圆填充整体收敛速度估计

蓝师义¹, 刘劲松^{2*}

1. 广西民族大学理学院, 南宁 530006;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: lanshiyi@gxun.edu.cn, liujisong@math.ac.cn

收稿日期: 2018-10-26; 接受日期: 2019-03-06; 网络出版日期: 2019-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11661011, 11671057 和 11688101) 和广西自然科学基金 (批准号: 2016GXNSFAA380099) 资助项目

摘要 假设 D 是一个其边界为拟圆周的平面有界单连通区域, P_ϵ 是一个几乎填满 D 的半径为 ϵ 的正则六边形圆填充, 则在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内存在一个组合等价于 P_ϵ 的圆填充. 众所周知, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, D 内半径为 ϵ 的圆与 $\mathbb{U}$ 内对应的圆之间的离散规范化映射 f_ϵ 整体一致收敛于 Riemann 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$. 本文将给出这个整体收敛 $f_\epsilon \rightarrow f$ 的速度估计.

关键词 圆填充 共形映射 拟圆周 收敛速度

MSC (2010) 主题分类 30G25, 30E10, 52C26

1 引言

复平面内的一个圆填充是实现一个特定相切模式的一族圆的构型. 圆填充理论在复分析与离散微分几何的交叉学科中是一个快速发展的研究领域. 这个领域研究最近所取得的成就起源于 Thurston^[1] 关于利用圆填充近似逼近 Riemann 映射的想法. 后来, Rodin 和 Sullivan^[2] 证明了 Thurston 方案的收敛性, 随后出现了大量关于圆填充及其相关领域的研究 (参见文献 [3–9] 等). 迄今为止, 作为共形映射的离散近似的圆填充在双曲三维空间多面体的构造^[10–12]、解析函数的逼近^[13–17]、离散解析函数的发展^[7, 18, 19] 和医学图像处理^[20, 21] 等方面研究起着关键的作用. 圆填充及其应用的最新研究进展可参见文献 [22–25].

圆填充收敛于 Riemann 映射 f 已被大家进行了深入而又广泛的研究. 六边形圆填充收敛于 f 的速度估计在文献 [26] 中给出, 它分别收敛于 f 、 f' 和 f'' 的速度显式估计在文献 [27] 中得到, He 和 Schramm^[16] 证明了六边形圆填充 C^∞ 收敛于 f . 一般地, 我们已经知道有界度和无界度圆填充也分别收敛于 f (参见文献 [15, 28]). 然而, 注意到上面所提到的所有收敛性结果都是局部的. 假设 D 是一个 Jordan 区域, 文献 [29] 已经证明了六边形圆填充整体一致收敛于 Riemann 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$. 本文所关心的是这个整体一致收敛的速度. 考虑复平面上一个其边界为 Jordan 曲线的有界单连通区

英文引用格式: Lan S Y, Liu J S. Estimate of the rate of global convergence of circle packings (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1061–1070, doi: 10.1360/SCM-2018-0759

域 D , 我们用一个半径为 ϵ 的正则六边形圆填充填满 D , 则圆填充定理给出单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内存在一个组合等价的圆填充. 如果用 f_ϵ 表示 D 内圆与 $\mathbb{U}$ 内对应圆之间的离散映射, 我们的目标是, 要给出 f_ϵ 整体一致收敛于 Riemann 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$ 的速度估计. 要实现这个目标, 首先证明由圆填充诱导的 D 与 $\mathbb{U}$ 的两个近似区域都是拟圆周; 接下来, 构造从 D 的近似区域到 $\mathbb{U}$ 的近似区域的近似映射; 最后基于文献 [30] 的一个涉及边界结构模的结果, 我们将导出 f_ϵ 整体一致收敛于 f 的一个速度显式估计.

虽然我们的方法类似于文献 [26, 定理 5] 和 [27, 引理 2.3] 的方法, 但下面的显著不同: 首先, f_ϵ 局部一致收敛于 f 的速度估计在文献 [26, 27] 中得到, 也就是说, 其结果限制于 D 的某一个紧子集; 然而, 这里讨论 f_ϵ 整体一致收敛于 f 的速度, 即我们的估计涉及 D 的整个近似区域. 其次, 在文献 [26, 27] 中得到的估计与 D 的边界的正则性无关; 而我们的估计依赖于 D 的边界的正则性, 即进一步要求 D 的边界是一个拟圆周, 这允许我们能够应用文献 [30] 的结果 (参见引理 2.1).

本文余下内容的结构如下: 第 2 节简要介绍关于圆填充、拟圆周、结构模与整体一致收敛等基本概念, 并给出一些相关结果. 第 3 节将证明 D 的近似区域与 $\mathbb{U}$ 的近似区域都是拟圆周, 同时构造 Riemann 映射 f 的近似映射 f_ϵ . 第 4 节给出 f_ϵ 整体一致收敛于 f 的速度显式估计.

2 预备知识

本节简要给出将在后文中用到的关于圆填充、拟圆周、结构模与整体一致收敛等基本概念及一些相关结果, 更详细的有关内容可参见文献 [7, 29, 30].

2.1 圆填充

定义 2.1 复平面上一个圆填充 P 是一个具有指定相切模式且其内部不相交的一族圆的构型. 特别地, 若 P 中每个圆都有 6 个相邻圆, 则称 P 为一个六边形圆填充; 更进一步, 如果一个六边形圆填充 P 的每个圆都有相同的半径, 则称之为正则的.

圆填充 P 载体是指用直线段连结 P 中相邻圆的中心所得到的一个基础几何复形, 记为 $\text{carr}(P)$. 用 $|\text{carr}(P)|$ 表示由 $\text{carr}(P)$ 形成的多边形区域.

