中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 11 期: 1791～1818
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

模糊厌恶下保险人的鲁棒再保险策略

献给严加安院士 80 华诞

孟辉[1*], 魏丽[2,3*], 周明[4,5*]

1. 中央财经大学中国精算研究院, 北京 102206;
2. 中国人民大学财政金融学院中国保险研究所, 北京 100872;
3. 中国人民大学财政金融学院中国财政金融政策研究中心, 北京 100872;
4. 中国人民大学应用统计科学研究中心, 北京 100872;
5. 中国人民大学统计学院, 北京 100872
E-mail: menghuidragon@126.com, weil@ruc.edu.cn, mingzhou@ruc.edu.cn

收稿日期: 2020-08-15; 接受日期: 2020-12-25; 网络出版日期: 2021-11-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771465, 12071498 和 11971506) 资助项目

摘要 本文考虑保险人模糊厌恶的情形, 针对一类包含多个常用准则的混合再保险保费准则, 在连续时间模型框架下研究保险人的鲁棒最优再保险策略问题. 本文通过最小化保险人折现破产概率和最大化保险人终端时刻期望财富效用, 在 Cramér-Lundberg 跳模型和其扩散近似模型下, 均得到了优化问题的值函数表达式和相应的鲁棒最优再保险策略. 特别地, 对于最小化保险人折现破产概率的优化问题, 通过给出并证明优化问题的等价形式, 从理论上直接证明值函数具有指数形式. 此外, 对于每个优化问题, 本文通过巧妙地构造优化问题的辅助 Lagrange 函数, 在一般的混合再保险保费准则下, 均解析地得到鲁棒最优再保险策略的表达式具有曲线形式的非平凡结构, 这与分段线性再保险策略 (如比例再保险策略、超额损失再保险策略和分层再保险策略等) 有很大不同, 极大地拓展了最优再保险理论现有的结果. 最后, 分析模糊厌恶水平等有关参数对最优再保险策略和值函数的敏感性.

关键词 模糊厌恶 鲁棒再保险策略 破产概率 期望效用 混合保费准则

MSC (2020) 主题分类 62P05, 91G05, 93E20

1 引言

在金融市场中, 再保险是保险人进行公司风险管理的常用有效工具. 通过进行合适的再保险, 保险人能将部分风险暴露转移给某再保险公司, 从而达到提高资本充足率和加强保险运营效率的目的. 但是, 在实务操作中, 由于保险人和再保险人之间的风险偏好不一致 (表现在对风险采用不同的风险度量), 经营目标不同, 从而导致如何选择最优再保险策略形式成为学术界和业界共同关注的热点问题.

英文引用格式: Meng H, Wei L, Zhou M. Robust reinsurance strategy under ambiguity-averse (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1791–1818, doi: 10.1360/SSM-2020-0258

© 2021《中国科学》杂志社

自 Borch [1,2] 和 Arrow [3] 的开创性工作以来, 无论在离散时间模型还是连续时间模型框架下, 关于再保险的随机控制研究都得到了很大的发展.

在以往的文献中, 保险人对风险的度量, 通常会采用期望值保费准则、方差保费准则、标准差保费准则和指数保费准等, 优化的目标函数有最小破产概率、最大期望财富效用, 以及最小化用在险值 (value at risk, VaR) 和尾部条件期望 (conditional tail expectation, CTE) 等度量的资本要求等, 可参见文献 [4–9]. 文献中对于最优再保险策略的研究, 主要有两类. 一类基于有限维空间研究最优再保险策略, 通常从一类常见的再保险形式出发, 这类再保险策略是具有一个或至多有限个参数的特殊结构, 如比例再保险、超额损失再保险、停止损失再保险和分层再保险等, 相关文献可参见文献 [10–14]. 另一类研究则是不提前假定再保险的具体形式, 首要探讨最优再保险的具体形式, 然后再确定最优的参数. 本质上, 这一类是在无穷维空间考虑最优再保险问题, 具有较大的难度. 在离散时间模型下的研究参见文献 [15–17], 在连续时间模型下的研究参见文献 [18–24].

在以往的研究中, 通常假设决策者对未来风险有一个清晰的认识. 但是, 由于历史数据的限制, 以及决策者之间存在的异质性信念, 人们逐渐意识到, 未来并不是历史的简单重复, 决策者对未来风险模型的不确定性普遍存在. 因此, 在最优决策的问题中, 人们开始关注模型不确定性的问题, 如在金融市场中研究模糊厌恶的经典文献 [25–28] 等. 同样地, 对于保险市场, Hogarth 和 Kunreuther [29] 及 Chen 等 [30] 指出: 由于受到经济等各种因素的影响, 决策者很难刻画出未来理赔损失的精确概率分布, 因此对保险市场模型不确定的现象也是普遍存在的. 近些年, 在模型不确定的假设下, 关于最优再保险鲁棒策略的研究越来越引起关注: 在特定的再保险形式下, Korn 等 [31]、Pun 和 Wong [32]、Li 等 [33] 及 Wang 和 Siu [34] 研究了期望效用问题, Yi 等 [35] 和 Zeng 等 [36] 考虑了均值 - 方差问题. 在没有再保险策略下, Bayraktar 和 Zhang [37] 及 Young 和 Zhang [38] 研究了破产概率下的鲁棒最优投资问题. 进一步, Li 和 Young [39] 在均值 - 方差保费准则下, 研究了 (折现) 破产概率问题下的鲁棒最优再保险问题.

在文献 [28,39–41] 等相关文献的基础上, 为了能更好地体现保险人与再保险人之间风险偏好的不同, 本文在一类较广的混合保费准则下, 同时考虑保险人对损失模型的模糊厌恶, 在 Cramér-Lundberg 模型和其扩散逼近两类风险模型下, 分别基于折现破产概率和期望效用目标来研究鲁棒最优再保险策略. 本文的创新性在于, 基于无穷维空间和很大一类保费准则 (特别是包含了指数保费准则, 此类保险准则在连续时间模型下很少涉及), 对最优再保险问题在统一框架下作了深入研究, 得到了最优再保险策略具有曲线结构, 这与分段线性结构有很大的不同. 另外, 从理论上证明了值函数的具体形式, 这与大多文献中的猜解方法有本质区别.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节构建再保险模型. 第 3 节考虑扩散模型和折现破产概率, 在模型不确定下研究稳健再保险策略 (最坏情形下的最优策略), 此最优策略具有非线性结构. 第 4 节基于 Cramér-Lundberg 模型和扩散逼近模型, 考虑期望效用目标, 获得稳健再保险策略和值函数. 第 5 节给出数值分析, 研究不同参数下模型的敏感度. 第 6 节给出本文的小结.

2 模型建立

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$ 为完备的概率空间, 其中 P 为真实概率测度, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常的正则条件. 本文用 E 和 D 分别表示数学期望和方差.

在风险理论中, 一个保险公司的初始盈余过程通常用古典 Cramér-Lundberg 模型来刻画, 公司 t

时刻的盈余 X_t 可以表示为

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

其中 $x \geqslant 0$ 是公司的初始资本, 保费率 c 为正常数, $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 为密度参数为 $\lambda > 0$ 的时齐 Poisson 计数过程. $\{Z_i, i = 1, 2, \ldots\}$ 为相互独立同分布的正随机变量序列, 表示每次的理赔额, 且与 Poisson 过程 $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 也相互独立.

假定保险公司通过再保险进行风险管理, 即保险公司可以通过各种形式的再保险合同将未来风险转让给某再保险公司, 同时再保险公司从保险公司收取再保费得以补偿. 在对最优再保险的理论研究中, 再保险人采用的保费准则是一个非常重要的假设. 通常, 期望值保费准则、方差保费准则和指数保费准则等保费准则被广泛采用. 为了能够包含更一般的情形, 本文采用 Meng 等 [42] 提出的一类能够包含上述三种保费准则的混合型保费准则 $\pi^{\theta,a,\gamma}(Y)$. 对一个非负的随机损失变量 Y, 再保险收取的再保费 $\pi^{\theta,a,\gamma}(Y)$ 计量为

$$\pi^{\theta,a,\gamma}(Y) = \frac{1+\theta}{a} \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{aY}] + \gamma \mathrm{D}[Y], \tag{2.1}$$

其中 $\theta, \gamma \geqslant 0$, $0 \leqslant a < \varsigma$, $\varsigma = \sup\{y : \mathrm{E}[\mathrm{e}^{yZ_i}] < \infty\}$.[1)] 这是一个非常一般的保费准则, 当参数取某些特殊值时, 该保费准则可以退化为一些常用保费准则:

(1) 当 $\gamma = 0$ 且 $a \to 0$ 时, $\pi^{\theta,0,0}(Y) = (1+\theta)\mathrm{E}[Y]$ 为期望值保费准则;

(2) 当 $\theta = 0$ 且 $a \to 0$ 时, $\pi^{0,0,\gamma}(Y) = \mathrm{E}[Y] + \gamma \mathrm{D}[Y]$ 为方差保费准则;

(3) 当 $a \to 0$ 时, $\pi^{\theta,0,\gamma}(Y) = (1+\theta)\mathrm{E}[Y] + \gamma \mathrm{D}[Y]$ 为均值 - 方差保费准则;

(4) 当 $\theta = \gamma = 0$ 时, $\pi^{0,a,0}(Y) = \frac{1}{a} \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{aY}]$ 为指数保费准则.

另外, 在模型中引入决策者的模糊厌恶. 假设由于经济和技术等因素的影响, 保险人对保险业务中理赔频率 λ 的刻画存在模型不确定, 对单次的理赔额的分布能够准确刻画. 对于再保险人, 假设其能够充分掌握保险市场的信息, 不存在模型不确定的情况. 类似的假设可参见文献 [39, 41].

为描述对 Poisson 过程密度参数的不确定, 用等价的绝对连续概率族来刻画. 具体地, 新测度 Q^ϕ 关于参考概率测度 P 的 Radon-Nikodym 导数满足

$$\left.\frac{d\mathrm{Q}^\phi}{d\mathrm{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \Lambda_t^\phi, \tag{2.2}$$

其中

$$\Lambda_t^\phi = \exp\left[\int_0^t \ln(1+\phi_s) dN_s - \lambda \int_0^t \phi_s ds\right]. \tag{2.3}$$

根据 Girsanov 定理, 在概率测度 Q^ϕ 下, 得知 N_t 仍然是时齐 Poisson 计数过程, 但密度参数变为 $\lambda(1+\phi_t)$, 用 $N_t^{\mathrm{Q}^\phi}$ 标记. 用相对熵的概念描述两个概率测度之间的差异程度, 其中 Q^ϕ 与 P 之间的相对熵表示为

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}^\phi}\left[\ln\left(\left.\frac{d\mathrm{Q}^\phi}{d\mathrm{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}\right)\right] = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}^\phi}\left[\lambda \int_0^t [(1+\phi_s)\ln(1+\phi_s) - \phi_s] ds\right]. \tag{2.4}$$

1) 当 $a > 0$ 时 (带有指数保费准则), 需要假定 $\{Z_i, i = 1, 2, \ldots\}$ 有轻尾分布, 即存在正常数 $b \geqslant a$ 使得 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{bZ_i}] < \infty$; 当 $a \to 0$ 时, 此时表示均值 - 方差保费准则, 不需要假定 $\{Z_i, i = 1, 2, \ldots\}$ 有轻尾分布.

由此, 在区间 $[t, t+dt]$ 上的相对熵为

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}^\phi}\left[\ln\left(\frac{\Lambda_{t+dt}^\phi}{\Lambda_t^\phi}\right)\right] = \lambda[(1+\phi_s)\ln(1+\phi_s)-\phi_s]dt. \tag{2.5}$$

用 Φ 来表示满足如下条件的概率扭曲过程 $\{\phi_t\}_{t\geqslant 0}$:

$$\int_0^t [(1+\phi_s)\ln(1+\phi_s)-\phi_s]ds < \infty. \tag{2.6}$$

特别地, 当对所有 $t\geqslant 0$ 有 $\phi_t = 0$ 时, $\mathrm{Q}^\phi = \mathrm{P}$.

