



## 论文

# 一种基于泊松分布的提高 X 射线脉冲星脉冲轮廓信噪比的方法

胡慧君<sup>①②\*</sup>, 赵宝升<sup>①</sup>, 盛立志<sup>①②</sup>, 鄢秋荣<sup>①②</sup>, 杨颢<sup>①②</sup>, 陈宝梅<sup>①②</sup>

① 中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子技术国家重点实验室, 西安 710119;

② 中国科学院研究生院, 北京 100039

\*E-mail: huhuijun@opt.ac.cn

收稿日期: 2010-12-15; 接受日期: 2011-05-20; 网络出版日期: 2011-06-22

**摘要** 论述了 X 射线脉冲星辐射模型和脉冲轮廓构造算法, 提出了以 Kullback-leibler 距离函数作为评价标准, 提高具有泊松分布规律的 X 射线脉冲星脉冲轮廓信噪比的平滑算法, 推导了平滑参数和平滑累积脉冲轮廓的计算公式. 搭建了 X 射线脉冲星导航地面模拟系统, 实现了对模拟 X 射线脉冲星单光子到达时间的记录及 X 射线脉冲星脉冲轮廓的构造, 得到了 X 射线脉冲到达时间 TOA. 在 X 射线脉冲星导航地面模拟系统上, 对平滑算法进行了验证, 结果表明该算法对于提高累积脉冲轮廓的信噪比效果显著, 信噪比提高大于 10 dB.

**关键词** X 射线脉冲星导航, 脉冲轮廓, 信噪比, 泊松分布

**PACS:** 97.60.Gb, 07.85.-m, 07.05.Fb

## 1 引言

脉冲星是太阳系以外的遥远天体, 其位置坐标犹如恒星表一样构成一种高精度天球参考系, 且按一定频率发射稳定的脉冲信号, 长期稳定度好于地球上最稳定的铯原子钟, 可提供绝好的空间参考基准和时间基准, 为空间飞行提供天然的导航信标. X 射线脉冲星脉冲到达时间(Time of Arrival, TOA)的测量是 X 射线脉冲星自主导航系统的一个决定性因素, 而脉冲到达时间测量精度主要取决于脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟的测量精度. 广泛采用的 Taylor 频域算法使时间延迟的估计精度不再依赖累积脉冲轮廓的时间分辨率, 而决定于累积脉冲轮廓的信噪比<sup>[1]</sup>. 然而, 受脉冲星自转周期的变化、脉冲星位置

变化、色散延迟、散射、相对论效应、双星系统的轨道运动、地球运动及其他未知因素等的影响<sup>[2]</sup>, 脉冲星累积脉冲轮廓存在各种噪声, 影响 TOA 的测量精度. 为提高 TOA 的测量精度, 需设法提高累积脉冲轮廓的信噪比, 抑制信号中的干扰噪声. 本文在论述脉冲星辐射泊松统计模型的基础上, 提出了一种基于 Kullback-leibler 距离函数的提高累积脉冲信噪比的算法, 搭建的脉冲星导航地面模拟系统中对该算法予以验证, 结果表明该算法对于提高累积脉冲轮廓的信噪比及脉冲到达时间的测量精度非常有效.

## 2 脉冲星辐射模型

X 射线脉冲星的脉冲辐射光子到达探测器, 并被

**引用格式:** 胡慧君, 赵宝升, 盛立志, 等. 一种基于泊松分布的提高 X 射线脉冲星脉冲轮廓信噪比的方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 1015-1020  
Hu H J, Zhao B S, Sheng L Z, et al. A method for improving the SNR of X-ray pulsar pulse profile based on Poisson distribution (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 1015-1020, doi: 10.1360/132010-1269

探测器所记录的过程可表示为非齐次泊松过程如下<sup>[3]</sup>:

$$P(k) = \frac{\left[ \int_a^b \lambda(t) dt \right]^k}{k!} \exp \left[ - \int_a^b \lambda(t) dt \right], \quad (1)$$