关于单位圆盘内圆填充的基本存在性和唯一性, 我们有下面的圆填充定理 (参见文献 [7]).

命题 2.1 (圆填充定理) 假设 T 是一个闭拓扑圆盘的有限三角剖分, 则在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内存在一个实现 T 的圆填充 P 使得 P 的边界圆相切于 $\partial\mathbb{U}$, 而且, 圆填充 P 对于 $\mathbb{U}$ 的 Möbius 变换来说是唯一的.

2.2 拟圆周

定义 2.2 一条 Jordan 曲线 Γ 称为一个拟圆周, 如果它是有界折转, 即存在一个常数 $c > 1$ 使得对一切 $z_1, z_2 \in \Gamma$ 均有

$$\text{diam}(J(z_1, z_2)) \leq c|z_1 - z_2|,$$

其中 $J(z_1, z_2)$ 是指 Γ 上连结 z_1 和 z_2 且有较小直径的的子弧段.

这个几何条件蕴含一个拟圆周不能访问这样一点 z_1 , 即当它漫游很远后又返回到很接近 z_1 的点. 上面最小的常数 c 可以看成是 Γ 正则性的一个测度. 我们也知道每个拟圆周都是单位圆在一个 Riemann 球面自身的拟共形映射下的像.

一个区域称为一个拟圆, 如果它的边界是一个拟圆周.

2.3 结构模

定义 2.3 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个包含原点的有界单连通区域. 设 γ 是 D 内一条不通过原点的割线, D' 是指 D 的两个子区域中不包含原点的那个区域. 对于任意 $\delta > 0$, 考虑 D 内满足 $\text{diam}(\gamma) \leq \delta$ 的所有可能割线 γ , 则 D 的边界的结构模 $\eta(\delta)$ 定义为

$$\eta(\delta) := \sup_{\text{diam}(\gamma) \leq \delta} \text{diam}(D'),$$

其中 $\text{diam}(\cdot)$ 表示一条曲线或者一个区域的直径.

从某种意义上讲, 结构模 $\eta(\delta)$ 就是 D 的边界非正则性的一个测度. 关于模结构与共形映射的关系, 我们有以下结果, 其证明参见文献 [30, 定理 VII].

引理 2.1 假设 D 和 D' 表示两个单连通区域使得 $D' \subset D$ 且 $z = 0$ 位于 D' 内. 令 $\eta(\delta)$ 表示 $\partial D'$ 的模结构, ϱ 表示 0 到 $\partial D'$ 的距离. 假设 $\text{dist}(\partial D, \partial D') < \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, $\epsilon < \varrho/64$. 令 ϕ 和 ψ 分别表示把 D 和 D' 映到 $\mathbb{U}$ 的共形映射且满足规范化条件 $\phi(0) = 0$ 和 $\phi'(0) > 0$, 以及 $\psi(0) = 0$ 和 $\psi'(0) > 0$. 若 $\eta(\delta) \leq c\delta$ 对于某个常数 $c > 0$ 成立, 则对任意 $z \in D'$, 有

$$|\phi(z) - \psi(z)| \leq C\epsilon^{1/2} \log \frac{2}{\epsilon},$$

其中 $C > 0$ 是一个只依赖于 c 、 ϱ 和 D 的直径的常数.

2.4 收敛性

定义 2.4 假设 D_n 和 D'_n 是在 Carathéodory 意义下分别收敛于单连通区域 D 和 D' 的两个复平面内的 Jordan 区域序列. 令 $f_n : D_n \rightarrow D'_n$ 是一个同胚序列, $f : D \rightarrow D'$ 是某个同胚.

(i) 称 f_n 局部一致收敛于 f , 如果对任意紧子集 $E \subset D$ 和任意 $\epsilon > 0$, 存在一个自然数 $N = N(\epsilon, E)$ 使得对一切 $n \geq N$ 与所有 $z \in E$, 都有

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

(ii) 进一步假设 D 和 D' 是 Jordan 区域, 则称 f_n 整体一致收敛于 f : 若对于任意 $\epsilon > 0$ 存在一个自然数 $N = N(\epsilon)$ 和 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 使得对于任意 $n \geq N$, 以及一切 $z_1 \in D_n$, $z_2 \in D$ 且满足 $|z_1 - z_2| \leq \delta$, 有

$$|f_n(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

给定复平面内的一个有界单连通区域 D , 我们用半径为 ϵ 的正则六边形圆填充 D , 则由圆填充定理知, 存在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内一个组合同构的圆填充. 令 f_ϵ 表示 D 半径为 ϵ -圆与 $\mathbb{U}$ 内不同半径圆之间的对应, 则下面结果, 其证明参见文献 [2] 和 [29, 推论 4.4].

命题 2.2 (i) 近似映射 $f_\epsilon : D^\epsilon \rightarrow U^\epsilon$ 是一致 K -拟共形的. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, f_ϵ 局部一致收敛于 Riemann 映射 $f : D \rightarrow \mathbb{U}$.

(ii) 如果进一步假设 D 是一个 Jordan 区域, 则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 近似映射 f_ϵ 整体一致收敛于 Riemann 映射 $f : D \rightarrow \mathbb{U}$.

注 2.1 近似映射 f_ϵ 局部一致收敛于 f 的速度估计首先在文献 [26] 中给出, 随后在文献 [27] 中被改进, 即得到收敛速度的显式估计. 本文进一步讨论当 D 的边界是拟圆周时 f_ϵ 整体一致收敛于 f 的速度估计.