注意到, 基于 (2.4) 或 (2.5), 相对熵的形式比较复杂, 这导致鲁棒再保险控制问题很难处理. 为了数学上容易处理, 类似于文献 [39], 我们研究近似相对熵情形下的鲁棒再保险问题. 具体地, 根据

$$(1+\phi)\ln(1+\phi)-\phi = \frac{\phi^2}{2}+o(\phi^2), \tag{2.7}$$

可得

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}^\phi}\left[\ln\left(\frac{\Lambda_{t+dt}^\phi}{\Lambda_t^\phi}\right)\right] \approx \frac{\lambda\phi_t^2}{2}dt. \tag{2.8}$$

根据再保险合同, 假设风险自留函数为 $g(\cdot)$, 即对每个理赔额 Z_i, 保险公司风险自留函数为 $g(Z_i)$, 再保险公司分摊风险为 $Z_i - g(Z_i)$, 则对任意 t 时刻, 再保险公司收取的再保险保费函数为

$$\begin{aligned}\pi_t^{\theta,a,\gamma} &\triangleq \pi^{\theta,a,\gamma}\left(\sum_{i=1}^{N_t}(Z_i-g(Z_i))\right)\\ &= \frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g(Z))})-1)t+\lambda\gamma\mathrm{E}[Z-g(Z)]^2t,\end{aligned} \tag{2.9}$$

此处为方便起见, 用 Z 来表示与 Z_i 具有相同分布的随机变量. 由此可知, 再保险保费函数是时间 t 的线性函数, 保险人按常数保费率支付再保险费.

由 (2.9) 知, 在概率测度 Q^ϕ 下, 采用自留函数为 $g(\cdot)$ 的再保险策略, 保险人的盈余过程 $\{X_t^{g,\phi}\}_{t\geqslant 0}$ 可表示为

$$\begin{aligned}X_t^{g,\phi} &= x+ct-\pi_t^{\theta,a,\gamma}-\sum_{i=1}^{N_t^{\mathrm{Q}^\phi}} g(Z_i)\\ &= x+\left[c-\frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g(Z))})-1)-\lambda\gamma\mathrm{E}[Z-g(Z)]^2\right]t-\sum_{i=1}^{N_t^{\mathrm{Q}^\phi}} g(Z_i).\end{aligned} \tag{2.10}$$

根据文献 [43] 知, 盈余过程 (2.10) 具有下面形式的扩散逼近过程 (仍用 $X_t^{g,\phi}$ 表示):

$$\begin{aligned}dX_t^{g,\phi} = &\left[c-\frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g(Z))})-1)-\lambda\gamma\mathrm{E}[Z-g(Z)]^2-\lambda(1+\phi_t)\mathrm{E}g(Z)\right]dt\\ &+\sqrt{\lambda(1+\phi_t)\mathrm{E}g^2(Z)}dB_t,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $\{B_t, t\geqslant 0\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$ 上的标准 Brown 运动.

进一步假定:

(A1) 保险人盈余有一个固定利率的收益, 其中常利率为 $r>0$;

(A2) 保险人可以动态调整风险自留函数, 即自留函数 $g(z)$ 依赖时间 t, 标记为 $g_t(z)$ 或 $g_t(\omega,z)$.

在这两点假定下, 盈余过程 (2.10) 和扩散逼近模型 (2.11) 能进一步表示为

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^{g,\phi} = &\left[r\tilde{X}_t^{g,\phi} + c - \frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g_t(Z))})-1) - \lambda\gamma\mathrm{E}[Z-g_t(Z)]^2\right]dt \\ &- d\left(\sum_{i=1}^{N_t^{\mathrm{Q}^\phi}} g_t(Z_i)\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

和

$$\begin{aligned} d\hat{X}_t^{g,\phi} = &\left[r\hat{X}_t^{g,\phi} + c - \frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g_t(Z))})-1) - \lambda\gamma\mathrm{E}[Z-g_t(Z)]^2\right. \\ &\left. - \lambda(1+\phi_t)\mathrm{E}g_t(Z)\right]dt + \sqrt{\lambda(1+\phi_t)\mathrm{E}g_t^2(Z)}dB_t, \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 E 仅表示对随机变量 Z 取数学期望, 详细的定义可参见文献 [22].

对于风险自留函数, 如果一个策略 $g=\{g_t(z)\}_{t\geqslant 0}$ 满足下面的条件:

(i) 对 $z\in\mathbb{R}^+$, 过程 $\{g_t(z)\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是可料的;

(ii) 给定 $z\in\mathbb{R}_+$, 对 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,\infty)$, $g_t(\omega,z)$ 为二元 Borel 可测函数;

(iii) $0\leqslant g_t(z)\leqslant z$;

(iv) $g_t(z)$ 和 $z-g_t(z)$ 为关于 z 的递增函数,

则称它为可行策略. 用符号 $\mathbb{G}$ 表示所有可行策略组成的集.

注 2.1 在上面可行策略的定义中, 条件 (iv) 是风险自留函数的激励相容约束, 用来避免道德风险, 这在再保险合同设计中是一个必要的条件. 然而, 加入条件 (iv) 的最优再保险问题很难处理. 幸运的是, 可以先放松限制条件 (iv), 可行策略仅要求满足 (i)–(iii), 并用 $\mathcal{G}$ 表示这种策略集. 最后, 可以验证, 在可行集 $\mathcal{G}$ 中的最优策略同时会满足限制条件 (iv), 也就是说, $\mathcal{G}$ 与 $\mathbb{G}$ 下得到的最优策略结果是一致的. 一般来说, 条件 (iv) 是不可去掉的, 例如, Tan 等 [24] 指出, 在均值 - 条件在险值 (conditional value at risk, CVaR) 保费准则下若没有条件 (iv) 将导致最优再保险策略在某些点是严格下降的, 这样将会导致道德风险.

3 折现破产概率下的鲁棒再保险策略

本节考虑公司决策者以最小化带有惩罚的折现破产概率为目标, 研究基于扩散模型 (2.13) 下的鲁棒再保险策略. 为了处理方便, 假设 $r=0$, 即没有固定利率收益. 本节的结论可以比较容易地推广至 $r>0$ 的情形.

对任一可行策略 $g\in\mathcal{G}$, $\phi\in\Phi$, 以及常数 $0\leqslant y\leqslant x$, 定义首达时

$$\tau_x^y = \inf\{t>0: \hat{X}_t^{g,\phi}\leqslant y \mid \hat{X}_0^{g,\phi}=x\}. \tag{3.1}$$

利用相对熵的近似表达 (2.8), 定义带有惩罚的折现破产概率为优化问题的值函数, 即

$$W(x) = \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}} - \int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\frac{\lambda\phi_t^2}{2}\frac{1}{\varphi(t)}dt\right]. \tag{3.2}$$

该目标函数满足两个边界条件: $W(0)=1$ 和 $\lim_{x\to\infty}W(x)=0$ (第二个边界条件的成立将在后面进行验证).

注意到, (3.2) 中的第二个项为由 $\frac{1}{\varphi(t)}$ 加权后的相对熵的折现, 其中 $\varphi(t)>0$ 揭示了在时刻 t 的稳健程度. 类似 Maenhout [44] 以及 Liu 和 Zhou [45] 的做法, 取 $\varphi(t)=\frac{\zeta}{W(\hat{X}_t^{g,\phi})}$ 作为标准化因子 (这样做的目的是保证 (3.2) 中前后两项单位一致, 使得两项作差有意义), 优化问题 (3.2) 化简为

$$W(x)=\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}-\frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2W(\hat{X}_t^{g,\phi})dt\right],\tag{3.3}$$

其中 ζ 为非负参数, 表示保险人的模糊厌恶水平. ζ 越大, 表明保险人有更高的模糊厌恶水平, 也即对参考概率越不确信. 当 $\zeta=0$ 时, 保险人对模型不存在模糊性, 即相信参考概率 P 为真实的概率测度.

另外值得注意的是, 值函数 (3.3) 的定义是通过循环方式给出的, 很难从该定义的表达式中得到值函数的一些性质. 下面给出值函数 (3.3) 另外一种解析表达 $V(x)$, 而且能够说明 $W(x)$ 与下面的 $V(x)$ 是一致的, 这就使得优化问题 (3.3) 有了一个更为直观的定义和解释, 这是本文的主要贡献之一.

定义函数

$$V(x)=\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}V^{g,\phi}(x):=\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}].\tag{3.4}$$

显然, $V(x)$ 为递减函数, 且有 $0\leqslant V(x)\leqslant 1$, 满足两个边界条件: $V(0)=1$ 和 $\lim_{x\to\infty}V(x)=0$.

命题 3.1 $V(x)=W(x)$, 也就是 $V(x)$ 满足

$$V(x)=\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}-\frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2V(\hat{X}_t^{g,\phi})dt\right].\tag{3.5}$$

证明 首先说明

$$\mathrm{E}_x\left\{I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}dt\right\}=\mathrm{E}_x\left\{\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{E}_{\hat{X}_t}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_t}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_{\hat{X}_t}^0<\infty\}}]dt\right\},$$

其中 $\hat{X}_t\triangleq\hat{X}_t^{g,\phi}$.

给出区间 $[0,\tau_x^0]$ 的一个分划 $\{[\tilde{\tau}_j,\tilde{\tau}_{j+1}],\ j=0,1,\ldots,n-1\}$, 其中

$$\tilde{\tau}_j=\sum_{i=0}^{j}\tau_i,\quad \tau_i=\tau_{(n-i)x/n}^{(n-i-1)x/n}.$$

应用强 Markov 性及积分有关知识, 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_x\left\{I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}dt\right\}\\
&=\mathrm{E}_x\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\tau_j\mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2\mathrm{e}^{-\int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}_x\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\tau_j\mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2\mathrm{e}^{-\int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{E}_x\{\tau_j\mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2\mathrm{e}^{-\int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{E}_x\{\mathrm{E}_x[\tau_j \mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2 \mathrm{e}^{-\int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\,|\mathcal{F}_{\tilde{\tau}_j}]\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{E}_x\{\tau_j \mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2 \mathrm{E}_x[(\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_j^n}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_{\hat{X}_j^n}^0<\infty\}})\circ\theta_{\tilde{\tau}_j}\,|\mathcal{F}_{\tilde{\tau}_j}]\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{E}_x\{\tau_j \mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2 \mathrm{E}_{\hat{X}_j^n}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_j^n}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_{\hat{X}_j^n}^0<\infty\}}]\}\\
&= \mathrm{E}_x\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}[\tau_j \mathrm{e}^{-\delta\tilde{\tau}_j}\phi_{\tilde{\tau}_j}^2 \mathrm{E}_{\hat{X}_j^n}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_j^n}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_{\hat{X}_j^n}^0<\infty\}}]]\right\}\\
&= \mathrm{E}_x\left\{\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{E}_{\hat{X}_t}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_t}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_{\hat{X}_t}^0<\infty\}}]dt\right\},
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{X}_j^n \triangleq \hat{X}_{\tilde{\tau}_j}^{g,\phi}$, $\theta_{\tilde{\tau}_j}$ 为推移算子.

令

$$
Y_t = \int_t^{\tau_x^0}\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta}ds.
$$

应用 Itô 公式得

$$
\mathrm{e}^{-Y_{\tau_x^0}} = \mathrm{e}^{-Y_0} + \frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}(\phi_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_x^0}\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta}ds})dt,
$$

即有

$$
\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^0}\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta}ds} = 1 - \frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}(\phi_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_x^0}\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta}ds})dt.
$$

这样, 有

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_x^0<\infty\}}]\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}} - \frac{\lambda}{2\zeta}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}dt\right]\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}} - \frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2\mathrm{E}_{\hat{X}_t}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{\hat{X}_t}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds} I_{\{\tau_{\hat{X}_t}^0<\infty\}}]dt\right]\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta\tau_x^0}I_{\{\tau_x^0<\infty\}} - \frac{\lambda}{2\zeta}\int_0^{\tau_x^0}\mathrm{e}^{-\delta t}\phi_t^2 V(\hat{X}_t^{g,\phi})dt\right].
\end{aligned}
$$

这样, 由边界条件, 有 $W(x) = V(x)$. □

根据值函数 $W(x)$ 的等价表达式 (3.4), 可以从理论上推导出值函数的表达式.

命题 3.2 值函数 $V(x)$ 有指数形式

$$
V(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0, \tag{3.6}
$$

其中 α 为非负参数.

