_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^j}. \quad (20)$$

式中 $\mathbf{f}_i$ —第 i 个模块所受摩擦力的合力. 因为虚设机构的缘故, 有 $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$. 另外由计算可知

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{S,i}}{\partial x^j} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{S,j} \tilde{\mathbf{b}}_{S,i}, & i \geq j, \\ \mathbf{0}, & i < j. \end{cases} \quad (21)$$

通过分析计算得到如下关于广义力的结论.

结论 3.3.1 $\frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^j}$ 的计算结果如附录 C 中表 C1 所示.

结论 3.3.2 根据附录 C 表 C1 及式 (20), (21) 知, 当 $i < j$ 时, ${}^f Y_j$ 与 $\mathbf{f}_i$ 无关.

3.4 移动与操作动力学

根据以上的分析与计算, 将式 (7) 两边同乘以 $\mathbf{M}$, 整理蛇形机器人移动与操作动力学方程如下:

$$\sum_{j=1}^n M_{kj} \ddot{x}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j - {}^f Y_k = \tau_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (22)$$

与机械臂动力学方程类似, 上式左边第一项为惯性力项, 第二项为科氏力与离心力项, 第三项为机器人与环境的摩擦力项, 等号右边为驱动力矩项. 由此把蛇形机器人移动与操作的动力学方程统一于经典的机械臂动力学形式. 这一节主要获得了动力学方程式 (22) 及各项的计算公式, 并在建模过程中获得了七条结论, 即结论 3.1.1-3.3.2. 本文下一部分主要基于动力学方程与各结论分析移动与操作动力学方程的统一关系. 需要注意的是对移动动力学与操作动力学的分析基于如下的前提条件: 1) 机器人由已知的关节相对角度 $x^i (i = 4, \dots, n)$ 进行控制; 2) 机器人移动与操作时与环境的交互采用相同的基于速度的摩擦力模型描述.

4 移动与操作统一动力学

4.1 移动动力学

许多学者 (如 Saito 等 [3], Transeth 等 [5], Zhao 等 [6]) 在研究蛇形机器人动力学模型时, 把机器人移动动力学模型按行分解为两部分. 这种分解之所以可行是由蛇形机器人移动时的欠驱动特性决定的. 按照几何力学的观点, 把蛇形机器人移动时的构形空间看作是纤维丛, 这种按行分解对应于基空间中运动与纤维空间中运动的分解, 两者关系用水平提升描述 [8]. 这一部分借鉴这种按行分解的方法并借助子流形等几何观点来研究蛇形机器人移动与操作动力学模型的统一关系. 通过行的分解可以把蛇形机器人动力学方程式 (22) 分解为两部分:

• 移动方程 1-3

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 M_{kj} \ddot{x}^j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j - {}^f Y_k \\ & + \left(\sum_{j=4}^n M_{kj} \ddot{x}^j + \sum_{i=4}^n \sum_{j=4}^n \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=4}^n \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (23)$$

• 移动方程 4-n

$$\sum_{j=1}^n M_{kj} \ddot{x}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j - {}^f Y_k = \tau_k \quad (k = 4, \dots, n). \quad (24)$$

式 (23) 描述相对关节角度及相应角速度角加速度已知情况下, 机器人在全局坐标系下的移动. $\mathbf{M}_{1:3 \times 1:3}$ 由附录 A 中表 A1 给出, 在关节角度确定的条件下 M_{13} 和 M_{23} 只与未知量 x^3 有关, M_{33} 为已知量. 由结论 3.1.2 知 $\mathbf{M}_{1:3 \times 4:n}$ 与 x^1, x^2 无关, 而依赖于 $(x^3, x^4, \dots, x^n)$, 所以 $\mathbf{M}_{1:3 \times 4:n}$ 仅是 x^3 的函数矩阵. 类似地根据结论 3.2.2, $\Gamma_{ijk} (k = 1, 2, 3)$ 是 x^3 的函数. 特别地, 由结论 3.2.1 知, 当 $i = 1, 2$ (或 $j = 1, 2$) 时 $\Gamma_{ijk} = 0, \Gamma_{333} = 0$. 摩擦力项 ${}^f Y_k (k = 1, 2, 3)$ 依赖于 $x^i, \dot{x}^i (i = 1, 2, 3)$. 根据以上的分析, 式 (23) 可以重新整理为