3 近似映射的构造

本节基于圆填充定理 (命题 2.1), 首先, 构造 Riemann 映射的定义域和值域的近似区域, 并证明在假设定义域的边界是一个拟圆周的条件下这些近似区域都是拟圆; 其次, 将构造 Riemann 映射的近似映射.

假设 D 是复平面内其边界为拟圆周的一个有界单连通区域, 并指定任意两个不同点 $z_0, z_1 \in D$. 令 f 表示把 D 映到单位圆盘 $\mathbb{U}$ 且满足规范化条件 $f(z_0) = 0$ 和 $f(z_1) > 0$ 的 Riemann 映射.

3.1 近似区域

本小节应用圆填充技术, 构造 D 与 $\mathbb{U}$ 的近似区域, 并证明这些近似区域的边界都是拟圆周, 同时我们也将得到近似区域的边界与被近似区域的边界之间的距离估计.

对于任意小 $\epsilon > 0$, 令 P^ϵ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 内半径为 ϵ 的正则六边形圆填充, 即它是由半径为 ϵ 、中心在格点 $\{2\epsilon(m + n\omega) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 的圆组成, 其中 $\omega = e^{i\pi/3}$.

我们构造近似于 D 的一个三角剖分单连通子区域如下: 考虑包含于 D 的 P^ϵ 的子填充 $\tilde{P}_D^\epsilon$. 令 P_D^ϵ 表示包含最接近于 z_0 的圆的 $\tilde{P}_D^\epsilon$ 的连通分支. 令 p_0^ϵ 表示 P_D^ϵ 内一个与 z_0 距离不超过 ϵ 的圆, p_1^ϵ 表示 P_D^ϵ 内某一个与 z_1 的距离不超过 ϵ 的圆, 则 P_D^ϵ 的载体 $\text{carr}(P_D^\epsilon)$ 是 D 内一个近似于 D 的闭拓扑圆盘的几何三角剖分. 记 $D^\epsilon = |\text{carr}(P_D^\epsilon)|$, 则 D^ϵ 就是所要求的 D 的近似区域, 即当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, D^ϵ 趋近于 D . 更进一步地有下面的引理:

引理 3.1 假设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个其边界为拟圆周的有界单连通区域, 则 D^ϵ 的边界 ∂D^ϵ 也是一个拟圆周, 且处处与 ∂D 的距离不超过 3ϵ .

证明 由 D^ϵ 的构造容易看出, ∂D^ϵ 的每一点与 ∂D 的距离都小于 3ϵ . 因此, 余下只需证明 ∂D^ϵ 是一个拟圆周.

设 $z, w \in \partial D^\epsilon$ 是任意两个点, 首先考虑 $|z - w| < 2\epsilon$ 的情形. 利用 ∂D^ϵ 是由格宽为 2ϵ 的三角形网格 $\text{carr}(P_D^\epsilon)$ 的边构成的一条 Jordan 曲线, 可得

$$\text{diam}(J(z, w)) \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}|z - w|, \quad (3.1)$$

其中 $J(z, w) \subset \partial D^\epsilon$ 是指连接 z 与 w 且有较小直径的弧段.

现在假设 $|z - w| \geq 2\epsilon$, 令 $\tilde{z}$ 与 $\tilde{w}$ 表示 ∂D 上分别最接近于 z 和 w 的两个点. 显然, $|z - \tilde{z}|$ 和 $|w - \tilde{w}|$ 都不超过 3ϵ . 设 γ_1 和 γ_2 分别为连结 z 和 $\tilde{z}$ 以及 w 和 $\tilde{w}$ 的两条线段. 首先, 假设曲线 $\Gamma = J(z, w) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ 在 D 内隔离 $J(\tilde{z}, \tilde{w})$ 和 z_0 . 令 T_j ($j = 1, 2, \dots, N$) 表示位于 D^ϵ 的外面但其边界接触 $J(z, w)$ 的那些格三角形. 因为 Γ 隔离 z_0 和 $J(\tilde{z}, \tilde{w})$, 所以, 由 Jordan 曲线定理并结合 D^ϵ 的构造推出每个 T_j 相交于 $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup J(\tilde{z}, \tilde{w})$, 从而有

$$\text{diam}(\Gamma) \leq \text{diam}(J(\tilde{z}, \tilde{w})) + 6\epsilon.$$

由于 ∂D 是一个拟圆周, 因此存在一个常数 $A > 0$ 使得

$$\text{diam}(J(\tilde{z}, \tilde{w})) \leq A|\tilde{z} - \tilde{w}|.$$

由此得到

$$\text{diam}(J(z, w)) \leq \text{diam}(\Gamma) \leq A|z - w| + 6(A + 1)\epsilon. \quad (3.2)$$

其次, 如果 Γ 在 D 内不隔离 $J(\tilde{z}, \tilde{w})$ 与 z_0 , 则由于 Γ 是 D 的一条割线, 因此, $(\partial D^\epsilon \setminus J(z, w)) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ 在 D 内隔离 $J(\tilde{z}, \tilde{w})$ 与 z_0 . 于是重复应用前一段的论证, 得到

$$\text{diam}(\partial D^\epsilon \setminus J(z, w)) \leq \text{diam}J(\tilde{z}, \tilde{w}) + 6\epsilon.$$

但 $J(z, w)$ 的定义给出 $\text{diam}J(z, w) \leq \text{diam}(\partial D^\epsilon \setminus J(x, y))$. 所以推出在这种情形下 (3.2) 也成立.