证明 应用动态规划原理和强 Markov 性, 对 $0<y<x$, 有

$$\begin{aligned}
V(x) &= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}]\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\{\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\,|_{\mathcal{F}_{\tau_x^y}}]\}\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\{\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^y}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^y<\infty\}}\cdot\mathrm{e}^{-\int_{\tau_x^y}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\,|_{\mathcal{F}_{\tau_x^y}}]\}\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\mathrm{E}_x\{[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_x^y}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^y<\infty\}}]\cdot\mathrm{E}_x[\mathrm{e}^{-\int_{\tau_x^y}^{\tau_x^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_x^0<\infty\}}\,|_{\mathcal{F}_{\tau_x^y}}]\}\\
&= \inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}\{\mathrm{E}_{x-y}[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_{x-y}^0}(\delta+\frac{\lambda\phi_s^2}{2\zeta})ds}I_{\{\tau_{x-y}^0<\infty\}}]\cdot V(y)\}\\
&= V(x-y)\cdot V(y).
\end{aligned}$$

受 Choulli 等[46] 启发, 根据上式, 有

$$V(x)-V(x-y)=V(x-y)(V(y)-1). \tag{3.7}$$

由于 $V(y)-1\leqslant 0$ 以及 $V(x)$ 为 x 的减函数, 所以有 $V(x)-V(x-y)$ 为 x 的增函数. 这样, 当 $y<x_1<x_2$ 时,

$$V(x_2)-V(x_2-y)\geqslant V(x_1)-V(x_1-y). \tag{3.8}$$

取 $x_2=y+x_1$, 有

$$V(x_1)=V\left(\frac{1}{2}(x_1+y)+\frac{1}{2}(x_1-y)\right)\leqslant\frac{1}{2}V(x_1+y)+\frac{1}{2}V(x_1-y), \tag{3.9}$$

这说明 $V(x)$ 为凹函数, 从而为连续函数. 进一步, 由 $V(0)=1$ 和 $\lim_{x\to\infty}V(x)=0$, 可知值函数 $V(x)$ 有指数形式 $V(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x}$, 其中 $\alpha>0$ 为某常数. □

下面, 为了排除一些平凡情形, 假设保险公司收取的保费率 c 满足下列不等式:

$$\lambda\mathrm{E}[Z]I_{\{\delta=0\}}<c<\frac{\lambda(1+\theta)}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{aZ})-1)+\lambda\gamma\mathrm{E}[Z]^2. \tag{3.10}$$

注 3.1 在上面的不等式中, 右边部分排除了再保险市场中的套利机会, 否则, 无论 ϕ 取何值, 保险人都能通过把所有风险全部转移给再保险人, 不承担任何未来的损失, 也不支付额外的成本, 也就是保险人永不破产, 即 $V(x)\equiv 0$. 对上面的不等式左边部分, 当 $\delta=0$ 时, 如果不等式不成立, 则有

$$V(x)=\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi\in\Phi}V^{g,\phi}(x)\geqslant\inf_{g\in\mathcal{G}}V^{g,\phi}(x)\,|_{\phi\equiv 0}\geqslant\inf_{g\in\mathcal{G}}\mathrm{P}_x(\tau_x^0<\infty)=1,$$

也就是 $V(x)=1$.

为了叙述方便, 定义两个函数

$$\begin{aligned}
&\mu(g(Z))=\frac{1+\theta}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g(Z))})-1)+\gamma\mathrm{E}[Z-g(Z)]^2+\mathrm{E}g(Z),\\
&\sigma^2(g(Z))=\mathrm{E}g^2(Z).
\end{aligned}$$

对于任意二阶连续可微的函数 $\upsilon(x)$, 定义微分算子

$$\mathcal{L}^{g,\phi}\upsilon(x) = -\delta\upsilon(x) + (c - \lambda\mu(g(Z)) - \lambda\phi\mathrm{E}(g(Z)))\upsilon'(x) + \frac{\lambda}{2}(1+\phi)\sigma^2(g(Z))\upsilon''(x) - \frac{\lambda\phi^2}{2\zeta}\upsilon(x).$$

至此, 根据动态规划准则不难得到, 如果值函数 (3.4) 是二阶连续可微的, 则它满足 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程

$$\inf_g \sup_\phi \{\mathcal{L}^{g,\phi}\upsilon(x)\} = 0, \tag{3.11}$$

以及边界条件

$$\upsilon(0) = 1, \quad \upsilon(\infty) = 0. \tag{3.12}$$

类似于文献 [27, 附录 B.2], 给出该优化问题的验证定理.

定理 3.1 (验证定理) 如果存在递减函数 $\upsilon(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ 是满足方程 (3.11) 和边界条件 (3.12) 的一个解, 则有 $V(x) = \upsilon(x)$. 进一步, 如果存在 $g^*(x)$ 和 $\phi^*(x)$ 满足

$$\mathcal{L}^{g^*(x),\phi^*(x)}\upsilon(x) = 0, \tag{3.13}$$

则鲁棒最优再保险策略 $\{g_t^*, \phi_t^*\}$ 为 $g_t^* = g^*(\hat{X}_t^{g^*,\phi^*})$ 及 $\phi_t^* = \phi^*(\hat{X}_t^{g^*,\phi^*})$, 值函数为

$$V(x) = \upsilon(x) = V^{g^*,\phi^*}(x).$$

证明 该定理的证明与文献 [27, 附录 B.2] 的证明类似, 因此在此省略. □

下面的分析将根据 HJB 方程 (3.11) 求解最优再保险策略和值函数.

根据前面的命题知值函数具有指数形式, 从而把 $V(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$ 代入 HJB 方程 (3.11), 可得

$$\delta + c\alpha = \lambda \inf_g \sup_\phi \left[(\mu(g(Z)) + \phi\mathrm{E}g(Z))\alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1+\phi)\sigma^2(g(Z)) - \frac{\phi^2}{2\zeta}\right]. \tag{3.14}$$

注意到上式右边是一个关于 ϕ 的二次型函数, 开口向下, 关于 ϕ 取微分得到最大值点为

$$\phi^* = \zeta\alpha\left[\mathrm{E}g(Z) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}g^2(Z)\right]. \tag{3.15}$$

把 (3.15) 代入 (3.14), 得

$$\delta + c\alpha = \lambda\alpha \inf_g \left[\mu(g(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)) + \frac{\zeta\alpha}{2}\left[\mathrm{E}g(Z) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}g^2(Z)\right]^2\right]. \tag{3.16}$$

接下来根据上式来确定最优再保险策略的形式. 回顾函数 $\mu(g(Z))$ 的定义, 将 Z 和 $g(Z)$ 看成两个自由变量, 将取期望后的最优拓展到点点最优. 故此, 对于 $\alpha, \theta, a, \gamma, z \in \mathbb{R}_+$, 定义 Lagrange 函数

$$H^\alpha_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g) = \frac{1+\theta}{a}(\mathrm{e}^{a(z-g)} - 1) + \gamma(z-g)^2 + (1+\ell)g + \frac{1}{2}\alpha(1+\ell)g^2, \tag{3.17}$$

其中 $0 \leqslant g \leqslant z$, $-1 < \ell < \infty$ 为 Lagrange 乘子.

显然, 有

$$\mu(g(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)) + \ell\left[\mathrm{E}g(Z) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}g^2(Z)\right] = \mathrm{E}[H^\alpha_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z, g(Z))]. \tag{3.18}$$

将 Lagrange 函数 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 关于 g 取微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g}H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g) &= h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)\\ &:= -(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g)} - 2\gamma(z-g) + 1 + \ell + \alpha(1+\ell)g.\end{aligned} \tag{3.19}$$

引理 3.1 (i) 情形 1: $-1 < \ell \leqslant \theta$.

如果 $z \in (\frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}, +\infty)$, 则存在唯一根, 记为 $g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) \in [0,z]$, 使得

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)) = 0, \tag{3.20}$$

且有

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) := \arg\inf_{0\leqslant g\leqslant z} H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)},\\ g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z), & z \geqslant \dfrac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}.\end{cases} \tag{3.21}$$

(ii) 情形 2: $\theta \leqslant \ell < \infty$.

如果 $z \in (q^{-1}(1+\ell), +\infty)$, 则存在唯一根, 记为 $g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) \in [0,z]$, 使得

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)) = 0, \tag{3.22}$$

且有

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) := \arg\inf_{0\leqslant g\leqslant z} H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z \leqslant q^{-1}(1+\ell),\\ g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z), & z \geqslant q^{-1}(1+\ell).\end{cases} \tag{3.23}$$

证明 首先, 对函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 关于 g 取微分, 可得

$$\frac{\partial}{\partial g}h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g) = (1+\theta)a\mathrm{e}^{a(z-g)} + 2\gamma + \beta(1+\ell) > 0, \tag{3.24}$$

这说明函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 为变量 g 的严格递增函数.

(i) 情形 1: $-1 \leqslant \ell \leqslant \theta$.

当 $z \in (\frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}, +\infty)$, 有

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,z) = -\theta + \ell + \alpha(1+\ell)z > 0. \tag{3.25}$$

又因为

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,0) = -(1+\theta)\mathrm{e}^{az} - 2\gamma z + 1 + \ell < 0, \tag{3.26}$$

根据函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 关于变量 g 的连续性, 可知 (3.20) 在区间 $(0,z)$ 上有唯一正根, 记为 $g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$. 因此, 有

- 如果 $g \in [0, g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)]$, 则 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 为 g 的严格递减函数;
- 如果 $g \in [g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z), z]$, 则 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 为 g 的严格递增函数,

即最小值在 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 处取得.

当 $z \in [0, \frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}]$ 时, 对任意 $g \in (0, z)$, 函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g) < 0$, 因此函数 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g)$ 为变量 g 的严格递减函数, 所以最小值在 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = z$ 处取得.

综上可知, (3.21) 成立.

(ii) 情形 2: $\ell > \theta$.

显然, 对任意的 $z > 0$, 有

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, z) = -\theta + \ell + \alpha(1+\ell)z > 0. \tag{3.27}$$

定义函数

$$q(z) = (1+\theta)\mathrm{e}^{az} + 2\gamma z, \quad z \geqslant 0, \tag{3.28}$$

则函数 $q(z) \geqslant 1+\theta$, 且是严格单调递增函数. 所以, 当 $z \in (q^{-1}(1+\ell), +\infty)$ 时,

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, 0) = 1 + \ell - (1+\theta)\mathrm{e}^{az} - 2\gamma z < 0. \tag{3.29}$$

因此, 由 (3.27) 和 (3.29) 可知, (3.22) 在区间 $(0, z)$ 上有唯一正根, 记为 $g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$. 因此,

- 如果 $g \in [0, g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)]$, 则 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g)$ 为 g 的严格递减函数;
- 如果 $g \in [g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z), z]$, 则 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g)$ 为 g 的严格递增函数,

即最小值在 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = g^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 处取得.

当 $z \in [0, q^{-1}(1+\ell)]$ 时, 对任意 $g \in (0, z)$, 函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g) > 0$, 因此函数 $H^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z, g)$ 为变量 g 的严格递增函数, 所以最小值在 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = 0$ 处取得.

综上, 有 (3.23) 成立. 至此引理证明完毕. □

接下来将寻找一般函数形式的最优再保险问题, 转化为关于中间变量 Lagrange 乘子 ℓ 的单参数优化问题. 首先, 定义

$$\hat{g}^{\alpha}_{-1,\theta,a,\gamma}(z) := \lim_{\ell \to -1} \hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = z, \quad \hat{g}^{\alpha}_{\infty,\theta,a,\gamma}(z) := \lim_{\ell \to \infty} \hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z) = 0, \quad \text{a.s.} \tag{3.30}$$

和

$$\begin{aligned} &G^{\alpha}(g(Z)) := \mu(g(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)) + \frac{\zeta\alpha}{2}\left[\mathrm{E}g(Z) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}(g(Z))^2\right]^2, \\ &Q^{\alpha}(\ell) := G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z)), \end{aligned}$$

其中 $-1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. 不难验证, 在区间 $(-1, \infty)$ 上, 函数 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 关于 l 是严格单调递减的.