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=3}^n m_i & 0 & M_{13}(x^3) \\ 0 & \sum_{i=3}^n m_i & M_{23}(x^3) \\ M_{13}(x^3) & M_{23}(x^3) & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \\ \ddot{x}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{331}(x^3) \\ \Gamma_{332}(x^3) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}^3 \dot{x}^3$$

$$- \begin{bmatrix} fY_1(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, x^1, x^2, x^3) \\ fY_2(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, x^1, x^2, x^3) \\ fY_3(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, x^1, x^2, x^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^cF_1(\dot{x}^3, x^3) \\ {}^cF_2(\dot{x}^3, x^3) \\ {}^cF_3(\dot{x}^3, x^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

需要指出的是式 (25) 等号左边第 4 项代表式 (23) 中等号左边括号中各项, 包含作用于 (x^1, x^2, x^3) 上的耦合惯性力、科氏力和离心力. 式 (23) 或 (25) 由整个机器人系统在惯性坐标系中沿 X 和 Y 方向的力平衡方程, 与绕 Z 方向的力矩平衡方程组成. 由于 $|\mathbf{M}_{1:3 \times 1:3}| \neq 0$, 式 (23) 或 (25) 为关于 (x^1, x^2, x^3) 的二阶常微分方程组.

把式 (23) 称为蛇形机器人移动的外部动力学, 式 (24) 称为移动的内部动力学. 在外部动力学中已知虚设关节力矩 $\tau_1, \tau_2, \tau_3 = 0$ 计算蛇形机器人在惯性坐标系中的加速度 $(\ddot{x}^1, \ddot{x}^2, \ddot{x}^3)$, 是一个正动力学问题, 外部动力学决定蛇形机器人的移动特性. 相应地内部动力学中把运动形状作为输入求解所需力矩 τ_k ($k = 4, \dots, n$) 是逆动力学问题. 内部动力学描述蛇形机器人移动过程中的运动形状和关节力矩之间的关系. 在蛇形机器人移动过程中内部动力学与外部动力学同时存在并相互作用.

4.2 操作动力学

蛇形机器人通过一端固定于基座, 利用具有冗余自由度的身体作为机械臂进行操作. 机器人操作动力学仅由内部动力学组成, 这是因为操作中机器人的基座不移动. 一般情况下, 蛇形机器人操作动力学 (或相应的操作臂动力学) 可通过在动力学方程 (22) 基础上增加运动约束 $x^1, x^2, x^3 = 0$ 来获得, 这种方法需要重新计算动力学方程在约束条件下的每一项. 通过这种方法联系蛇形机器人的移动动力学与操作动力学是建立在计算的基础上, 而不是对蛇形机器人动力学模型进行分析的基础上, 所以不能揭示移动与操作动力学的统一关系. 考虑到上文已获得的关于蛇形机器人动力学模型的各项结论, 可以直接由移动动力学方程退化得到操作动力学方程, 而除了摩擦力以外不需要重算动力学方程的每一项, 以此实现移动与操作动力学的统一.

由结论 3.1.2 知, $\mathbf{M}_{4:n \times 4:n}$ 不依赖于 (x^1, x^2, x^3) , 即 (x^1, x^2, x^3) 的任何改变甚至删除其定义都不影响 $\mathbf{M}_{4:n \times 4:n}$ 的值. 类似地, 由结论 3.2.3 可知, Γ_{ijk} ($k \geq 4$) 与 (x^1, x^2, x^3) 无关. 由此可直接根据移动动力学方程写出操作动力学方程:

• 操作方程 1-3

$$\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

• 操作方程 4-n

$$\sum_{j=4}^n M_{kj} \ddot{x}^j + \sum_{i=4}^n \sum_{j=4}^n \Gamma_{ijk} \dot{x}^i \dot{x}^j - {}^fY'_k = \tau_k \quad (k = 4, \dots, n), \quad (27)$$

式中 ${}^fY'_k$ —操作状态下摩擦力的广义力分量. 式 (26) 表示蛇形机器人固定于基座, 自然地猜想式 (27) 表示蛇形机械臂的动力学方程, 下面给出证明.