由 (3.1) 和 (3.2) 得到, 对于任意两点 $z, w \in \partial D^\epsilon$ 均有

$$\text{diam}(J(z, w)) \leq (4A + 3)|z - w|, \quad (3.3)$$

从而, ∂D^ϵ 是一个拟圆周. 因此, 我们完成了这个引理的证明. $\square$

根据命题 2.1 可知, 存在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内一个组合等价于 P_D^ϵ 且其边界圆相切于 $\partial \mathbb{U}$ 的圆填充 $\tilde{P}^\epsilon$. 令 $p^\epsilon \rightarrow \tilde{p}^\epsilon$ 表示把 P_D^ϵ 内的圆映到 $\tilde{P}^\epsilon$ 内对应圆的离散对应映射. 通过 $\mathbb{U}$ 的 Möbius 变换, 我们可以规范化 $\tilde{P}^\epsilon$ 使得 (i) 对应于 p_0^ϵ 的 $\tilde{P}^\epsilon$ 的圆 $\tilde{p}_0^\epsilon$ 的中心在原点; (ii) 对应于 p_1^ϵ 的 $\tilde{P}^\epsilon$ 的圆 $\tilde{p}_1^\epsilon$ 的中心在正实轴. 令 $U^\epsilon = |\text{carr}(\tilde{P}^\epsilon)|$, 其中 $\text{carr}(\tilde{P}^\epsilon)$ 表示 $\tilde{P}^\epsilon$ 的载体, 则 $U^\epsilon \subset \mathbb{U}$ 就是所要求的 $\mathbb{U}$ 的近似多边形区域. 同时我们有下面的引理:

引理 3.2 近似区域 U^ϵ 的边界 ∂U^ϵ 是一个拟圆周, 且处处与 $\partial \mathbb{U}$ 的距离不超过 $C_D \epsilon^{\pi^2/24}$, 其中 $C_D > 0$ 是一个只依赖于 z_0 到 ∂D 距离的常数.

证明 由文献 [26, 推论 3.3] 得到 $\tilde{P}^\epsilon$ 的每一个边界圆的半径至多等于 $C_D \epsilon^{\pi^2/24}$, 其中 $C_D > 0$ 是一个只依赖于 z_0 到 ∂D 距离的常数, 所以推出 ∂U^ϵ 上每一个点与 $\partial \mathbb{U}$ 的距离都不超过 $C_D \epsilon^{\pi^2/24}$. 因此, 余下只需证明 ∂U^ϵ 是一个拟圆周. 事实上, 因为 ∂U^ϵ 处处与 $\partial \mathbb{U}$ 的距离不超过 $C_D \epsilon^{\pi^2/24}$, 同时由 U^ϵ 的构造知, ∂U^ϵ 是 $\mathbb{U}$ 内的一条简单闭曲线. 另一方面, 很清楚 $\partial \mathbb{U}$ 是一个拟圆周. 所以, 类似于引理 3.1 的证明, 我们推出这个引理成立. $\square$

3.2 近似映射

区域 D 内圆填充 P_D^ϵ 与 $\mathbb{U}$ 内圆填充 $\tilde{P}^\epsilon$ 之间的组合等价性可以通过重心坐标诱导一个从 D^ϵ 到 U^ϵ 的自然映射.

更具体地, 令 f_ϵ 是这样一个映射, 它把 D^ϵ 的每一个顶点映到 U^ϵ 的对应顶点, 然后把每个点 $z \in \Delta$ 映到 $\tilde{\Delta}$ 内具有同样重心坐标的点, 其中 Δ 是 D^ϵ 内任意一个三角形; $\tilde{\Delta}$ 是 U^ϵ 内对应的三角形. 显然, 映射 f_ϵ 是连续且分片仿射的. 更进一步, 命题 2.2(ii) 给出当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, f_ϵ 整体一致收敛于满足规范化条件 $f(z_0) = 0$ 和 $f(z_1) > 0$ 的 Riemann 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$.

为了得到一致收敛 $f_\epsilon \rightarrow f$ 的整体显式速度估计, 我们需要以适当的方式修改近似映射 f_ϵ . 这将由下面三个步骤完成:

第 1 步 把近似区域 D^ϵ 分成两个部分.

令 $P_{(1)}^\epsilon$ 表示 P_D^ϵ 的这样一个子填充, 即它的每个圆与 ∂D 的距离都大于或者等于 2ϵ . 令 $D_{(1)}^\epsilon \subset D^\epsilon$ 表示连结 $P_{(1)}^\epsilon$ 的每一对边界圆的中心所组成的一个多边形区域, 则 D^ϵ 被分成 $D_{(1)}^\epsilon$ 和 $D^\epsilon \setminus D_{(1)}^\epsilon$ 两部分. 相应地, U^ϵ 也被分成 $U_{(1)}^\epsilon$ 和 $U^\epsilon \setminus U_{(1)}^\epsilon$ 两部分.

第 2 步 构造 $D_{(1)}^\epsilon$ 内的近似映射.