定理 3.2 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z)$ 为最优再保险形式, 即有

$$\inf_{g} G^{\alpha}(g(Z)) = \min_{-1 \leqslant \ell \leqslant \infty} G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z)).$$

证明 如果 $g(Z) = 0$ a.s., 则能选择 $\hat{g}^{\alpha}_{\infty,\theta,a,\gamma}(Z)$ 使得

$$\mu(g(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)) = \mu(\hat{g}^{\alpha}_{\infty,\theta,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(\hat{g}^{\alpha}_{\infty,\theta,a,\gamma}(Z)). \tag{3.31}$$

如果 $g(Z) = Z$ a.s., 则能取 $\hat{g}^{\alpha}_{-1,\theta,a,\gamma}(Z)$ 使得

$$\mu(g(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)) = \mu(\hat{g}^{\alpha}_{-1,\theta,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\sigma^2(\hat{g}^{\alpha}_{-1,\theta,a,\gamma}(Z)). \tag{3.32}$$

假定 $g(Z)$ 满足 $g(Z)\neq Z$ a.s. 且 $g(Z)\neq 0$ a.s., 根据函数的单调性可知, 存在 $\tilde{\ell}\in(-1,\infty)$ 使得

$$\mathrm{E}[\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z)]+\frac{\alpha}{2}\mathrm{E}[\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z)]^2=\mathrm{E}[g(Z)]+\frac{\alpha}{2}\mathrm{E}[g(Z)]^2. \tag{3.33}$$

同时, 由不等式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[H^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z,\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))]\\
&\quad=\frac{1+\theta}{a}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))}-1)+\gamma\mathrm{E}(Z-\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))^2+(1+\tilde{\ell})\mathrm{E}[\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z)]\\
&\qquad+\frac{1}{2}\alpha(1+\tilde{\ell})\mathrm{E}[\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z)]^2\\
&\quad\leqslant\frac{1+\theta}{a}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a(Z-g(Z))}-1)+\gamma\mathrm{E}(Z-g(Z))^2+(1+\tilde{\ell})\mathrm{E}g(Z)+\frac{1}{2}\alpha(1+\tilde{\ell})\mathrm{E}g^2(Z)\\
&\quad=\mathrm{E}[H^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z,g(Z))]
\end{aligned}$$

和 (3.33), 有

$$\mu(\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))+\frac{\alpha}{2}\sigma^2(\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))\leqslant\mu(g(Z))+\frac{\alpha}{2}\sigma^2(g(Z)). \tag{3.34}$$

这样, 对任何固定的 $g(Z)$, 总存在 $\tilde{\ell}\in[-1,\infty]$ 使得

$$G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z))\leqslant G^{\alpha}(g(Z)).$$

也就是说, 鲁棒最优再保险是具有 $\hat{g}^{\alpha}_{\tilde{\ell},\theta,a,\gamma}(Z)$ 形式的函数. 到此, 我们完成了证明. □

在前面的分析中, 将可行集 $\mathbb{G}$ 拓展到 $\mathcal{G}$. 下面的命题说明, 从可行集 $\mathcal{G}$ 中得到的最优策略也属于可行集 $\mathbb{G}$.

命题 3.3 对 $-1\leqslant\ell\leqslant\infty$, 函数 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 和 $z-\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 均为 z 的递增函数.

证明 注意到函数 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 和 $z-\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 在 $z=\frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}I_{\{-1\leqslant\ell\leqslant\theta\}}+h^{-1}(1+\ell)I_{\{\ell>\theta\}}$ 处是连续的, 仅需说明: 当 $z\geqslant\frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}I_{\{-1\leqslant\ell\leqslant\theta\}}+h^{-1}(1+\ell)I_{\{\ell>\theta\}}$ 时, $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 和 $z-\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 为 z 的递增函数.

容易说明 (3.19) 中的函数 $h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 关于 $g\in[0,z]$ 为严格递增函数, 而关于 z 为严格递减函数. 由此推出, $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 为 z 的严格递增函数. 另外, (3.19) 可以重写为

$$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)=-(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g)}-2\gamma(z-g)+1+\ell-\alpha(1+\ell)(z-g)+\alpha(1+\ell)z.$$

$h^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z,g)$ 为 $z-g$ 的严格递减函数, 同时为 z 的严格递增函数. 由此推出, $z-\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)$ 为 z 的递增函数. □

由命题 3.3 可知, $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(z)\in\mathbb{G}$.

定理 3.3 对任意固定的 $\alpha\geqslant 0$, 存在唯一的再保险函数 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(z)$ 满足

$$G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(z))=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z)).$$

证明 令 $\ell=\tan(q)$, 其中 $q\in[\arctan(-1),\frac{\pi}{2}]$. 根据连续函数的最值定理可知, 存在 $\ell^*=\tan(q^*)$ 使得

$$G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(z))=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z)).$$

下面证明唯一性. 假定存在两个不同的 $g_1(Z)$ 和 $g_2(Z)$ $(\mathrm{P}(g_1(Z)\neq g_2(Z))>0)$ 使得

$$G^{\alpha}(g_1(Z))=G^{\alpha}(g_2(Z))=\min_{g}G^{\alpha}(g(Z)).$$

设

$$\bar{g}(Z)=\frac{1}{2}g_1(Z)+\frac{1}{2}g_2(Z).$$

显然, $\bar{g}(Z)$ 仍然为可行策略. 注意到 $G(g(Z))$ 为关于 $g(Z)$ 的严格凸函数, 有

$$G^{\alpha}(\bar{g}(Z))<\frac{1}{2}G^{\alpha}(g_1(Z))+\frac{1}{2}G^{\alpha}(g_2(Z))=G^{\alpha}(g_1(Z))=G^{\alpha}(g_2(Z)),$$

这与 $g_1(Z)$ 和 $g_2(Z)$ 的定义矛盾.

至此完成了证明. □

由于采用了一个非常一般的再保险保费准则, 最优再保险形式相对比较复杂. 下面将呈现在一些特殊保费准则下的最优再保险策略形式.

首先, 当 $a\to 0$ 时, 即再保险保费采用一般的均值 - 方差保费准则, 经简单计算, 有下面的结果:

推论 3.1 当 $a\to 0$ 时,

(i) 如果 $-1\leqslant \ell^*\leqslant\theta$, 则有

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,0,\gamma}(z)=\begin{cases} z, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{\theta-\ell^*}{\alpha(1+\ell^*)},\\ \dfrac{2\gamma z+\theta-\ell^*}{2\gamma+\alpha(1+\ell^*)}, & z\geqslant \dfrac{\theta-\ell^*}{\alpha(1+\ell^*)};\end{cases}\tag{3.35}$$

(ii) 如果 $\theta\leqslant\ell^*\leqslant\infty$, 则有

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,0,\gamma}(z)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{\ell^*-\theta}{2\gamma},\\ \dfrac{2\gamma z+\theta-\ell^*}{2\gamma+\alpha(1+\ell^*)}, & z\geqslant \dfrac{\ell^*-\theta}{2\gamma}.\end{cases}\tag{3.36}$$

注 3.2 (期望值保费准则) 更进一步, 如果 $a\to 0$ 和 $\gamma\to 0$, 即再保险保费采用期望值保费准则, 则当 $\ell>\theta$ 时, 有 $\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,0,\gamma}(z)=0$. 这样, 最优再保险策略为超额损失再保险, 即

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,\theta,0,0}(z)=\begin{cases} z, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{\theta-\ell^*}{\alpha(1+\ell^*)},\\ \dfrac{\theta-\ell^*}{\alpha(1+\ell^*)}, & z\geqslant \dfrac{\theta-\ell^*}{\alpha(1+\ell^*)},\end{cases}\tag{3.37}$$

其中 $-1\leqslant\ell^*\leqslant\theta$.

其次, 在一般保费准则中, 令安全附加系数 $\theta=0$, 即再保险保费为指数和方差混合准则. 经简单计算, 有下面的结果:

推论 3.2 当 $\theta=0$ 时, 最优再保险策略为

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,0,a,\gamma}(z)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant z\leqslant q^{-1}(1+\ell^*),\\ g^{\alpha}_{\ell^*,0,a,\gamma}(z), & z\geqslant q^{-1}(1+\ell^*).\end{cases}\tag{3.38}$$

证明 由 (3.20) 知, 当 $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial \ell} g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z) = -\frac{1+\alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)}{a\mathrm{e}^{a(z-g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z))}+2\gamma+\alpha(1+\ell)} < 0, \tag{3.39}$$

从而表明 $g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)$ 为变量 ℓ 的递减函数. 另外,

$$\frac{\partial}{\partial \ell} Q^{\alpha}(\ell) = \int_{\frac{\theta-\ell}{\alpha(1+\ell)}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \ell} g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z) \cdot \hbar(z, g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) dF_Z(z),$$

其中

$$\begin{aligned}\hbar(z, g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) = &-\mathrm{e}^{a(z-g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z))} - 2\gamma(z - g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) + 1 + \alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z) \\ &+ \zeta\alpha\left[\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z))^2\right](1+\alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)).\end{aligned}$$

经分析, 有

$$\begin{aligned}\hbar(z, g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) &\geqslant -\mathrm{e}^{a(z-g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z))} - 2\gamma(z - g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) + 1 + \ell + \alpha(1+\ell) g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z) \\ &\quad + \zeta\alpha\left[\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z))^2\right](1+\alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) \\ &= h^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z, g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) + \zeta\alpha\left[\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z))^2\right](1+\alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) \\ &= \zeta\alpha\left[\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z)) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{E}(g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(Z))^2\right](1+\alpha g^{\alpha}_{\ell,0,a,\gamma}(z)) \\ &> 0.\end{aligned}$$

这样, 当 $\ell \in [-1, 0]$ 时,

$$\frac{\partial Q^{\alpha}(\ell)}{\partial \ell} \leqslant 0,$$

也就是, 当 $\ell \in [-1, 0]$ 时, $Q^{\alpha}(\ell)$ 为递减函数. 从而, 有

$$\min_{-1 \leqslant \ell \leqslant \infty} Q^{\alpha}(\ell) = \min_{0 \leqslant \ell \leqslant \infty} Q^{\alpha}(\ell),$$

这说明 $\ell^* \in [0, \infty]$. 至此完成了推论的证明. □

注 3.3 (i) (方差保费准则) 若 $\theta = 0$ 和 $a \to 0$, 即再保险保费采用方差保费准则, 则最优再保险策略为

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,0,0,\gamma}(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{\ell^*}{2\gamma}, \\ \dfrac{2\gamma z - \ell^*}{2\gamma + \alpha(1+\ell^*)}, & z \geqslant \dfrac{\ell^*}{2\gamma}. \end{cases} \tag{3.40}$$

特别地, 若 $\ell^* = 0$, 则有

$$\hat{g}^{\alpha}_{0,0,0,\gamma}(z) = \frac{2\gamma}{2\gamma+\alpha} z,$$

即最优再保险形式为比例再保险.

(ii) (指数保费准则) 若 $\theta=0$ 和 $\gamma=0$, 即再保险保费采用指数保费准则, 则最优再保险策略为

$$\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*,0,a,0}(z)=\begin{cases}0, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{\ln(1+\ell^*)}{a},\\ \psi^{-1}_{z,\ell^*}(1+\ell^*), & z\geqslant \dfrac{\ln(1+\ell^*)}{a},\end{cases} \tag{3.41}$$

其中 $0\leqslant \ell^*\leqslant\infty$,

$$\psi_{z,\ell}(y)=\mathrm{e}^{a(z-y)}-\alpha(1+\ell)y. \tag{3.42}$$

接下来确定值函数中的未知参数 α. 令

$$L(\alpha):=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}G^{\alpha}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z))=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}Q^{\alpha}(\ell),$$

则 HJB 方程 (3.16) 变为

$$L(\alpha)-\frac{\delta}{\lambda\alpha}-\frac{c}{\lambda}=0. \tag{3.43}$$

定理 3.4 假定 (3.10) 满足, 则方程 (3.43) 有唯一正根, 记为 α^*.

证明 容易说明, 当 $\alpha>0$ 时, $\mathrm{P}(\hat{g}^{\alpha}_{\ell^*(\alpha),\theta,a,\gamma}(Z)\neq 0)>0$.