(1)式表示在时间间隔 $[a, b]$ 内探测到 $k$ 个光子的几率, 其中 $\lambda(t)$ 表示 X 射线光子到达探测器的到达率函数. 由 X 射线脉冲星的自转特性可知,  $\lambda(t)$ 是周期性或准周期性函数如下<sup>[4,5]</sup>:

$$\begin{aligned} \lambda(t+T) &= \lambda(t), \\ \nu(t) &= \nu_0 + \dot{\nu}(t-t_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\nu^{(n)}}{n!} (t-t_0)^n, \\ T &= \frac{1}{\nu(t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $T$ 表示 X 射线脉冲星的自转周期,  $\nu(t)$ 表示 X 射线脉冲星的自转频率. 由于磁偶极辐射的能量距离, 导致 X 射线脉冲星的自转频率随时间逐渐变慢, 其自转频率随时间的变化关系如(2)式所示. X 射线光子到达率函数 $\lambda(t)$ 是源于脉冲星的 X 射线光子到达率和背景 X 射线光子到达率的总和如下:

$$\lambda(t) = \lambda_p(t) + \lambda_n(t), \quad (3)$$

其中 $\lambda_p(t)$ 表示脉冲星的 X 射线光子到达率,  $\lambda_n(t)$ 表示背景的 X 射线光子到达率,  $\lambda_n(t)$ 可视为常值函数.

脉冲星的 X 射线辐射能流密度非常低, 一般为 $10^{-5} \text{ phs (cm}^2 \text{ s)}^{-1}$ 的量级, 需要探测器进行长时间的采集, 将 X 射线光子叠加到一个周期以获取波形稳定且信噪比较高的累积脉冲轮廓. 设采集时间为 $N$ 个周期, 每个周期分为 $N_b$ 个 bin, 每个 bin 对应一特定的相位, 按(4)式将 $N$ 个周期内的光子叠加到一个周期获取 X 射线脉冲星累积脉冲轮廓为

$$f(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(i, j). \quad (4)$$

$I(i, j)$ 表示发生在时间区间 $t(i, j)$ 中的光子事件的次数如下:

$$\begin{aligned} t(i, j) &= iT + jT_b, \\ i &= 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N_b, \end{aligned} \quad (5)$$

$T$ 为脉冲周期,  $T_b$ 为时间仓的大小. 累积脉冲轮廓 $f(j)$ 服从以 $\lambda_j$ 为期望值的泊松统计规律如下:

$$P(f(j)) = \frac{(\lambda_j)^{f(j)}}{f(j)!} \exp(-\lambda_j),$$

$$\lambda_j = \int_{(j-1)T_b}^{jT_b} \lambda(t) dt, \quad (6)$$

其中 $\lambda_j$ 表示在第 $j$ 个时间仓中的光子数的期望值,  $f(j)$ 表示在第 $j$ 个时间仓中光子数的实际测量值.

### 3 X 射线脉冲轮廓平滑

如(4)和(6)式所示, 累积脉冲轮廓 $f(j)$ 服从以 $\lambda_j$ 为期望值的泊松统计分布, 为了从累积脉冲轮廓 $f(j)$ 得到 $\lambda_j$ , 定义估计算子为<sup>[6,7]</sup>

$$\hat{\lambda}_j = \arg \min \left( \sum_{j=1}^{N_b} (f(j) - \lambda_j)^2 + \alpha \int (\lambda_j''(x))^2 dx \right), \quad (7)$$

(7)式中第一项等价于测量值于真值得方差, 表示 $\lambda_j$ 与 $f(j)$ 的拟合度, 第二项为平滑罚函数,  $\alpha$ 为平滑参数, 决定了噪声的抑制程度, 由(7)式取极小值可得到 $\lambda_j$ 的估计值 $\hat{\lambda}_j$ . 文献[6]中平滑罚函数可表示为

$$\int (\lambda''(x))^2 dx = f^T QR^{-1}Q^T f,$$

将其带入(7)式可得到如下关系式:

$$\varepsilon(\lambda) = (f - \lambda)^T (f - \lambda) + \alpha f^T QR^{-1}Q^T f, \quad (8)$$