证明 根据第 2.1 小节中构形的定义, 操作状态下蛇形机器人的构形为 $\mathbf{x}' \in Q'$, 相应的操作臂构形为 $\mathbf{x}'' \in N$, 并已定义了一个嵌入映射

$$\begin{aligned} \alpha: \quad N &\rightarrow Q' \\ [x^4, \dots, x^n]^T &\mapsto [0, 0, 0, x^4, \dots, x^n]^T, \end{aligned}$$

映射 α 显然是等距的. 根据子流形的 Gauss 公式有

$$\nabla'_{\dot{\mathbf{x}}'} \dot{\mathbf{x}}'|_{\alpha(N)} = \nabla''_{\dot{\mathbf{x}}''} \dot{\mathbf{x}}'' + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{x}}'', \dot{\mathbf{x}}''), \quad (28)$$

其中 ∇' 和 ∇'' 分别是构形空间 Q' 和 N 上的 Levi-Civita 联络, $\mathbf{B}(\dot{\mathbf{x}}'', \dot{\mathbf{x}}'') \in T^\perp N$ 并且 $T^\perp N$ 是 N 在 TQ' 上的法丛. 因为机器人尾端固定, 所以 N 在任一点 $\mathbf{x}''$ 上法空间为零, 即 $T_{\mathbf{x}''}^\perp N = \mathbf{0}$. 由此得到

$$\nabla'_{\dot{\mathbf{x}}'} \dot{\mathbf{x}}'|_{\alpha(N)} = \nabla''_{\dot{\mathbf{x}}''} \dot{\mathbf{x}}''. \quad (29)$$

式 (29) 说明了式 (27) 中对应的惯性力项、科氏力和离心力项与操作臂动力学方程中的对应各项相等. 另外可由式 (19) 知, 关节力矩在移动状态与操作状态 (操作臂) 下的形式不会改变. 比较构形空间上动力学方程的一般表达式 (7) 可知, 式 (27) 即为蛇形机械臂的动力学模型.

对应于移动动力学退化到操作动力学这一过程, 几何上由蛇形机器人构形空间 Q 上的度量张量 $\mathbf{M}$ 诱导得到机械臂构形空间 N 上的度量张量 $\mathbf{M}_A$. 已定义了浸入映射

$$\begin{aligned} \beta: N &\rightarrow Q \\ [x^4, \dots, x^n]^T &\mapsto [x^1, x^2, \dots, x^n]^T, \end{aligned}$$

则其切映射在局部坐标中的表示为 $\beta_* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times (n-3)} \\ \mathbf{E}_{(n-3) \times (n-3)} \end{bmatrix}$. 根据协变张量的拉回映射, $\mathbf{M}_A$ 的坐标表示为

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-3) \times 3} & \mathbf{E}_{(n-3) \times (n-3)} \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times (n-3)} \\ \mathbf{E}_{(n-3) \times (n-3)} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

所以操作臂的度量矩阵 (或度量张量) 是蛇形机器人度量矩阵的子矩阵. 正是度量矩阵间的诱导关系及第一类 Christoffel 符号的特性 (结论 3.2.1-3.2.3) 使得动力学方程的统一能够实现.

4.3 统一动力学分析

需要说明的是, 摩擦力表示蛇形机器人与环境的交互作用, $\mathbf{f}_i$ 大小与方向由机器人的构形与速度决定, 当环境比较复杂时摩擦力公式会变得很复杂, 一般不能进行统一地描述也不具有统一性质. 但根据结论 3.3.2 及第 2 节中提及的速度层面上的统一可知, 操作状态下的摩擦力对应的广义力分量 ${}^f Y'_k$ ($k = 4, \dots, n$) 可以简单计算得到, 即 ${}^f Y'_k = {}^f Y_k(x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = 0)$.

本文主要分析机器人在水平面内移动与操作动力学的统一关系, 上面的分析中没有考虑重力作用. 为了分析的完整性, 下面简要分析重力对动力学统一关系的影响. 蛇形机器人重力势能可以写成

$$V(\mathbf{x}) = - \sum_{i=3}^n (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{b}_{S,i}), \quad (31)$$

式中 $\mathbf{G}_i$ 为机器人第 i 个单元所受重力, 为常数向量. 由 Riemann 流形中梯度的定义可知

$$\text{grad} V(\mathbf{x}) = -M^{jk} \sum_{i=3}^n \left(\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (32)$$