当 $0<\alpha_1<\alpha_2$ 时,

$$\begin{aligned}L(\alpha_1)&=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}G^{\alpha_1}(\hat{g}^{\alpha_1}_{\ell,\theta,a,\gamma}(Z))\\&=G^{\alpha_1}(\hat{g}^{\alpha_1}_{\ell^*(\alpha_1),\theta,a,\gamma}(Z))\\&\leqslant G^{\alpha_1}(\hat{g}^{\alpha_2}_{\ell^*(\alpha_2),\theta,a,\gamma}(Z))\\&<G^{\alpha_2}(\hat{g}^{\ell^*(\alpha_2)}_{\alpha_2,\theta,a,\gamma}(Z))\\&=L(\alpha_2),\end{aligned}$$

这说明 $L(\alpha)$ 和 $L(\alpha)-\frac{\delta}{\lambda\alpha}-\frac{c}{\lambda}$ 均为 α 的严格递增函数.

经过计算, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty}\left(L(\alpha)-\frac{\delta}{\lambda\alpha}-\frac{c}{\lambda}\right)&\geqslant\frac{1+\theta}{a}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{aZ})-1)+\gamma\mathrm{E}[Z]^2-\frac{c}{\lambda}\\&>0.\end{aligned}$$

(i) 若 $\delta>0$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\left(L(\alpha)-\frac{\delta}{\lambda\alpha}-\frac{c}{\lambda}\right)&\leqslant\lim_{\alpha\to 0}\left(G^{\alpha}(g(Z))\,|_{g(Z)=Z,\,\mathrm{a.s.}}-\frac{\delta}{\lambda\alpha}-\frac{c}{\lambda}\right)\\&=-\infty;\end{aligned}$$

(ii) 若 $\delta=0$, 则有

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(L(\alpha)-\frac{c}{\lambda}\right)\leqslant\lim_{\alpha\to 0}\left(G^{\alpha}(g(Z))\,|_{g(Z)=Z,\,\mathrm{a.s.}}-\frac{c}{\lambda}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda \mathrm{E}[Z] - c}{\lambda} \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

综上所述, (3.43) 有唯一正根. □

基于以上的分析, 本节的主要结果可总结如下:

定理 3.5 优化问题 (3.4) 的值函数 $V(x)$ 具有表达式

$$
V(x) = \mathrm{e}^{-\alpha^* x}, \quad x \geqslant 0. \tag{3.44}
$$

相应地, 鲁棒最优再保险策略为

$$
g_t^*(Z) = \hat{g}^{\alpha^*}_{\ell^*(\alpha^*),\theta,a,\gamma}(Z), \tag{3.45}
$$

最优概率扭曲测度 (最坏市场情形) 为

$$
\phi_t^* = \zeta\alpha^* \left[\mathrm{E}[g_t^*(Z)] + \frac{\alpha^*}{2} \mathrm{E}[g_t^*(Z)]^2 \right].
$$

4 期望效用下的鲁棒再保险策略

上一节从风险控制的角度出发, 通过最小化折现破产概率的目标函数得到了鲁棒最优再保险策略. 考虑到公司决策者往往在控制风险的同时, 希望财富最大化, 因此, 本节将以最大化固定终端时刻下保险人的期望财富效用为目标, 将风险控制和财富最大化统一起来, 分别在 Cramér-Lundberg 跳模型 (2.12) 和扩散模型 (2.13) 两类盈余过程下研究鲁棒最优再保险策略. 在文献中, 广泛采用的效用函数保持递增性和凸性. 为了处理方便, 本文假定保险人具有风险厌恶系数为 η 的常数绝对风险厌恶 (constant absolute risk aversion) 偏好, 也就是决策者的效用函数具有如下指数形式:

$$
U(x) = -\frac{1}{\eta} \exp(-\eta x), \quad \eta > 0. \tag{4.1}
$$

4.1 Cramér-Lundberg 模型

本小节假设保险人的财富过程服从 Cramér-Lundberg 跳模型 (2.12). 定义具有模糊厌恶惩罚的值函数

$$
V(t,x) = \sup_{g\in\mathcal{G}} \inf_{\phi} \mathrm{E}\left[U(\tilde{X}_T^{g,\phi}) - \frac{\lambda}{2\zeta} \int_t^T \phi_s^2 V(s, \tilde{X}_s^{g,\phi}) \,\middle|\, \tilde{X}_t^{g,\phi} = x \right], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2}
$$

其中常数 $T > 0$ 为固定终端时刻, 其他参数与第 3 节中的表示一致.

应用标准的动态规划方法可以得到, 如果 $V(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}$, 则它满足下面的 HJB 方程:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{g\in\mathcal{G}} \inf_{\phi} \Big\{ [rx + c - \lambda\mu(g(Z)) + \lambda \mathrm{E} g(Z)] V_x'(t,x) + \lambda(1+\phi)\mathrm{E}[V(t, x - g(Z)) - V(t,x)] \\
&\quad + V_t'(t,x) - \frac{\lambda\phi^2}{2\zeta} V(t,x) \Big\} \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

和边界条件

$$V(T,x)=U(x). \tag{4.4}$$

应用常规证明方法, 有下面的验证定理 (由于证明过程类似, 这里略去):

定理 4.1 (验证定理) 若函数 $W(t,x)\in\mathcal{C}^{1,2}$ 是满足 (4.3) 和边界条件 (4.4) 的一个解, 则有 $V(t,x)=W(t,x)$. 进一步, 如果 $g^*(t,x,Z)$ 和 $\phi^*(t,x,Z)$ 满足

$$\begin{aligned}&[rx+c-\lambda\mu(g(Z))+\lambda\mathrm{E}g(Z)]W_x'(t,x)+\lambda(1+\phi)\mathrm{E}[W(t,x-g(Z))-W(t,x)]\\&\quad+W_t'(t,x)-\frac{\lambda\phi^2}{2\zeta}W(t,x)\\&\qquad=0,\end{aligned}$$

则鲁棒最优再保险策略和最坏情形下的密度过程分别为 $g_t^*(Z)=g^*(t,\tilde{X}_t^*,Z)$ 和 $\phi_t^*(Z)=\phi^*(t,\tilde{X}_t^*,Z)$, 也就是

$$V(t,x)=W(t,x)=V^{g^*,\phi^*}(t,x).$$

求解本节优化问题, 采用先猜解后验证的方法. 受 Browne [14] 启发, 猜测值函数具有如下形式:

$$V(t,x)=-\frac{1}{\eta}\exp(-\alpha(t)x+h(t)), \tag{4.5}$$

其中 $\alpha(t)=\eta\mathrm{e}^{r(T-t)}$, $h(t)$ 为关于 t 的待定函数. 根据边界条件可知, 函数 $h(t)$ 满足 $h(T)=0$.

应用微分和一些代数运算, 可得

$$V_t'(t,x)=V(t,x)(\alpha(t)rx+h'(t)), \tag{4.6}$$

$$V_x'(t,x)=-\alpha(t)V(t,x) \tag{4.7}$$

和

$$\mathrm{E}[V(t,x-g(Z))-V(t,x)]=V(t,x)[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)})-1]. \tag{4.8}$$

将 (4.6)–(4.8) 代入 (4.3), 得

$$\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi}\left\{h'(t)-\alpha(t)[c-\lambda\mu(g(Z))+\lambda\mathrm{E}g(Z)]+\lambda(1+\phi)[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)})-1]-\frac{\lambda\phi^2}{2\zeta}\right\}=0. \tag{4.9}$$

注意到, 上式左边是关于 ϕ 的二次型函数, 开口向下. 因此, 关于 ϕ 取微分, 有最大值点

$$\phi^*=\zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)})-1]. \tag{4.10}$$

再把 (4.10) 代入 (4.9), 得到

$$\inf_{g\in\mathcal{G}}\left\{h'(t)-\alpha(t)[c-\lambda\mu(g(Z))+\lambda\mathrm{E}g(Z)]+\lambda[\mathrm{E}\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)}-1]+\frac{\lambda\zeta}{2}[\mathrm{E}\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)}-1]^2\right\}=0. \tag{4.11}$$

对于变量 $g\in[0,z]$, 引入 Lagrange 函数

$$K^{\ell}(z,t,g)=\frac{\alpha(t)(1+\theta)}{a}(\mathrm{e}^{a(z-g)}-1)+\alpha(t)\gamma(z-g)^2+\mathrm{e}^{\alpha(t)g}+\ell\mathrm{e}^{\alpha(t)g}, \tag{4.12}$$

其中 ℓ 为 Lagrange 乘子. 首先, 有

$$\mathrm{E}[K^{\ell}(Z,t,g(Z))]=\alpha(t)[\mu(g(Z))-\mathrm{E}g(Z)]+(1+\ell)\mathrm{E}\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z)}. \tag{4.13}$$

此外, 将函数 $K(z,t,g)$ 关于变量 g 取微分, 得

$$\frac{\partial}{\partial g}K^{\ell}(z,t,g)=\alpha(t)k^{\ell}(z,t,g), \tag{4.14}$$

其中

$$k^{\ell}(z,t,g)=(1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)g}-(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g)}-2\gamma(z-g). \tag{4.15}$$

为了符号的方便, 记

$$\xi_t=\frac{1}{\alpha(t)}\ln\left(\frac{1+\theta}{1+\ell}\right).$$

引理 4.1 (i) 情形 1: $-1<\ell\leqslant\theta$.

若 $z\in(\xi_t,+\infty)$, 则总存在一根, 记 $g^{\ell}(z,t)\in[0,z]$, 使得

$$k^{\ell}(z,t,g^{\ell}(z,t))=0. \tag{4.16}$$

从而, 有

$$g_{\ell}^{*}(z,t):=\arg\inf_{0\leqslant g\leqslant z}K^{\ell}(z,t,g)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z\leqslant\xi_t,\\ g^{\ell}(z,t), & z\geqslant\xi_t.\end{cases} \tag{4.17}$$

(ii) 情形 2: $\theta\leqslant\ell<\infty$.

若 $z\in(q^{-1}(1+\ell),+\infty)$, 则总存在一根, 记 $g^{\ell}(z,t)\in[0,z]$, 使得

$$k^{\ell}(z,t,g^{\ell}(z,t))=0. \tag{4.18}$$

从而, 有

$$g_{\ell}^{*}(z,t):=\arg\inf_{0\leqslant g\leqslant z}K^{\ell}(z,t,g)=\begin{cases}0, & 0\leqslant z<q^{-1}(1+\ell),\\ g^{\ell}(z,t), & z\geqslant q^{-1}(1+\ell),\end{cases} \tag{4.19}$$

其中 $q(z)$ 的定义见 (3.28).

证明 将函数 $k^{\ell}(z,t,g)$ 关于变量 g 取微分, 得

$$\frac{\partial}{\partial g}k^{\ell}(z,t,g)=a(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g)}+2\gamma+(1+\ell)\alpha(t)\mathrm{e}^{\alpha(t)g}>0, \tag{4.20}$$

这表明 $k^{\ell}(z,t,g)$ 为 $g\in[0,z]$ 的严格递增函数. 注意到 $z\in\mathbb{R}_+$, θ、a 和 γ 为非负参数.

(i) 当 $-1\leqslant\ell\leqslant\theta$ 时, 显然,

$$k^{\ell}(z,t,0)=1+\ell-(1+\theta)\mathrm{e}^{az}-2\gamma z<0. \tag{4.21}$$

如果 $z\in(\xi_t,+\infty)$, 则有

$$k^{\ell}(z,t,z)=(1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)z}-(1+\theta)>0. \tag{4.22}$$

通过 (4.21) 和 (4.22) 可知, 存在唯一根使得 (4.16) 成立.

从上面分析可知, 若 $z \in [0, \xi_t]$, 则 $K^\ell(z,t,g)$ 为 g 的递减函数, 所以最小值在 $g(z) = z$ 处取得; 若 $z \in (\xi_t, +\infty)$, 则当 $g \in [0, g^\ell(z,t)]$ 时 $K^\ell(z,t,g)$ 关于 g 递减; 当 $g \in [g^\ell(z,t), z]$ 时 $K^\ell(z,t,g)$ 关于 g 递增, 所以最小值在 $g(z) = g^\ell(z,t)$ 处取得. 综上, (4.17) 成立.