对于 $P_{(1)}^\epsilon$ 内任意三个两两相切圆 (如 p_i, p_j 和 p_k) 围成的空隙 $I \subset D_{(1)}^\epsilon$, 令 M_I 是唯一的把三个相切点 $p_i \cap p_j, p_j \cap p_k$ 和 $p_k \cap p_i$ 分别映到对应的三个点 $\tilde{p}_i \cap \tilde{p}_j, \tilde{p}_j \cap \tilde{p}_k$ 和 $\tilde{p}_k \cap \tilde{p}_i$ 的 Möbius 变换, 其中 $\tilde{p}_i, \tilde{p}_j$ 和 $\tilde{p}_k$ 为 $\tilde{P}^\epsilon$ 内的对应圆, 则 M_I 把空隙 I 映到 $U_{(1)}^\epsilon$ 内对应的空隙. 这些 Möbius 变换

$\{M_I\}_{I \subset D_{(1)}^\epsilon}$ 粘合起来形成一个从 $D_{(1)}^\epsilon$ 的空隙的并集到 $U_{(1)}^\epsilon$ 的空隙的并集的共形映射 $\tilde{h}$. 同时, $\tilde{h}$ 把 $P_{(1)}^\epsilon$ 的每一个内部圆映到 $\tilde{P}^\epsilon$ 内的对应圆. 对于 $P_{(1)}^\epsilon$ 的每个内部圆 p , 记 $\hat{p}$ 表示由 p 围成的圆盘. 应用文献 [29, 第 398 和 399 页] 或 [31, 第 196 和 197 页] 的技术, 我们可以延拓边界映射 $\tilde{h}|_p: p \rightarrow \tilde{p}$ 到一个拟共形映射 $\hat{h}|_p$, 它把圆盘 $\hat{p}$ 映到 $\tilde{p}$ 围成的圆盘. 由此得到一个 K -拟共形映射 $\hat{h}$, 它把 $P_{(1)}^\epsilon$ 的空隙与内部圆所围成圆盘的并集 $G_1 \subset D_{(1)}^\epsilon$ 映到 $U_{(1)}^\epsilon$ 内对应的并集 $\tilde{G}_1$.

接着我们拟共形延拓 $\hat{h}$ 到 $D_{(1)}^\epsilon \setminus G_1$. 注意到对于 $P_{(1)}^\epsilon$ 的每一对边界圆, 环引理 [2] 给出 $\tilde{P}^\epsilon$ 内对应圆的半径有一致有界的比率, 这结合 $D_{(1)}^\epsilon$ 与 G_1 的定义可以推出 $\hat{h}$ 一致拟共形延拓到 $D_{(1)}^\epsilon \setminus G_1$ 使得它的像是 $U_{(1)}^\epsilon \setminus \tilde{G}_1$. 因此得到一个把 $D_{(1)}^\epsilon$ 映到 $U_{(1)}^\epsilon$ 的 K -拟共形映射 h .

第 3 步 D^ϵ 内近似映射的构造. 定义 f 的近似映射 $\tilde{f}_\epsilon$ 如下: 当 $z \in D_{(1)}^\epsilon$ 时, $\tilde{f}_\epsilon(z) := h(z)$; 当 $z \in D^\epsilon \setminus D_{(1)}^\epsilon$ 时, $\tilde{f}_\epsilon(z) = f_\epsilon(z)$. 由于 $h: D_{(1)}^\epsilon \rightarrow U_{(1)}^\epsilon$ 是一个 K -拟共形同胚, 因此, 结合命题 2.2(i), 推出 $\tilde{f}_\epsilon$ 是一个从 D^ϵ 到 U^ϵ 的 K -拟共形同胚, 这就是我们所要求的 f 的近似映射.

为了使记号简单, 我们将得到的近似映射 $\tilde{f}_\epsilon$ 仍然记为 f_ϵ , 则有下列的引理:

引理 3.3 对于每一个为某 m -生成正则六边形圆填充中心的 $P_{(1)}^\epsilon$ 的内部圆 p , 如上面令 $\hat{p}$ 表示由 p 所围成的圆盘, 则限制映射 $f_\epsilon|_{\hat{p}}$ 在除了一个 Lebesgue 测度为 $O(1/m^2) \cdot \text{Area}(\hat{p})$ 的集合之外是共形的.

证明 由上面 $P_{(1)}^\epsilon$ 和 f_ϵ 的定义并结合文献 [29, 引理 2.2] 或 [27, 引理 1.1] 知该引理成立. $\square$

4 收敛速度的估计

回顾第 3 节构造的近似映射 f_ϵ , 本节证明, 在假设区域 D 的边界是一个拟圆周围的条件下, f_ϵ 整体一致收敛于 Riemann 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$.

令 D_1 和 D_2 是 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内的两个 Jordan 区域, 定义距离 $\rho(D_1, D_2)$ 为

$$\rho(D_1, D_2) := \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{z \in \partial D_1} d(z, \phi(z)),$$

其中 Φ 是一切从 ∂D_1 到 ∂D_2 的保向同胚的集合, 而 $d(\cdot, \cdot)$ 表示 $\hat{\mathbb{C}}$ 上两点间的球面距离, 则有下列的引理, 它将整体一致收敛性的问题归结为在整个近似区域上的一致收敛性问题.

引理 4.1 令 D_n, D'_n, D 和 D' 表示 Jordan 区域使得 $\rho(D_n, D) \rightarrow 0$ 和 $\rho(D'_n, D') \rightarrow 0$. 假设 $f_n: D_n \rightarrow D'_n$ 是一列 K -拟共形同胚, 且 $f: D \rightarrow D'$ 是某个共形映射, 则 f_n 整体一致收敛于 f 充分必要条件是, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在一个自然数 $N = N(\epsilon)$ 使得对任意 $n \geq N$ 与一切 $z \in D_n$, 均有

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

证明 显然, 从整体一致收敛的定义可以得到必要性, 因此, 我们只需证明充分性. 事实上, 由 D 和 D' 是 Jordan 区域, 以及 $f: D \rightarrow D'$ 是一个共形映射, 可以推出 f 在 $\bar{D}$ 内一致连续. 从而, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在某个 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 使得对于任意满足 $|z_1 - z_2| < \delta$ 的 $z_1, z_2 \in D$, 都有