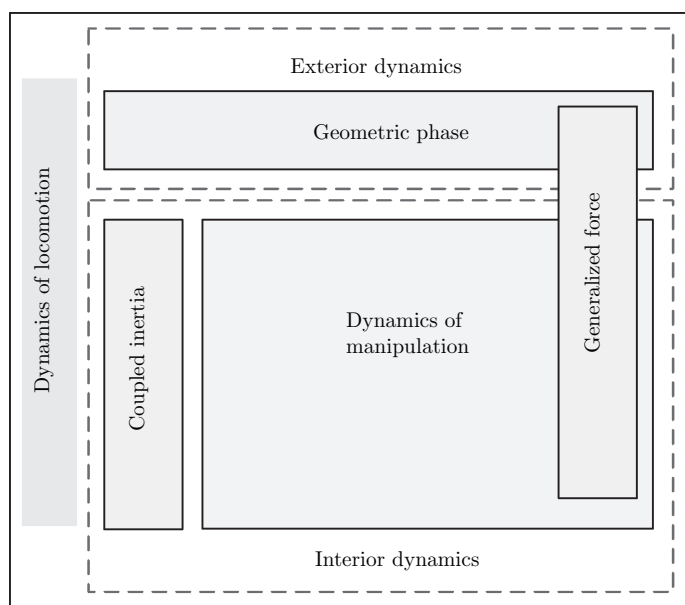


图 4 蛇形机器人移动与操作的动力学统一关系

Figure 4 Dynamic unified relationship of the snake-like robot between locomotion and manipulation

其中 M^{jk} 为 $\mathbf{M}^{-1}$ 的矩阵元素. 文中第 3 节通过将构形空间上一般动力学公式 (7) 两边同乘以度量矩阵 $\mathbf{M}$ 获得了坐标形式的蛇形机器人动力学方程 (22), 相应地重力在式 (22) 中的作用将变为

$${}^G Y_k = \sum_{i=3}^n \left(\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^k} \right) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (33)$$

又由式 (21) 可知, 上式的统一性可归结为 $\mathbf{b}_{S,i}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_{S,k}$ 的统一性. 由第 2 节中构形及速度的统一性 (式 (1) 和 (5)) 知, ${}^G Y_k$ 在移动与操作状态下可以统一描述. 重力作用之所以可以统一是因为重力相对于两种状态是不变的. 另外本文未考虑机器人与被操作物之间的操作力, 这是因为操作力因具体操作任务而变, 不是移动与操作统一模型研究的重点.

蛇形机器人移动动力学包括外部动力学和内部动力学, 当一端固定操作时, 外部动力学退化为零, 内部动力学直接转化成操作臂动力学. 由此实现了蛇形机器人移动与操作动力学的统一. 统一动力学模型也揭示蛇形机器人动力学特殊的结构信息, 如图 4 所示. 之所以能够建立并分析蛇形机器人移动与操作的统一动力学模型, 一方面是因为把蛇形机器人移动与操作两种状态在机构学、运动学与动力学上进行了全面的比较与统一描述; 另一方面是因为采用了几何方法把动力学建模问题转化为几何计算, 进一步把蛇形机器人与操作臂的类比与统一归结为子流形问题, 移动与操作动力学之间的几何关系可以采用诱导联络来描述, 如式 (28).

5 动力学数值仿真

这一部分对蛇形机器人的移动和操作统一动力学模型进行仿真研究. 统一动力学模型适用于有被动轮及无被动轮的蛇形机器人, 仿真中机器人具有被动轮是为了简化处理. 蛇形机器人与环境的交互作用采用库仑摩擦力模型描述. 为了方便结果比较, 移动与操作都基于 Serpenoid 曲线^[1] 进行控制,