(ii) 当 $\ell > \theta$ 时, 显然,

$$k^\ell(z,t,z) = (1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)z} - (1+\theta) > 0. \tag{4.23}$$

若 $z \in (q^{-1}(1+\ell), +\infty)$, 则有

$$k(z,t,0) = 1 + \ell - (1+\theta)\mathrm{e}^{az} - 2\gamma z < 0. \tag{4.24}$$

通过 (4.23) 和 (4.24) 可知, 存在唯一根使得 (4.18) 成立.

从上面分析可知, 若 $z \in [0, q^{-1}(1+\ell)]$, 则 $K^\ell(z,t,g)$ 是 g 的递增函数, 所以最小值在 $g(z) = 0$ 处取得; 若 $z \in (q^{-1}(1+\ell), +\infty)$, 则当 $g \in [0, g^\ell(z,t)]$ 时 $K^\ell(z,t,g)$ 是 g 的递减函数; 当 $g \in [g^\ell(z,t), z]$ 时 $K^\ell(z,t,g)$ 是 g 的递增函数, 所以最小值在 $g(z) = g^\ell(z,t)$ 处取得. 综上, (4.19) 成立.

至此, 完成了引理的证明. □

同样地, 可以证明最优策略也是在可行集 $\mathbb{G}$ 下的最优策略. 从命题 4.1 可知, $g^*_\ell(z,t) \in \mathbb{G}$.

命题 4.1 对固定的 ℓ 和 t, 函数 $g^*_\ell(z,t)$ 和 $z - g^*_\ell(z,t)$ 为 z 的递增函数.

证明 证明过程与命题 3.3 相似, 这里略去. □

接下来可以平行地证明, 对于一般函数形式的最优再保险策略, 可以转化为关于 Lagrange 参数 ℓ 的优化问题. 定义

$$g^*_{-1}(Z,t) := \lim_{\ell \to -1} g^*_\ell(Z,t) = Z, \quad g^*_\infty(Z,t) := \lim_{\ell \to \infty} g^*_\ell(Z,t) = 0, \quad \text{a.s.} \tag{4.25}$$

对 $\ell \in [-1, \infty]$, 令

$$\begin{aligned} &G(g(Z,t)) := \alpha(t)[\mu(g(Z,t)) - \mathrm{E}g(Z,t)] + \mathrm{E}\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z,t)} - 1 + \frac{\zeta}{2}[\mathrm{E}\mathrm{e}^{\alpha(t)g(Z,t)} - 1]^2, \\ &L(\ell) := L_{\theta,a,\gamma,\zeta}(\ell) = G(g^*_\ell(Z,t)). \end{aligned}$$

定理 4.2 $g^*_\ell(Z,t)$ 为最优再保险形式, 即有 $\inf_g G(g(Z,t)) = \min_{-1 \leqslant \ell \leqslant \infty} G(g^*_\ell(Z,t))$.

证明 证明过程与定理 3.2 相似, 此处略去. □

再接下来需要确定值函数中的未知函数 $h(t)$. 经计算, HJB 方程 (4.11) 变为

$$h'(t) - c\alpha(t) + \lambda \min_{-1 \leqslant \ell \leqslant \infty} L_{\theta,a,\gamma,\zeta}(\ell) = 0. \tag{4.26}$$

与定理 3.3 相似, 有下面的结果:

定理 4.3 存在唯一再保险策略 $g^*_{\ell^*}(Z,t)$ 使得

$$G(g^*_{\ell^*}(Z,t)) = \min_{-1 \leqslant \ell \leqslant \infty} G(g^*_\ell(Z,t)).$$

综合本小节的上述结果, 有下面的定理:

定理 4.4 优化问题 (4.2) 的值函数 $V(t,x)$ 为

$$V(t,x)=-\frac{1}{\eta}\exp(-\alpha(t)x+h(t)), \tag{4.27}$$

其中

$$h(t)=\int_t^T\{\lambda G(g_{\ell^*}^*(Z,s))-c\alpha(s)\}ds.$$

相应地, 鲁棒最优再保险策略为

$$g_t^*(Z)=g_{\ell^*}^*(Z,t),$$

最优概率扭曲测度 (最坏市场情形) 为

$$\phi_t^*=\zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_t^*(Z)})-1]. \tag{4.28}$$

推论 4.1 若 $\theta_2\geqslant\theta_1$, $a_2\geqslant a_1$, $\gamma_2\geqslant\gamma_1$, $\zeta_2\geqslant\zeta_1$, 则有 $V_2(t,x)\leqslant V_1(t,x)$, 其中

$$V_i(x)=V_{\theta_i,a_i,\gamma_i,\zeta_i}(x).$$

证明 通过直接分析计算, 可得

$$\begin{aligned}
\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}L_{\theta_1,a_1,\gamma_1,\zeta_1}(\ell)&=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}G(g_\ell^*(Z,t))=\inf_g G(g(Z,t))\\
&=\alpha(t)\left[\frac{1+\theta_1}{a_1}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a_1(Z-g_{\ell_1^*}^*(Z,t))})-1)+\gamma_1\mathrm{E}(Z-g_{\ell_1^*}^*(Z,t))^2\right]\\
&\quad+[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_1^*}^*(Z,t)})-1]+\frac{\zeta_1}{2}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_1^*}^*(Z,t)})-1]^2\\
&\leqslant\alpha(t)\left[\frac{1+\theta_1}{a_1}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a_1(Z-g_{\ell_2^*}^*(Z,t))})-1)+\gamma_1\mathrm{E}(Z-g_{\ell_2^*}^*(Z,t))^2\right]\\
&\quad+[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_2^*}^*(Z,t)})-1]+\frac{\zeta_1}{2}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_2^*}^*(Z,t)})-1]^2\\
&\leqslant\alpha(t)\left[\frac{1+\theta_2}{a_2}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{a_2(Z-g_{\ell_2^*}^*(Z,t))})-1)+\gamma_2\mathrm{E}(Z-g_{\ell_2^*}^*(Z,t))^2\right]\\
&\quad+[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_2^*}^*(Z,t)})-1]+\frac{\zeta_2}{2}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g_{\ell_2^*}^*(Z,t)})-1]^2\\
&=\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}L_{\theta_2,a_2,\gamma_2,\zeta_2}(\ell).
\end{aligned}$$

由 (4.26), 有

$$\begin{aligned}
h'_{\theta_2,a_2,\gamma_2,\zeta_2}(t)&=c\alpha(t)-\lambda\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}L_{\theta_2,a_2,\gamma_2,\zeta_2}(\ell)\\
&\leqslant c\alpha(t)-\lambda\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}L_{\theta_1,a_1,\gamma_1,\zeta_1}(\ell)\\
&=h'_{\theta_1,a_1,\gamma_1,\zeta_1}(t).
\end{aligned}$$

注意到 $h_{\theta_i,a_i,\gamma_i}(T)=0$, 有 $h_{\theta_2,a_2,\gamma_2}(t)\geqslant h_{\theta_1,a_1,\gamma_1}(t)$. 从而,

$$V_2(t,x)=-\frac{1}{\eta}\exp(-\alpha(t)x+h_{\theta_2,a_2,\gamma_2}(t))$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -\frac{1}{\eta}\exp(-\alpha(t)x + h_{\theta_1,a_1,\gamma_1}(t)) \\
&= V_1(t,x).
\end{aligned}
$$

证明完成. □

下面在一些特殊保费准则下, 呈现了最优鲁棒再保险策略的具体形式. 定义函数

$$
r_{\ell,t}(g) = \frac{1}{2\gamma}[(1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)g} - (1+\theta) + 2\gamma g]. \tag{4.29}
$$

经过计算, 容易得到下面的推论:

推论 4.2 若 $a \to 0$, 即再保险保费采用均值 - 方差保费准则, 则

(i) 当 $-1 \leqslant \ell^* \leqslant \theta$ 时,

$$
g^*_{\ell^*}(z,t) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z \leqslant \xi_t, \\ r^{-1}_{\ell^*,t}(z), & z \geqslant \xi_t; \end{cases} \tag{4.30}
$$

(ii) 当 $\theta \leqslant \ell^* \leqslant \infty$ 时,

$$
g^*_{\ell^*}(z,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{\ell^*-\theta}{2\gamma}, \\ r^{-1}_{\ell^*,t}(z), & z \geqslant \dfrac{\ell^*-\theta}{2\gamma}. \end{cases} \tag{4.31}
$$

注 4.1 (期望值保费准则) 如果 $a \to 0$ 和 $\gamma \to 0$, 即再保险保费采用期望值保费准则, 则最优再保险策略为超额损失再保险策略, 即

$$
g^*_{\ell^*}(z,t) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z \leqslant \xi_t, \\ \xi_t, & z \geqslant \xi_t. \end{cases}
$$

推论 4.3 若 $\theta \to 0$, 即再保险保费采用指数和方差混合准则, 则鲁棒最优再保险策略为

$$
g^*_{\ell^*}(z,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z < q^{-1}(1+\ell^*), \\ g^{\ell^*}(z,t), & z \geqslant q^{-1}(1+\ell^*), \end{cases} \tag{4.32}
$$

其中 $0 \leqslant \ell^* \leqslant \infty$.

证明 经过计算分析, 当 $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$ 时,

$$
\frac{\partial}{\partial \ell} g^{\ell}(z,t) = -\frac{\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}}{\alpha(t)(1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)} + a\mathrm{e}^{a(z-g^{\ell}(z,t))} + 2\gamma} < 0, \tag{4.33}
$$

从而 $g^{\ell}(z,t)$ 为 ℓ 的递减函数. 求导得

$$
L'(\ell) = \alpha(t)\int_{\xi_t}^{\infty} \frac{\partial g^{\ell}(z,t)}{\partial \ell} \cdot \hbar(z, g^{\ell}(z,t)) dF_Z(z),
$$

其中

$$
\hbar(z, g^{\ell}(z,t)) = -(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g^{\ell}(z,t))} - 2\gamma(z - g^{\ell}(z,t)) + \mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)} + \zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(Z,t)}) - 1]\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}.
$$

经分析, 有

$$\begin{aligned}\hbar(z,g^{\ell}(z,t)) &\geqslant -(1+\theta)\mathrm{e}^{a(z-g^{\ell}(z,t))}-2\gamma(z-g^{\ell}(z,t))+(1+\ell)\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}\\ &\quad+\zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(Z,t)})-1]\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}\\ &=k^{\ell}(z,t,g^{\ell}(z,t))+\zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(Z,t)})-1]\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}\\ &=\zeta[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(Z,t)})-1]\mathrm{e}^{\alpha(t)g^{\ell}(z,t)}\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

这样, 当 $\ell\in[-1,0]$ 时, $L'(\ell)\leqslant 0$, 即, 当 $\ell\in[-1,0]$ 时, $L(\ell)$ 为递减函数. 从而, 有

$$\min_{-1\leqslant\ell\leqslant\infty}L(\ell)=\min_{0\leqslant\ell\leqslant\infty}L(\ell),$$

这说明 $\ell^*\in[0,\infty]$. □

注 4.2 (i) (方差保费准则) 当 $\theta\to 0$ 和 $a\to 0$ 时, 即再保险保费采用方差保费准则, 最优再保险策略为

$$g^*_{\ell^*}(z,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{\ell^*}{2\gamma},\\ r^{-1}_{\ell^*,t}(z), & z\geqslant\dfrac{\ell^*}{2\gamma},\end{cases}\tag{4.34}$$

其中 $0\leqslant\ell^*\leqslant\infty$;

(ii) (指数保费准则) 当 $\theta=0$ 和 $\gamma=0$ 时, 即再保险保费采用指数保费准则, 最优再保险策略为

$$g^*_{\ell^*}(z,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{\ln(1+\ell^*)}{a},\\ \dfrac{az-\ln(1+\ell^*)}{a+1/\alpha(t)}, & z\geqslant\dfrac{\ln(1+\ell^*)}{a},\end{cases}\tag{4.35}$$

其中 $0\leqslant\ell^*\leqslant\infty$.