令 $d\varepsilon(\lambda)/d\lambda = 0$ , 可得到 $\hat{\lambda}$ 的表达式为

$$\hat{\lambda} = (I + \alpha QR^{-1}Q^T)^{-1} f, \quad (9)$$

其中 $Q$ 为 $n \times (n-2)$ 维矩阵, 矩阵元 $Q_{ij}$ 为:  $Q_{j-1,j} = Q_{j+1,j} = T_b^{-1}$ ,  $Q_{jj} = -2T_b^{-1}$ , 当 $|i-j| \geq 2$ 时,  $Q_{ij} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 2, 3, \dots, n-1$ .  $R$ 为 $(n-2) \times (n-2)$ 维矩阵, 矩阵元 $R_{ij}$ 为:  $R_{ii} = 2T_b/3$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$ ;  $R_{i,i+1} = R_{i+1,i} = T_b/6$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-2$ ; 当 $|i-j| \geq 2$ 时,  $R_{ij} = 0$ .  $\hat{\lambda}$ 为平滑参数 $\alpha$ 的函数,  $\alpha$ 得选取决定了噪声去除的水平.

采用 Kullback-leibler 距离函数作为 $\hat{\lambda}$ 最佳估计的评判标准如下<sup>[7]</sup>:

$$K_j(p, q) = \int p \log \frac{p}{q} df(j), \quad (10)$$

$p$ 和 $q$ 是分别以真值 $\lambda_j$ 和估计值 $\hat{\lambda}_j$ 为期望值的泊松概率密度函数. 将 $p$ 和 $q$ 的具体表达式代入(10)式, 经计算可得:

$$K_j(p, q) = \int \frac{(\lambda_j)^{f(j)}}{f(j)!} \exp(-\lambda_j) \left( \log \left( \frac{(\lambda_j)^{f(j)}}{f(j)!} \exp(-\lambda_j) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -\log\left(\frac{(\hat{\lambda}_j)^{f(j)}}{f(j)!}\exp(-\hat{\lambda}_j)\right)df(j) \\
 &= \int \frac{(\lambda_j)^{f(j)}}{f(j)!}\exp(-\lambda_j)(f(j)\log\lambda_j - \lambda_j \\
 & \quad - f(j)\log\hat{\lambda}_j + \hat{\lambda}_j)df(j) \\
 &= \hat{\lambda}_j - \lambda_j + \lambda_j(\log\lambda_j - \log\hat{\lambda}_j). \tag{11}
 \end{aligned}$$

由于(11)式中  $\lambda_j$  的值未知, 不可能直接计算  $K_j(p, q)$ , 考虑到  $\lambda_j$  和  $\lambda_j \log \lambda_j$  与平滑参数  $\alpha$  无关, 可将其从(11)式中去掉, 并利用泊松分布的性质<sup>[8]</sup>:

$$E[f(j)\eta(f(j)-1)] = \lambda_j E[\eta(f(j))],$$

其中  $\eta(x)$  为一任意函数, 可得到平均 Comparative Kullback-leibler 距离函数:

$$CK = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} [\hat{\lambda}_j - f(j) \log \hat{\lambda}_j^A], \tag{12}$$

其中

$$\hat{\lambda} = (I + \alpha QR^{-1}Q^T)^{-1} f,$$

$$f = [f(1), \dots, f(j), \dots, f(N_b)],$$

$\hat{\lambda}_j^A$  同  $\hat{\lambda}$  的计算公式相同, 只需将  $f$  换为

$$f_j^A = [f(1), \dots, f(j)-1, \dots, f(N_b)].$$

Comparative Kullback-leibler 距离函数是平滑参数  $\alpha$  的函数, 根据(11)式选择  $\alpha$  使  $CK$  取最小时可得到  $\alpha$  的最佳估计值:

$$a_{opt} = \arg \min_a (CK), \tag{13}$$

然后将(12)代入(8)式就可得到最佳  $\hat{\lambda}_{opt}$ , 达到提高累

积脉冲轮廓信噪比的目的.

## 4 实验与讨论

### 4.1 实验系统组成

基于 X 射线脉冲星导航的地面模拟系统的组成如图 1 所示, 主要由 X 射线脉冲辐射源、X 射线光子计数探测器、电子读出系统和数据处理四部分组成<sup>[9]</sup>.