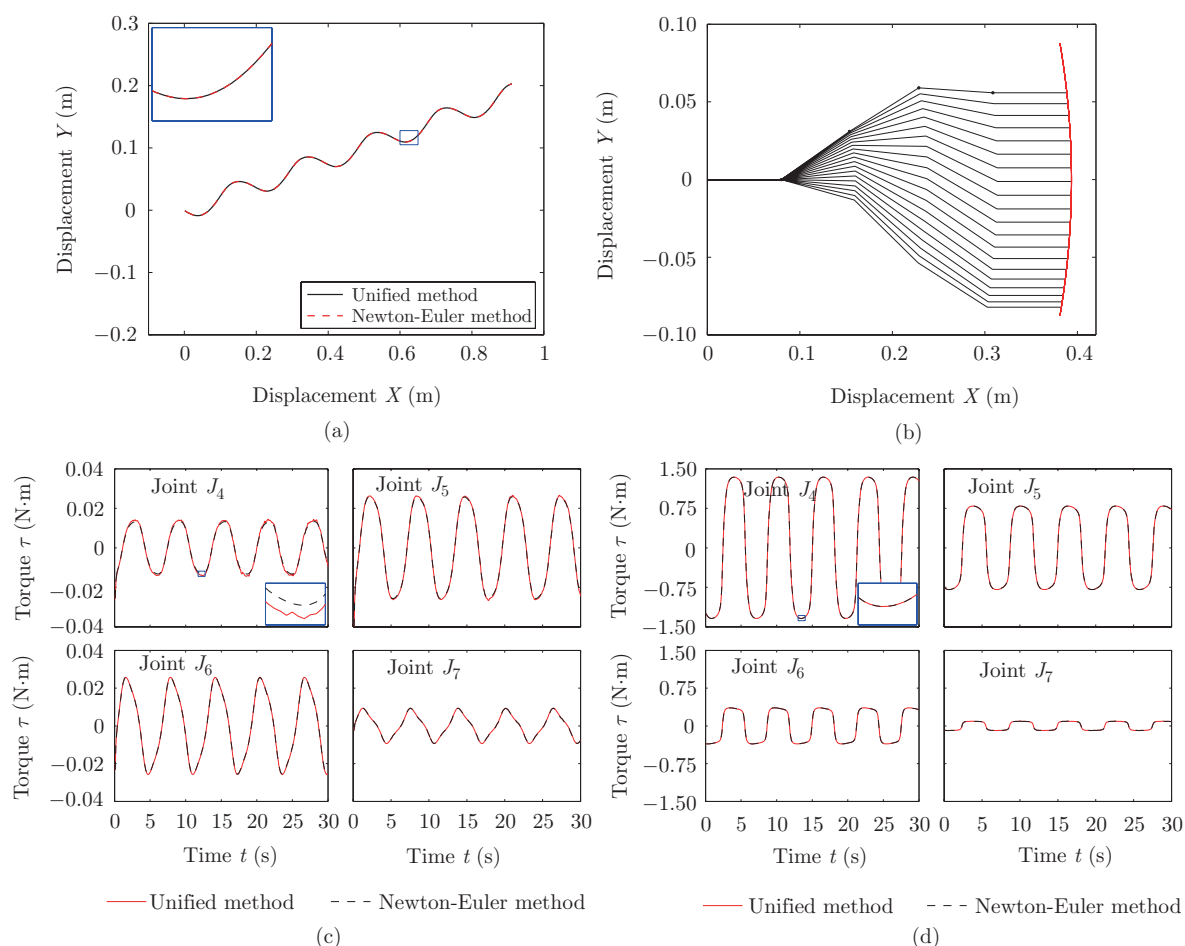


图 5 蛇形机器人移动与操作动力学仿真

Figure 5 Dynamic simulation for locomotion and manipulation of the snake-like robot

(a) Tail's track in locomotion, and the partial enlargement zoomed displacement $X \in [0.60, 0.65]$ (m) is drawn proportionally. (b) Trajectory in manipulation. (c) Torque comparison of locomotion with the partial enlargement zoomed time $t \in [11.75, 12.75]$ (s). (d) Torque comparison of manipulation with the partial enlargement zoomed time $t \in [13, 14]$ (s).

即控制机器人相对关节角度 $x^i(t) = \alpha \sin(\omega t + (i-3)\beta) + \gamma$ ($i = 4, \dots, n$), 式中 α , β 及 γ 决定机器人的形状, ω 代表机器人波动速度. 数值仿真的假设条件有: 1) 移动和操作都在水平面内进行; 2) 操作时的摩擦力模型和移动时的相同; 3) 操作时不考虑具体的操作任务; 4) 被动轮位于机器人连杆中间; 5) 机器人模块质量均匀分布. 另外, 仿真参数 (机器人物理参数、控制参数、环境参数) 如附录 D 中表 D1 所示.

根据统一动力学模型仿真获得蛇形机器人移动和操作状态下的运动轨迹及关节力矩, 并把这些结果与基于 Newton-Euler 方程分别对两种状态建模所得模型的仿真结果进行比较 (如图 5). Newton-Euler 方法被视作标准方法以验证移动操作统一方法的正确性. 移动操作统一方法与分别建模方法获得蛇形机器人运动时的尾部轨迹完全一致 (图 5(a)). 机器人移动时关节力矩 τ_i ($i = 4, \dots, 7$) 的平均误差分别为 6.09%, 1.88%, 0.98% 和 1.44%, 力矩的数值误差主要累积在尾部关节力矩 τ_4 上 (图 5(c)). 机

机器人操作时的运动轨迹如图 5(b) 所示. 从统一动力学模型直接降维得到操作动力学模型并仿真计算, 其结果与分别建模所得结果比较 (图 5(d)), 机器人操作时关节力矩的平均误差分别为 $8.73 \times 10^{-8}\%$, $6.18 \times 10^{-8}\%$, $6.48 \times 10^{-8}\%$ 及 $5.05 \times 10^{-8}\%$. 由比较结果可以得出移动与操作统一动力学模型的有效性. 最后比较图 5(c) 和图 5(d) 及相应力矩误差可知操作动力学数值结果具有更好的一致性, 因为蛇形机器人操作时外部动力学退化, 移动动力学比操作动力学更加复杂, 所以引起更多数值误差.