4.2 扩散模型

本小节假设保险人的财富过程服从扩散模型 (2.13), 研究期望终端财富效用最大化下的鲁棒最优再保险问题. 首先, 定义值函数

$$V(t,x)=\sup_{g\in\mathcal{G}}\inf_{\phi}\mathrm{E}\left[U(\hat{X}^{g,\phi}_T)-\frac{\lambda}{2\zeta}\int_t^T\phi_s^2V(s,\hat{X}^{g,\phi}_s)\,\middle|\,\hat{X}^{g,\phi}_t=x\right],\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{4.36}$$

其中各个参数与前文中的定义保持一致.

同样地, 利用动态规划原理可知, 如果 $V(t,x)\in\mathcal{C}^{1,2}$, 则它满足下面的 HJB 方程:

$$\begin{aligned}&\sup_{g\in\mathcal{G}}\inf_{\phi}\Big\{V'_t(t,x)+[rx+c-\lambda\mu(g(Z))-\lambda\phi\mathrm{E}g]V'_x(t,x)\\ &\quad+\frac{\lambda}{2}(1+\phi)\sigma^2(g(Z))V''_{xx}(t,x)-\frac{\lambda\phi^2}{2\zeta}V(t,x)\Big\}\\ &\quad=0,\end{aligned}\tag{4.37}$$

以及边界条件

$$V(T,x)=U(x). \tag{4.38}$$

平行于上一小节 Cramér-Lundberg 跳模型的分析, 猜测 $V(t,x)$ 有如下形式:

$$V(t,x)=-\frac{1}{\eta}\exp(-\alpha(t)x+h(t)), \tag{4.39}$$

其中 $\alpha(t)$ 定义见 (4.5). 同样地, 根据边界条件可知 $h(T)=0$. 进一步, 上式中将函数 $V(t,x)$ 关于变量 x 取二次微分, 可得

$$V''_{xx}(t,x)=\alpha^2(t)V(t,x). \tag{4.40}$$

把 (4.6)、(4.7) 和 (4.40) 代入 HJB 方程 (4.37) 中, 有

$$\inf_{g\in\mathcal{G}}\sup_{\phi}\left\{h'(t)-\alpha(t)[c-\lambda\mu(g(Z))-\lambda\phi\mathrm{E}g]+\frac{1}{2}\alpha^2(t)\lambda(1+\phi)\sigma^2(g)-\frac{\lambda\phi^2}{2\zeta}\right\}=0. \tag{4.41}$$

更进一步, 上式左边是关于 ϕ 的二次型函数, 开口向下. 关于 ϕ 取微分, 得最大值点

$$\phi^*=\zeta\alpha(t)\left[\mathrm{E}g+\frac{\alpha(t)}{2}\mathrm{E}g^2\right]. \tag{4.42}$$

把 (4.42) 代入 (4.41), 得

$$\begin{aligned}-h'(t)+c\alpha(t)&=\lambda\alpha(t)\inf_g\left[\mu(g(Z))+\frac{\alpha(t)}{2}\sigma^2(g(Z))+\frac{\zeta\alpha(t)}{2}\left[\mathrm{E}g+\frac{\alpha(t)}{2}\mathrm{E}g^2\right]^2\right]\\&=\lambda\alpha(t)\inf_g G^{\alpha(t)}(g(Z)).\end{aligned} \tag{4.43}$$

我们发现, 至此可以借助第 3 节分析中的结论. 根据定理 3.2 可知,

$$\arg\left\{\inf_{g\in\mathcal{G}}\{G^{\alpha(t)}(g(Z))\}\right\}=\hat{g}^{\alpha(t)}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(Z). \tag{4.44}$$

综上, 有下面的定理:

定理 4.5 优化问题 (4.36) 的值函数 $V(t,x)$ 为

$$V(t,x)=-\frac{1}{\eta}\exp(-\eta x\mathrm{e}^{r(T-t)}+h(t)), \tag{4.45}$$

其中

$$h(t)=\int_t^T\{\lambda\alpha(t)G^{\alpha(t)}(\hat{g}^{\alpha(t)}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(Z))-c\alpha(t)\}ds.$$

相应地, 鲁棒最优再保险策略为

$$g^*_t(Z)=\hat{g}^{\alpha(t)}_{\ell^*,\theta,a,\gamma}(Z), \tag{4.46}$$

最优概率扭曲测度 (最坏市场情形) 为

$$\phi^*=\zeta\alpha(t)\left[\mathrm{E}[g^*_t(Z)]+\frac{\alpha(t)}{2}\mathrm{E}[g^*_t(Z)]^2\right]. \tag{4.47}$$

5 数值分析

在前面两节中, 对于一般的混合保费准则 (2.1), 在两种不同目标函数下分别得到了最优再保险策略的一般解析形式. 本节重点对最优再保险策略和值函数进行数值与敏感性分析. 为了比较上的方便, 下面给出基准情形下的模型参数设定.

正如前文所述, 本文采用的混合型再保险准则包含了均值、方差和指数等常见的保费准则. 因此, 完全可以通过调整准则 (2.1) 中 3 个参数的赋值 (a, θ, γ), 来分析在各种特殊再保费准则下的最优策略. 考虑到篇幅所限, 以及对于一般的均值和方差保费策略的数值分析已经在文献 [39] 中有所涉及, 本节重点分析在指数保费准则下的最优再保险策略和值函数, 基准情形参数设定为

$$\theta = 0, \quad \gamma = 0, \quad a = 0.4.$$

对于值函数, 由于在最小化折现破产概率 (第 3 节) 和最大化终端期望效用 (第 4 节) 两个值函数下获得的最优再保险策略具有类似的结构, 因此, 本节仅选取值函数 (3.3) 在 $\delta = 0$ 时作为例子进行分析, 即值函数为最小化保险公司的破产概率. 在基准情形下, 保险公司模糊厌恶系数设定为 $\zeta = 0.1$, 目标函数为最小化公司的破产概率.

另外, 对于保险业务的盈余过程, 假设单次理赔额服从参数为 $1/\mu$ 的指数分布, 即 $Z \sim \exp(1/\mu)$, 则有 $\mathrm{E}[Z] = \mu$. 不失一般性, 理赔频率参数设定为 $\lambda = 1$. 保费率 c 满足不等式 (3.10). 在基准情形下, 设定 $\mu = 2$ 和 $c = 3.8$.

首先, 分析模糊厌恶对最优再保险策略的影响. 图 1 给出了保险公司模糊厌恶系数分别为 $\zeta = 0.01$、$\zeta = 0.10$ 和 $\zeta = 0.50$ 三种情形下的最优风险自留函数和值函数. 从图中可以看到, 一方面最优风险自留函数是递增的, 满足可行策略 (iv) 的条件, 且风险自留函数已经不是传统的逐段线性的情况, 而呈现出凸函数形式. 这表明, 随着损失的增加, 风险自留增加量递增. 出现这个结果主要是因为指数保费准则的影响. 由于指数保费准则对于大损失部分, 保费附加较大, 再加之损失为轻尾分布, 因此, 保险公司最优策略为以较低成本尽可能将小额损失部分转让出去, 相对而言, 自留较多的大额损失部分.

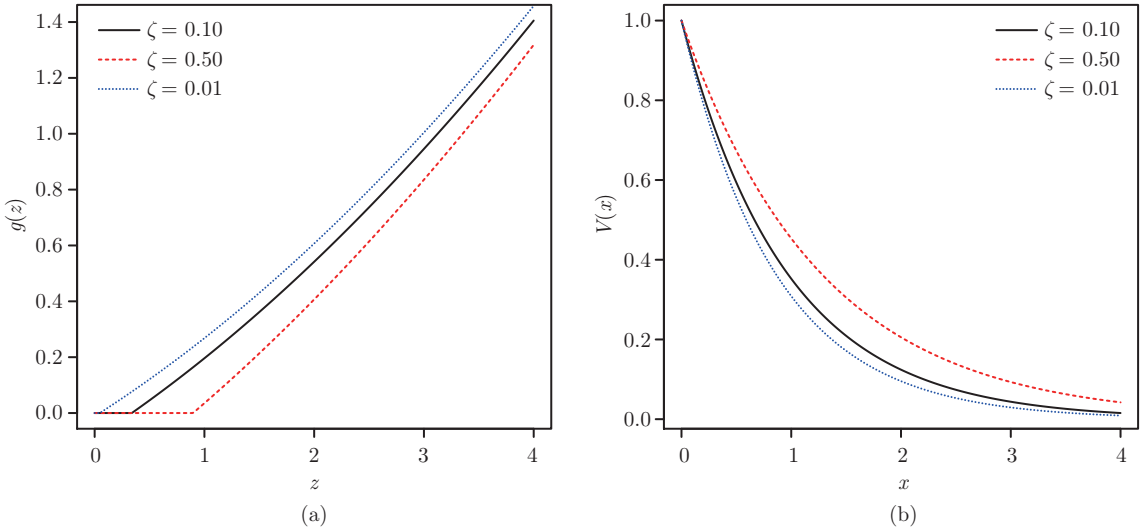

图 1 (网络版彩图) 模糊厌恶对最优风险自留函数 (a) 和值函数 (b) 的影响

另一方面, 可以看到, 随着保险公司对保险业务模型不确定性的增加 (模糊厌恶系数 ζ 越大), 保险公司的风险自留也在减小. 也就是说, 保险公司对风险越不确定, 越倾向于将更多的风险通过再保险转让出去, 这符合我们的预期. 此外, 随着模型不确定性的增加, 保险公司的最优值函数也在增加, 即优化中的最坏情形变得更坏, 这是值函数中存在对模糊厌恶的惩罚部分所导致的.

此外, 来看再保险价格对风险自留函数和值函数的影响. 图 2 呈现了再保险保费准则参数 $a = 0.45$、$a = 0.40$ 和 $a = 0.25$ 三种情形下的最优风险自留函数和值函数. 从图中可以看出, 再保险价格越贵 (对应参数 a 越大), 保险公司风险自留就越多, 相应的惩罚后的最小破产概率 (值函数) 就越大, 这与直观相符. 此外, 从图 2(a) 中可以看出, 再保险价格的增加, 对于最优风险自留的影响随着损失额的增加而增大, 对于大额损失部分影响十分显著, 这也与指数保费准则有重要的关系. 当 $a = 0.25$ 时, 转让全部风险需要的再保险保费为 4, 与保费收入 $c = 3.8$ 比较接近, 再保险成本很低, 因此, 此时保险公司的风险自留会较少.