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.1)$$

另一方面, 利用充分性的假设可知, 存在一个 $N = N(\epsilon)$ 使得对于任意 $n \geq N$ 和一切 $z \in D_n$, 都有

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.2)$$

于是, 由 (4.1) 和 (4.2) 得到对于任意 $n \geq N$, 以及满足 $|z_1 - z_2| < \delta$ 的 $z_1 \in D_n$ 和 $z_2 \in D$, 有

$$|f_n(z_1) - f(z_2)| \leq |f_n(z_1) - f(z_1)| + |f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

这推出充分性成立. $\square$

利用引理 4.1, 为了估计整体一致收敛 $f_\epsilon \rightarrow f$ 的速度, 我们只需找出 $\sup_{z \in D^\epsilon} |f_\epsilon(z) - f(z)|$ 的收敛速度, 这里 D^ϵ 是第 3.1 小节定义的 D 的近似区域. 我们有下面的定理:

定理 4.1 假设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个其边界为拟圆周的有界单连通区域, 且 $z_0, z_1 \in D$ 是指定的两个点. 令 $f: D \rightarrow \mathbb{U}$ 是满足规范化条件 $f(z_0) = 0$ 和 $f(z_1) > 0$ 的 Riemann 映射, f_ϵ 是如在第 3.2 小节中构造的 f 的近似映射, 则存在一个只依赖于 D 的直径、 ∂D 正则性测度与 z_0 到 ∂D 距离的常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{z \in D^\epsilon} |f_\epsilon(z) - f(z)| \leq C\epsilon^{1/7-\nu} \quad (4.3)$$

对于任意固定 $0 < \nu < 1/7$ 都成立.

为了证明定理 4.1, 我们需要下面的引理.

引理 4.2 令 $\phi_{D^\epsilon}: D^\epsilon \rightarrow \mathbb{U}$ 是满足规范化条件 $\phi_{D^\epsilon}(z_0) = 0$ 和 $\phi_{D^\epsilon}(z_1) > 0$ 的共形映射, 则存在一个只依赖于 ∂D 的正则性测度与 D 的直径的常数 $C > 0$ 使得, 对于任意固定的 $0 < \sigma < 1/2$, 都成立

$$\sup_{z \in D^\epsilon} |\phi_{D^\epsilon}(z) - f(z)| \leq C\epsilon^{1/2-\sigma}. \quad (4.4)$$

证明 由引理 3.1 知, ∂D^ϵ 是一个拟圆周, 即存在一个只依赖于 ∂D 的正则性测度的常数 $c > 0$ 使得

$$\text{diam}(J(z, w)) \leq c|z - w| \quad (4.5)$$

对于任意两点 $z, w \in \partial D^\epsilon$ 都成立, 其中 $J(z, w)$ 表示连结 z 与 w 且有较小直径的 ∂D^ϵ 的子弧段.

由 (4.5) 以及结构模的定义可推出, 存在一个只依赖于 c 和 D 的直径的常数 $C > 0$ 使得 ∂D^ϵ 的结构模 η^ϵ 对于任意小的 $\delta > 0$ 都满足

$$\eta^\epsilon(\delta) \leq C\delta.$$

注意到 $D^\epsilon \subset D$ 且引理 3.1 给出 ∂D^ϵ 上的每一个点与 ∂D 的距离都不超过 3ϵ . 因此, 由引理 2.1 并结合规范化条件 $\phi_{D^\epsilon}(z_0) = 0$, $\phi_{D^\epsilon}(z_1) > 0$, 推出

$$\sup_{z \in D^\epsilon} |\phi_{D^\epsilon}(z) - f(z)| \leq C\epsilon^{1/2} |\log \epsilon|,$$

从而, (4.4) 成立. $\square$

引理 4.3 令 $\phi_{U^\epsilon}: U^\epsilon \rightarrow \mathbb{U}$ 表示满足规范化条件 $\phi_{U^\epsilon}(0) = 0$ 和 $\phi_{U^\epsilon}(f_\epsilon(z_1)) > 0$ 的 Riemann 映射, 则存在一个只依赖于距离 $d(z_0, \partial D)$ 的常数 $C > 0$ 使得对于任意固定的 $0 < \tau < \pi^2/48$, 都有

$$\sup_{z \in U^\epsilon} |\phi_{U^\epsilon}(f_\epsilon(z)) - f_\epsilon(z)| \leq C\epsilon^{\pi^2/48-\tau}. \quad (4.6)$$

证明 引理 3.2 给出 ∂U^ϵ 是一个拟圆周且 ∂U^ϵ 上每一点与 $\partial \mathbb{U}$ 的距离都不超过 $C_D \epsilon^{\pi^2/24}$, 其中 $C_D > 0$ 是一个只依赖于 z_0 到 ∂D 距离的常数. 于是, 类似于引理 4.2 的证明, 从引理 2.1 得到

$$\sup_{z \in U^\epsilon} |\phi_{U^\epsilon}(f_\epsilon(z)) - f_\epsilon(z)| \leq C \epsilon^{\pi^2/48} |\log \epsilon^{\pi^2/24}|,$$

其中 $C > 0$ 是一个只依赖于 z_0 到 ∂D 距离的常数, 从而推出 (4.6) 成立. $\square$

引理 4.4 假设 f_ϵ 、 ϕ_{D^ϵ} 和 ϕ_{U^ϵ} 的定义如上面, 则存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{z \in D^\epsilon} |\phi_{D^\epsilon}(z) - \phi_{U^\epsilon} \circ f_\epsilon \circ \phi_{D^\epsilon}^{-1}(\phi_{D^\epsilon}(z))| < C \epsilon^{1/7-\nu} \quad (4.7)$$

对于任意固定 $0 < \nu < 1/7$ 都成立.