6 结论

本文基于微分几何方法提出了蛇形机器人移动与操作的统一动力学建模方法, 建立并分析了统一动力学模型, 理论推导与数值计算证明了该统一模型的有效性. 在微分几何框架下统一蛇形机器人移动与操作状态的动力学模型具有如下意义:

(1) 通过统一移动状态与操作状态的动力学模型可以为蛇形机器人动力学与机械臂动力学提供一个相互比较的基础, 借鉴机械臂动力学的现有文献可以更深刻地研究蛇形机器人的动力学特征. 文中正是通过这种统一与比较的方法揭示了蛇形机器人动力学模型的结构信息. 而缺少对两种状态的比较与统一将阻碍对蛇形机器人动力学的深入研究.

(2) 提供一个新颖的几何视角去理解蛇形机器人的动力学模型. 通过对移动状态与操作状态的比较, 把蛇形机器人的动力学问题归结为 Riemann 子流形问题, 赋予机器人动力学方程以几何意义, 并提供更多几何分析的手段, 也使问题的描述具有几何直观性. 其他常用动力学建模方法 (如 Newton-Euler 方法等) 不具有几何描述的手段很难将蛇形机器人移动与操作两种状态进行统一表示与分析.

最后, 由这种蛇形机器人移动与操作的统一动力学模型所引出的尚待解决的研究问题如下:

(1) 二维移动与操作统一模型向三维统一模型扩展. 由对统一动力学的分析 (第 4.3 小节) 可知, 重力项并不对三维统一模型产生影响, 难点在于蛇形机器人三维移动动力学本身的复杂性. 现阶段对蛇形机器人移动动力学模型的研究都限于二维平面运动动力学模型, 而蛇形机器人三维移动动力学因不确定的交互关系 (如相互作用的时间、作用点的个数位置等不确定) 与非光滑的交互作用^[9] (如碰撞、冲击等) 还有待深入研究. 文中给出了二维统一模型的建立框架与分析手段, 但要扩展到三维统一模型还有许多问题需要解决.

(2) 移动与操作动力学模型的统一如何推动实现移动与操作控制系统的统一. 移动与操作统一模型不仅使得两种状态下动力学模型的表述形式一致, 而且使得两次独立对移动与操作状态的分别建模减为一次统一建模. 这种统一模型有可能给蛇形机器人实时控制带来益处, 比如减小控制系统的复杂度、降低系统的计算时间、增加单一控制系统的功能等. 由移动与操作模型的统一如何得到控制算法与控制系统的统一还是一个有待深入研究的有趣问题.

参考文献

- 1 Hirose S. Biologically Inspired Robots (Snake-like Locomotor and Manipulator). Oxford: Oxford University Press, 1993. 1-49
- 2 Ma S. Analysis of creeping locomotion of a snake-like robot. Adv Robot, 2001, 15: 205-224
- 3 Saito M, Fukaya M, Iwasaki T. Serpentine locomotion with robotic snakes. IEEE Contr Syst Mag, 2002, 22: 64-81
- 4 Liljebäck P, Stavdahl, O, Pettersen K Y. Modular pneumatic snake robot: 3D modelling, implementation and control. Model Ident Contr, 2008, 29: 21-28

- 5 Transth A A, Van De Wouw N, Pavlov A, et al. Tracking control for snake robot joints. In: Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego: IEEE, 2007. 3539–3546
- 6 Zhao T, Li N. Nominal mechanism method of dynamic modeling for snake-like robots (in Chinese). Chin J Mech Eng, 2007, 43: 66–71
- 7 Vossoughi G, Pendar H, Heidari Z, et al. Assisted passive snake-like robots: Conception and dynamic modeling using Gibbs-Appell method. Robotica, 2007, 26: 267–276
- 8 Ostrowski J, Burdick J. Gait kinematics for a serpentine robot. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis: IEEE, 1996. 1294–1299
- 9 Transth A A, Leine R I, Glocker C, et al. Snake robot obstacle-aided locomotion: modeling, simulations, and experiments. IEEE Trans Robot, 2008, 24: 88–104
- 10 Andersson S B. Discretization of a continuous curve. IEEE Trans Robot, 2008, 24: 456–461
- 11 Murray R M, Li Z, Sastry S S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Florida: CRC Press, 1994. 19–147
- 12 Žefran M, Bullo F. Lagrangian dynamics. In: Kurfess T R, ed. Robotics and Automation Handbook. Florida: CRC Press, 2005. 1–16
- 13 Bullo F, Lewis A D. Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems. New York: Springer, 2005. 141–229
- 14 Park F C, Bobrow J E, Ploen S R. A Lie group formulation of robot dynamics. Int J Robot Res, 1995, 14: 609–618