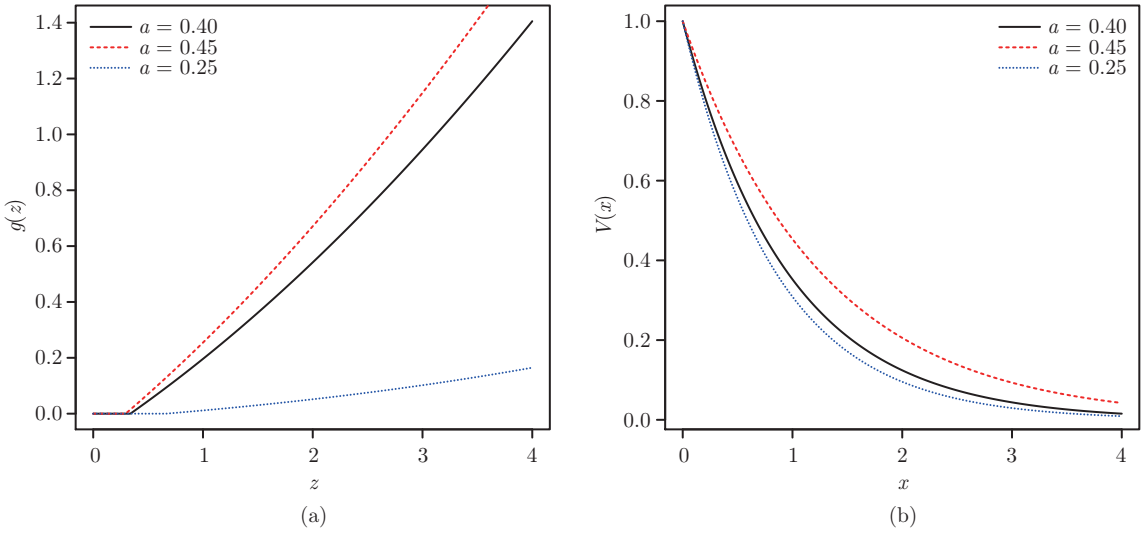

图 2 (网络版彩图) 再保险价格对最优风险自留函数 (a) 和值函数 (b) 的影响

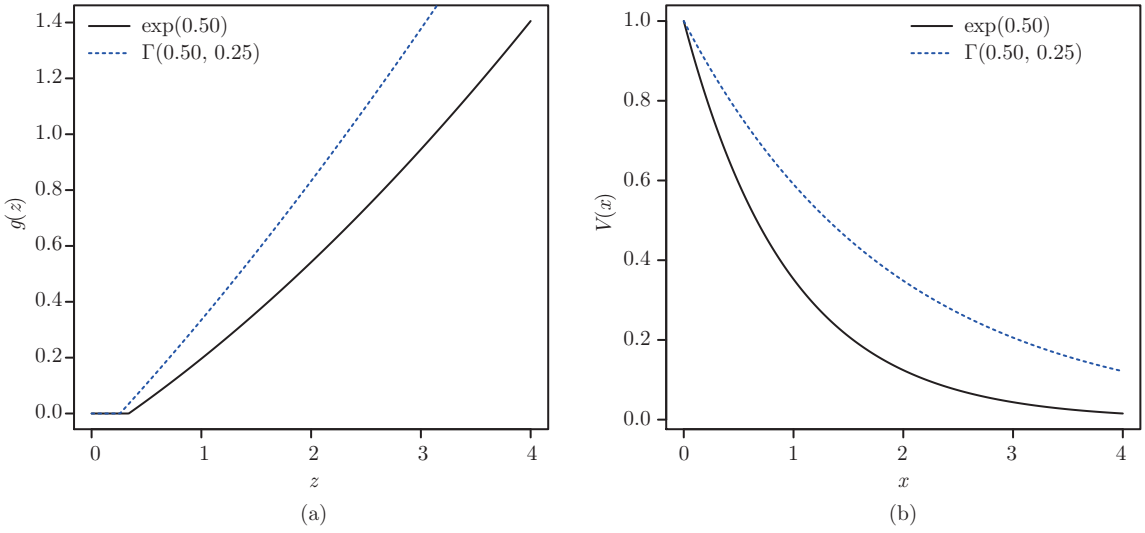

图 3 (网络版彩图) 损失风险对最优风险自留函数 (a) 和值函数 (b) 的影响

最后来看损失分布的风险大小对保险公司风险自留函数和值函数的影响, 如图 3 所示. 选用另外一种 Gamma 损失分布 $\Gamma(0.50, 0.25)$ 来与基准情形下指数损失分布 $\exp(0.50)$ 进行对比. 二者具有相同的平均损失 $\mu = 2$, 但指数损失分布的方差为 4, 而 Gamma 损失分布的方差为 8. 从图 3 中可以看出, 损失分布的风险越大 (方差越大), 那么最优风险自留越多. 同样, 随着损失额的增加, 二者最优风险自留的差距就越大. 自然地, 损失分布的风险越大 (方差越大), 相应惩罚后的最小破产概率 (值函数) 就越大.

6 小结

最优再保险问题, 本质上是风险在保险公司与再保险公司之间的分摊问题. 最优的再保险形式通常取决于再保险的保费准则, 在以往的研究中, 往往假设再保险保费准则为某种常见的单一准则, 如期望值准则和方差准则等, 在单一准则下证明了一些明确的结果. 事实上, 不同保费准则会使得最优再保险形式完全不同. 例如, 在期望准则下, 最优为停止损失再保险; 而在方差保费准则下, 最优则为比例再保险. 为了探讨和发现最优再保险形式在不同保费准则之间的变化过程, 本文在一类很广的混合保费准则下研究最优再保险问题. 同时, 考虑到保险人对风险模型的不确定, 在模型中引入了模糊厌恶, 分别在 Cramér-Lundberg 跳模型以及其扩散近似模型下进行研究. 本文采用最小化折现破产概率和最大化期望终端财富效用两个目标, 在一般可行策略集中, 分别获得了最优策略具有新颖的曲线结构, 这种新型再保险策略不同于比例再保险策略、超额损失再保险策略等分段线性再保险策略. 特别地, 一般保费准则退化为某种特殊保费准则时, 最优再保险形式与以前的经典结论相吻合. 本文仅仅是从保险人的角度进行优化决策, 在今后的研究中, 可以同时考虑再保险人的决策, 利用博弈理论来寻找最优的再保险策略.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的有益评论和宝贵改进意见.

参考文献

1 Borch K. Reciprocal reinsurance treaties. Astin Bull, 1960, 1: 170–191
2 Borch K. Equilibrium in a reinsurance market. Econometrica, 1962, 30: 424–444
3 Arrow K J. Uncertainty and the welfare economics of medical care. Am Econ Rev, 1963, 53: 941–973
4 Schmidli H. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. Ann Appl Probab, 2002, 12: 890–907
5 Liu Y, Ma J. Optimal reinsurance/investment problems for general insurance models. Ann Appl Probab, 2009, 19: 1495–1528
6 Bäuerle N. Benchmark and mean-variance problems for insurers. Math Methods Oper Res, 2005, 62: 159–165
7 Bai L, Zhang H. Dynamic mean-variance problem with constrained risk control for the insurers. Math Methods Oper Res, 2008, 68: 181–205
8 Shen Y, Zeng Y. Optimal investment-reinsurance strategy for mean-variance insurers with square-root factor process. Insurance Math Econom, 2015, 62: 118–137
9 Deng C, Zeng X, Zhu H. Non-zero-sum stochastic differential reinsurance and investment games with default risk. European J Oper Res, 2018, 264: 1144–1158
10 Asmussen S, Højgaard B, Taksar M. Optimal risk control and dividend distribution policies: Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation. Finance Stoch, 2000, 4: 299–324
11 Cadenillas A, Choulli T, Taksar M, et al. Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm. Math Finance, 2006, 16: 181–202
12 Højgaard B, Taksar M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion model. Scand Actuar J, 1998, 2: 166–180
13 Taksar M I, Markussen C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios. Finance Stoch, 2003, 7: 97–121
14 Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin. Math Oper Res, 1995, 20: 937–958

15 Cai J, Wei W. Optimal reinsurance with positively dependent risks. Insurance Math Econom, 2012, 50: 57–63
16 Bernard C, He X, Yan J A, et al. Optimal insurance design under rank-dependent expected utility. Math Finance, 2015, 25: 154–186
17 Asimit V, Boonen T J. Insurance with multiple insurers: A game-theoretic approach. European J Oper Res, 2018, 267: 778–790
18 Hipp C, Taksar M. Optimal non-proportional reinsurance control. Insurance Math Econom, 2010, 47: 246–254
19 Liang X, Young V R. Minimizing the probability of ruin: Optimal per-loss reinsurance. Insurance Math Econom, 2018, 82: 181–190
20 Meng H, Zhang X. Optimal risk control for the excess of loss reinsurance policies. Astin Bull, 2010, 40: 179–197
21 Meng H, Siu T K, Yang H. Optimal insurance risk control with multiple reinsurers. J Comput Appl Math, 2016, 306: 40–52
22 Zhou M, Cai J. Optimal dynamic risk control for insurers with state-dependent income. J Appl Probab, 2014, 51: 417–435
23 Zhang X, Meng H, Zeng Y. Optimal investment and reinsurance strategies for insurers with generalized mean-variance premium principle and no-short selling. Insurance Math Econom, 2016, 67: 125–132
24 Tan K S, Wei P, Wei W, et al. Optimal dynamic reinsurance policies under a generalized Denneberg's absolute deviation principle. European J Oper Res, 2020, 282: 345–362
25 Uppal R, Wang T. Model misspecification and underdiversification. J Finance, 2003, 58: 2465–2486
26 Anderson E W, Hansen L P, Sargent T J. A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. J Eur Econ Assoc, 2003, 1: 68–123
27 Jaimungal S, Sigloch G. Incorporating risk and ambiguity aversion into a hybrid model of default. Math Finance, 2012, 22: 57–81
28 Branger N, Larsen L S. Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk. J Bank Finance, 2013, 37: 5036–5047
29 Hogarth R M, Kunreuther H. Risk, ambiguity, and insurance. J Risk Uncertainty, 1989, 2: 5–35
30 Chen H, Joslin S, Tran N K. Rare disasters and risk sharing with heterogeneous beliefs. Rev Financ Stud, 2012, 25: 2189–2224
31 Korn R, Menkens O, Steffensen M. Worst-case-optimal dynamic reinsurance for large claims. Eur Actuar J, 2012, 2: 21–48
32 Pun C S, Wong H Y. Robust investment-reinsurance optimization with multiscale stochastic volatility. Insurance Math Econom, 2015, 62: 245–256
33 Li D, Zeng Y, Yang H. Robust optimal excess-of-loss reinsurance and investment strategy for an insurer in a model with jumps. Scand Actuar J, 2018, 2018: 145–171
34 Wang N, Siu T K. Robust reinsurance contracts with risk constraint. Scand Actuar J, 2020, 2020: 419–453
35 Yi B, Viens F G, Li Z, et al. Robust optimal strategies for an insurer with reinsurance and investment under benchmark and mean-variance criteria. Scand Actuar J, 2015, 2015: 725–751
36 Zeng Y, Li D, Gu A. Robust equilibrium reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer in a model with jumps. Insurance Math Econom, 2016, 66: 138–152
37 Bayraktar E, Zhang Y. Minimizing the probability of lifetime ruin under ambiguity aversion. SIAM J Control Optim, 2015, 53: 58–90
38 Young V R, Zhang Y. Lifetime ruin under ambiguous hazard rate. Insurance Math Econom, 2016, 70: 125–134
39 Li D, Young V R. Optimal reinsurance to minimize the discounted probability of ruin under ambiguity. Insurance Math Econom, 2019, 87: 143–152
40 Hu D, Chen S, Wang H. Robust reinsurance contracts with uncertainty about jump risk. European J Oper Res, 2018, 266: 1175–1188
41 Hu D, Wang H. Reinsurance contract design when the insurer is ambiguity-averse. Insurance Math Econom, 2019, 86: 241–255
42 Meng H, Liao P, Siu T K. Continuous-time optimal reinsurance strategy with nontrivial curved structures. Appl Math Comput, 2019, 363: 124585
43 Grandel J. Aspects of Risk Theory. New York: Springer-Verlag, 1991
44 Maenhout P J. Robust portfolio rules and asset pricing. Rev Financ Stud, 2004, 17: 951–983
45 Liu B, Zhou M. Robust portfolio selection for individuals: Minimizing the probability of lifetime ruin. J Ind Manag Optim, 2021, 17: 937–952
46 Choulli T, Taksar M, Zhou X Y. A diffusion model for optimal dividend distribution for a company with constraints on risk control. SIAM J Control Optim, 2003, 41: 1946–1979

Robust reinsurance strategy under ambiguity-averse

Hui Meng, Li Wei & Ming Zhou

Abstract In this paper, we study the robust optimal reinsurance policy for an insurer with ambiguity aversion in the continuous time model within a class of mixed reinsurance premium criteria, under which several common premium criteria are included. By minimizing the discounted ruin probability of the insurer and maximizing the expected wealth utility of the insurer at the terminal moment, the explicit expressions of the value function and the corresponding robust optimal reinsurance strategy are obtained in both the Cramér-Lundberg jump model and its diffusion approximation model. For the optimization problem of minimizing the discounted ruin probability of the insurer, we prove that the value function has the exponential form by giving an equivalent form of the value function of the optimization problem. In addition, to solve the optimization problems, we construct the auxiliary Lagrangian function of the optimization problem skillfully, and then explicitly obtain the expression of robust optimal reinsurance strategy under the general mixed reinsurance criteria. It turns out that the optimal reinsurance strategy has a non trivial structure in the form of curve, which is very different from piecewise linear reinsurance strategy (such as proportional reinsurance strategy, excess loss reinsurance strategy and layer reinsurance strategy). This greatly enriches the results of optimal reinsurance. Finally, we show the sensibilities of some model parameters (including ambiguity-aversion level) to the optimal reinsurance strategy and value function.

Keywords **ambiguity-averse, robust reinsurance strategy, ruin probability, expected utility, mixed premium principle**

MSC(2020) **62P05, 91G05, 93E20**

doi: 10.1360/SSM-2020-0258