为了证明引理 4.4, 我们需要下面的引理:

引理 4.5 (i) 假设 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ 是定义于 $\mathbb{U}$ 内的单叶函数, 且 $\nu > 0$, 则存在一个只依赖于 ν 的常数 $C > 0$ 使得

$$\mu(E) \leq C(\mu(f(E)))^{1/3-\nu}$$

对于任意 Lebesgue 可测子集 $E \subset \mathbb{U}$ 都成立, 其中 $\mu(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度.

(ii) 假设 f 是 $\mathbb{U}$ 内满足 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$ 的拟共形自同胚, 如果除了一个测度为 ϵ 的子集外拟共形映射 f 都是共形的, 则存在一个常数 $C > 0$ 使得对 $\forall z \in \mathbb{U}$, 下式成立:

$$|f(z) - z| < C\sqrt{\epsilon}.$$

证明 由文献 [27, 引理 2.2] 和 [29, 第 2 节] 可以直接得到. $\square$

引理 4.4 的证明 令 E 表示 D^ϵ 内使 f_ϵ 不共形的子集, 则 E 可以分为两个部分: 位于 $\{z \in D : \text{dist}(z, \partial D) \geq \lambda\}$ 的部分 E_1 和位于 $D \setminus \{z \in D : \text{dist}(z, \partial D) \geq \lambda\}$ 的部分 E_2 , 其中 λ 是某一个下面待定的常数.

由 f_ϵ 的构造直接推出 E_1 可以表为 $E_1 = \bigcup_j E_1^{(j)}$, 其中 $E_1^{(j)}$ 是位于与 ∂D 距离大于或等于 λ 的 P_D^ϵ 的某个圆盘 $\hat{p}_j$ 内. 因此, 每个这样圆盘 $\hat{p}_j$ 至少是 P_D^ϵ 内某个 $[\lambda/(2\epsilon)]$ -生成的中心. 引理 3.3 给出 $E_1^{(j)}$ 的面积小于或等于 $(C/[\lambda/\epsilon]^2) \text{Area}(\hat{p}_j)$, 其中 $C > 0$ 是某个一般的常数. 注意到 D 的面积有界且对于 $j_1 \neq j_2$ 有 $E_1^{(j_1)} \cap E_1^{(j_2)} = \emptyset$, 所以立即得出

$$\text{Area}(E_1) \leq \frac{C\epsilon^2}{\lambda^2}. \quad (4.8)$$

令 $\tilde{E}$ 表示 $\mathbb{U}$ 内使 $\phi_{U^\epsilon} \circ f_\epsilon \circ \phi_{D^\epsilon}^{-1}$ 不共形的子集, 则 $\tilde{E} = \phi_{D^\epsilon}(E_1) \cup \phi_{D^\epsilon}(E_2)$. 对于 $\phi_{D^\epsilon}(E_1)$, 由引理 4.5(i) 知, 存在一个常数 $C > 0$ 使得对于任意 $\nu > 0$ 都成立

$$\mu(\phi_{D^\epsilon}(E_1)) \leq C(\mu(E_1))^{1/3-\nu},$$

其中 $\mu(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度. 结合 (4.8), 得到

$$\mu(\phi_{D^\epsilon}(E_1)) \leq C \left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} \right)^{1/3-\nu}. \quad (4.9)$$

对于 $\phi_{D^\epsilon}(E_2)$, 由 Beurling 投影定理 (参见文献 [32, 命题 3.77]) 知, $\phi_{D^\epsilon}(E_2)$ 位于 $\{1 - c\lambda^{1/2} \leq |z| \leq 1\}$ 内, 所以有

$$\mu(\phi_{D^\epsilon}(E_2)) \leq C\lambda^{1/2}. \quad (4.10)$$

通过解等式 $\lambda^{1/2} = (\frac{\epsilon^2}{\lambda^2})^{1/3}$, 得到 $\lambda = \epsilon^{4/7}$. 于是由 (4.9) 和 (4.10) 立即推出

$$\mu(\tilde{E}) \leq C\epsilon^{2/7-\nu}.$$

注意到 $\phi_{U^\epsilon} \circ f_\epsilon \circ \phi_{D^\epsilon}^{-1}$ 是 $\mathbb{U}$ 的一个拟共形自同胚, 因此, 由引理 4.5(ii) 立即推出 (4.7) 成立. $\square$

定理 4.1 的证明 利用三角不等式, 有

$$|f(z) - f_\epsilon(z)| \leq |f(z) - \phi_{D^\epsilon}(z)| + |\phi_{D^\epsilon}(z) - \phi_{U^\epsilon} \circ f_\epsilon \circ \phi_{D^\epsilon}^{-1}(\phi_{D^\epsilon}(z))| + |\phi_{U^\epsilon}(f_\epsilon(z)) - f_\epsilon(z)|,$$

其中映射 ϕ_{D^ϵ} 和 ϕ_{U^ϵ} 的定义如前面. 结合 (4.4)、(4.6) 和 (4.7), 可得

$$|f(z) - f_\epsilon(z)| \leq C(\epsilon^{1/2-\sigma} + \epsilon^{1/7-\nu} + \epsilon^{\pi^2/48-\tau}), \quad (4.11)$$

其中 $0 < \sigma < 1/2$, $0 < \nu < 1/7$, $0 < \tau < \pi^2/48$, 常数 $C > 0$ 只依赖于 D 的直径、 ∂D 的正则性测度和 z_0 到 ∂D 的距离. 由 (4.11) 很容易推出 (4.3) 成立, 从而完成了这个定理的证明. $\square$

致谢 在此, 本文作者向写作过程中给予了我们帮助的老师表示衷心的感谢, 同时也要感谢在百忙中抽出时间对本文匿名评审并提出宝贵意见的专家学者.