附录 A

下面我们给出文中分析计算涉及的蛇形机器人在构形空间上的度量矩阵元素表达式。其中表 A1 给出 $\mathbf{M}_{1:3 \times 1:3}$ 的值, 表 A1 在结论 3.1.1 和 3.2.1 的推导与式 (25) 中被使用。另外给出了 M_{1j} 与 M_{2j} ($3 \leq j \leq n$) 的值, 及 $\frac{\partial M_{k1}}{\partial x^j}$, $\frac{\partial M_{1j}}{\partial x^k}$, $\frac{\partial M_{k2}}{\partial x^j}$, $\frac{\partial M_{2j}}{\partial x^k}$ ($3 \leq j \leq n, 3 \leq k \leq n$) 的值, 这些结果在结论 3.2.1 的推导中被使用。

表 A1 度量矩阵元素

Table A1 Riemannian metric

	j		
	1	2	3
1	$\sum_{k=3}^n m_k$	0	$-\sum_{k=3}^n \left\{ \frac{1}{2} m_k L_k \sin \left(\sum_{p=3}^k x^p \right) + m_k \sum_{q=3}^{k-1} \left[L_q \sin \left(\sum_{p=3}^q x^p \right) \right] \right\}$
i	2	0	$\sum_{k=3}^n \left\{ \frac{1}{2} m_k L_k \cos \left(\sum_{p=3}^k x^p \right) + m_k \sum_{q=3}^{k-1} \left[L_q \cos \left(\sum_{p=3}^q x^p \right) \right] \right\}$
3	$\times$	$\times$	$\sum_{k=3}^n \left\{ I_k^b + \frac{1}{4} m_k L_k^2 + m_k \sum_{p=3}^{k-1} L_p^2 + m_k L_k \sum_{p=3}^{k-1} \left[L_p \cos \left(\sum_{l=p+1}^k x^l \right) \right] \right\}$ $+ 2m_k \sum_{p=3}^{k-2} \sum_{q=p+1}^{k-1} \left[L_p L_q \cos \left(\sum_{l=p+1}^q x^l \right) \right]$

注: 根据度量矩阵的对称性, “ $\times$ ” 等于对称位置上元素的值。

另外, 当 $3 \leq j \leq n$ 时,

$$M_{1j} = -\sum_{k=j}^n \left\{ \frac{1}{2} m_k L_k \sin \left(\sum_{l=3}^k x^l \right) + m_k \sum_{p=j}^{k-1} \left[L_p \sin \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) \right] \right\},$$

$$M_{2j} = \sum_{k=j}^n \left\{ \frac{1}{2} m_k L_k \cos \left(\sum_{l=3}^k x^l \right) + m_k \sum_{p=j}^{k-1} \left[L_p \cos \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) \right] \right\}.$$

当 $3 \leq j \leq n, 3 \leq k \leq n$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{k1}}{\partial x^j} &= \frac{\partial M_{1j}}{\partial x^k} = - \sum_{p=\max\{j,k\}}^n \left\{ \frac{1}{2} m_p L_p \cos \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) + m_p \sum_{q=\max\{j,k\}}^{p-1} \left[L_q \cos \left(\sum_{l=3}^q x^l \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial M_{k2}}{\partial x^j} &= \frac{\partial M_{2j}}{\partial x^k} = - \sum_{p=\max\{j,k\}}^n \left\{ \frac{1}{2} m_p L_p \sin \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) + m_p \sum_{q=\max\{j,k\}}^{p-1} \left[L_q \sin \left(\sum_{l=3}^q x^l \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

附录 B

蛇形机器人动力学方程中第一类 Christoffel 符号的部分值 ($i, j, k = 1, 2, 3$) 如表 B1 所示, 该表在结论 3.2.1 及式 (25) 的推导中被使用.

表 B1 第一类 Christoffel 符号

Table B1 Christoffel symbol of the first kind

k	1									2									3								
i	1			2			3			1			2			3			1			2			3		
j	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Γ_{ijk}	0	0	0	0	0	0	0	0	Γ_{331}	0	0	0	0	0	0	0	0	Γ_{332}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

注: $\Gamma_{331} = -\sum_{p=3}^n \left\{ \frac{1}{2} m_p L_p \cos \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) + m_p \sum_{q=3}^{p-1} [L_q \cos \left(\sum_{l=3}^q x^l \right)] \right\}$, $\Gamma_{332} = -\sum_{p=3}^n \left\{ \frac{1}{2} m_p L_p \sin \left(\sum_{l=3}^p x^l \right) + m_p \sum_{q=3}^{p-1} [L_q \sin \left(\sum_{l=3}^q x^l \right)] \right\}$.

附录 C

文中算式 $\partial \mathbf{b}_{S,i} / \partial x^j$ 的计算结果如表 C1 所示, 其实是一个运动学量, 该计算值在结论 3.3.1 和 3.3.2 中被使用.

表 C1 $\partial \mathbf{b}_{S,i} / \partial x^j$ 的计算值

Table C1 Results of $\partial \mathbf{b}_{S,i} / \partial x^j$

		i					
		1	2	3	4	...	n
j	1	$[1, 0, 0]^T$	$[1, 0, 0]^T$	$[1, 0, 0]^T$	$[1, 0, 0]^T$	...	$[1, 0, 0]^T$
	2	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 1, 0]^T$	$[0, 1, 0]^T$	$[0, 1, 0]^T$	...	$[0, 1, 0]^T$
	3	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	$\partial \mathbf{b}_{S,3} / \partial x^3$	$\partial \mathbf{b}_{S,4} / \partial x^3$	...	$\partial \mathbf{b}_{S,n} / \partial x^3$
	4	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	$\partial \mathbf{b}_{S,4} / \partial x^4$	...	$\partial \mathbf{b}_{S,n} / \partial x^4$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	...	$\partial \mathbf{b}_{S,n} / \partial x^n$

注: 当 $3 \leq j \leq i$ 时, $\frac{\partial \mathbf{b}_{S,i}}{\partial x^j} = [-\frac{1}{2} L_i \sin(\sum_{l=3}^i x^l) - \sum_{k=j}^{i-1} (L_k \sin(\sum_{l=3}^k x^l)), \frac{1}{2} L_i \cos(\sum_{l=3}^i x^l) + \sum_{k=j}^{i-1} (L_k \cos(\sum_{l=3}^k x^l)), 0]^T$.

附录 D

表 D1 仿真参数

Table D1 Parameters of simulation

Physical parameter			Control parameter			Environment parameter		
Number of real modules	n'	5	Oscillation amplitude	α	0.4 rad	Tangential Coulomb friction coefficient	μ_c^t	0.01
Length of module	L	0.08 m	Angular frequency	ω	1 rad/s	Normal Coulomb friction coefficient	μ_c^n	0.5
Mass of module	m	0.5 kg	Phase offset	β	0.5π rad			
Inertia of module	I	0.016 kg·m ²	Angle offset	γ	0 rad			

注: $n' = n - 2$.

A unified dynamic model for locomotion and manipulation of a snake-like robot based on differential geometry

WANG ZhiFeng^{1,3*}, MA ShuGen^{1,2}, LI Bin¹ & WANG YueChao¹

1 *State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China;*

2 *Department of Robotics, Ritsumeikan University, Shiga-ken 525-8577, Japan;*

3 *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*

*E-mail: zfwang@sia.cn

Abstract A snake-like robot, whose body is a series-wound articulated mechanism, can move in various environments. In addition, when one end is fixed on a base, the robot can manipulate objects. A method of dynamic modeling for locomotion and manipulation of the snake-like robot is developed in order to unify the dynamic equations of two states. The transformation from locomotion to manipulation is a mechanism reconfiguration, that is, the robot in locomotion has not a fixed base, but it in manipulation has one. First, a virtual structure method unifies the two states in mechanism (e.g., an embedding in the configuration space); second, the product-of-exponentials formula describes the kinematics; third, the dynamics of locomotion and manipulation are established in a Riemannian manifold; finally, based on the analysis of the dynamic model, the dynamics of manipulation can be directly degenerated from those of locomotion, and this degeneration relation is proved through using the Gauss equations. In the differential geometry formulation, this method realizes the unification of the dynamics of locomotion and manipulation. According to a geometrical point of view, the unified dynamic model for locomotion and manipulation is considered as a submanifold problem endowed with geometric meaning. In addition, the unified model offers an insight into the dynamics of the snake-like robot beyond the dynamic model separately established for locomotion or manipulation.

Keywords snake-like robot, dynamics, unified model, differential geometry, locomotion, manipulation