参考文献

- 1 Thurston W. The Finite Riemann Mapping Theorem, Invited Address. West Lafayette: Purdue University Press, 1985
- 2 Rodin B, Sullivan D. The convergence of circle packings to the Riemann mapping. J Differential Geom, 1987, 26: 349–360
- 3 Bobenko A I, Hoffmann T, Springborn B A. Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. Ann of Math (2), 2006, 164: 231–264
- 4 Bobenko A I, Suris Y B. Discrete Differential Geometry: Integrable Structure. Graduate Studies in Mathematics, vol. 98. Providence: Amer Math Soc, 2008
- 5 He Z X. Rigidity of infinite disk patterns. Ann of Math (2), 1999, 149: 1–33
- 6 Lan S Y, Dai D Q. C^∞ -convergence of circle patterns to minimal surfaces. Nagoya Math J, 2009, 194: 149–167
- 7 Stephenson K. Introduction to Circle Packing: The Theory of Discrete Analytic Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 8 Matthes D. Convergence in discrete Cauchy problems and applications to circle patterns. Conform Geom Dyn, 2005, 9: 1–23
- 9 Schramm O. Circle patterns with the combinatorics of the square grid. Duke Math J, 1997, 86: 347–389
- 10 Guo R, Luo F. Rigidity of polyhedral surfaces, II. Geom Topol, 2009, 13: 1265–1312
- 11 Rivin I. Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume. Ann of Math (2), 1994, 139: 553–580
- 12 Rivin I. A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. Ann of Math (2), 1996, 143: 51–70
- 13 Bücking U. Approximation of conformal mappings by circle patterns. Geom Dedicata, 2008, 137: 163–197
- 14 Dubejko T. Branched circle packings and discrete Blaschke products. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 4073–4103
- 15 He Z X, Schramm O. On the convergence of circle packings to the Riemann map. Invent Math, 1996, 125: 285–305
- 16 He Z X, Schramm O. The C^∞ -convergence of hexagonal disk packings to the Riemann map. Acta Math, 1998, 180: 219–245
- 17 Lan S Y, Dai D Q. The C^∞ -convergence of SG circle patterns to the Riemann mapping. J Math Anal Appl, 2007, 332: 1351–1364
- 18 Agafonov S I. Imbedded circle patterns with the combinatorics of the square grid and discrete Painlevé equations. Discrete Comput Geom, 2003, 29: 305–319
- 19 Agafonov S I, Bobenko A I. Discrete Z^γ and Painlevé equations. Int Math Res Not IMRN, 2000, 2000: 165–193
- 20 Hurdal M K, Bowers P L, Stephenson K, et al. Quasi-conformally flat mapping the human cerebellum. In: Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1679. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 279–286
- 21 Martindale D. Road map for the mind. Sci Amer, 2001, 285: 13–14
- 22 Bobenko A I, Pinkall U, Springborn B A. Discrete conformal maps and ideal hyperbolic polyhedra. Geom Topol, 2015, 19: 2155–2215

- 23 Bobenko A I, Skopenkov M. Discrete Riemann surfaces: Linear discretization and its convergence. *J Reine Angew Math*, 2016, 720: 217–250
- 24 He Z X, Liu J S. On the Teichmüller theory of circle patterns. *Trans Amer Math Soc*, 2013, 365: 6517–6541
- 25 Liu J S, Zhou Z. How many cages midscribe an egg. *Invent Math*, 2016, 203: 655–673
- 26 Rodin B. Schwarz’s lemma for circle packings, II. *J Differential Geom*, 1989, 30: 539–554
- 27 Doyle P G, He Z X, Rodin B. Second derivatives of circle packings and conformal mappings. *Discrete Comput Geom*, 1994, 11: 35–49
- 28 He Z X, Rodin B. Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings. *Comm Anal Geom*, 1993, 1: 31–41
- 29 He Z X. An estimate for hexagonal circle packings. *J Differential Geom*, 1991, 33: 395–412
- 30 Warschawski S E. On the degree of variation in conformal mapping of variable regions. *Trans Amer Math Soc*, 1950, 69: 335–356
- 31 He Z X, Liu J S. A sharp estimate for the hexagonal circle packing constants. *Geom Dedicata*, 2010, 146: 193–210
- 32 Lawler G F. *Conformal Invariant Processes in the Plane*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 114. Providence: Amer Math Soc, 2005

Estimate of the rate of global convergence of circle packings

Shiyi Lan & Jinsong Liu

Abstract Let D be a simply connected bounded domain of the complex plane whose boundary is a quasicircle, and let P_ϵ be a regular hexagonal circle packing with radii ϵ which almost fills D . Then there is a circle packing in the unit disk $\mathbb{U}$ which is combinatorially equivalent to P_ϵ . It is known that the correspondence f_ϵ of ϵ -circles in D with circles of varying radii in $\mathbb{U}$ converges globally uniform, with a suitable normalization, to the Riemann map $f : D \rightarrow \mathbb{U}$ as $\epsilon \rightarrow 0$. In this paper, we will give an estimate of the rate of globally uniform convergence of $f_\epsilon \rightarrow f$.

Keywords circle packing, conformal map, quasicircle, convergence rate

MSC(2010) 30G25, 30E10, 52C26

doi: 10.1360/SCM-2018-0759