模拟 X 射线脉冲源主要由 X 射线球管、斩波器及相应的低压、高压电源组成. X 射线球管产生能谱为 1~10 keV 的 X 射线, 基本覆盖了 X 射线脉冲星辐射的能谱范围. 在 X 射线球管出口放置斩波器, 将连续的 X 射线调制成周期为 1.5~300 ms 脉冲辐射. 基于 MCP 的 X 射线光子计数探测器由输入窗、光电阴极、微通道板 MCP(Micro-Channel Plate)和位敏阳极组成. 三块“Z”型堆叠的 MCP 可提供  $10^6 \sim 10^7$  的电子增益, 因此 MCP 适于极微弱的 X 射线脉冲星脉冲辐射的探测. 微通道板作为电子倍增系统, 其渡越时间约 1 ns, 渡越时间弥散约 15 ps, 响应时间非常短, 时间分辨率非常高, 满足 X 射线脉冲星导航光子计数探测器对时间响应和时间分辨率的要求. 位敏阳极作为 MCP 输出的二次倍增电子的接收电极, 可同时获取入射光子的二维位置信息和时间信息. 电子读出系统由电荷灵敏前放与成形主放、峰值定时与保持电路和基于 FPGA 的时间测量单元组成, 完成脉冲信号的读取与单光子到达时间的记录. 数据处理单元根据 X 射线脉冲星脉冲轮廓的构造原理完成脉冲

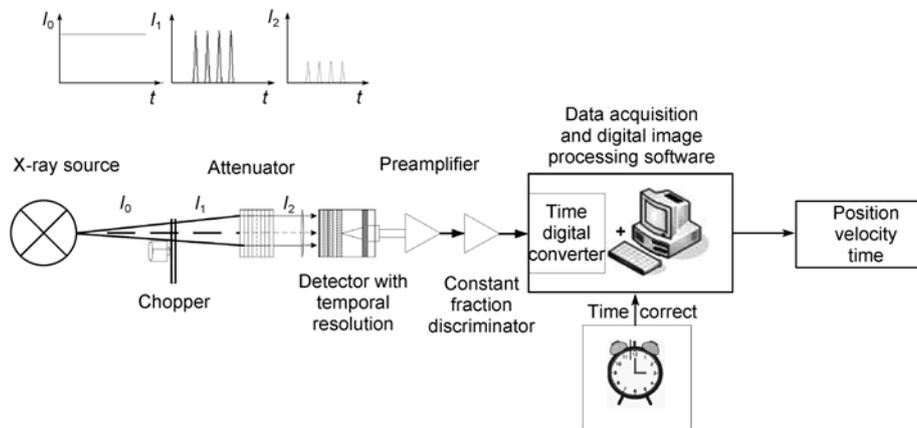


图 1 基于 X 射线脉冲星导航的地面模拟系统原理图

Figure 1 Schematic diagram of simulation experiment system for X-ray pulsar based navigation.

轮廓的构造, 计算脉冲的到达时间 TOA, 提供给脉冲星导航算法实现自主定位.

### 4.2 实验结果与分析

实验中, 将 X 射线脉冲源调制周期为 150 ms, 主峰与次峰间隔为 1/4 周期, X 射线源强度通过改变 X 射线发生器的控制电压、电流及 X 射线源至探测器的距离来改变, 将其调至单光子脉冲状态. 单光子脉冲信号经过电子读出系统记录每个单光子电脉冲信号到达时间, 通过 X 射线脉冲轮廓的构造原理再现 X 射线脉冲轮廓.

如图 2 所示, 图 2(a) 图为根据(4)式构造的原始累积脉冲轮廓, 其时间仓的大小为 0.5 ms,  $N_b$  为 300, 累

积时间为 360 s, 信噪比为 13.57 dB; 图 2(b) 为根据 3 节所述的算法平滑后的脉冲轮廓, 最佳平滑参数为 9, 与图 2(a) 比较脉冲轮廓明显光滑, 经计算信噪比为 33.11 dB, 信噪比提高近 20 dB; 图 2(c) 为原始累积脉冲轮廓的傅里叶频谱, 图 2(d) 图为平滑后的累积脉冲轮廓的傅里叶频谱, 两者相比较可知平滑后的脉冲累积轮廓消除了高频噪声, 所以信噪比得以提高. 根据文献[4]可知, 累积脉冲轮廓的信噪比与累积时间成正比, 这样要获得如图 2(b) 所示的累积脉冲, 则至少需要累积时间长达 31.6 h.

表 1 中, SNR1 表示原始累积脉冲轮廓的信噪比, SNR2 表示平滑后的累积脉冲轮廓的信噪比, 可看出 SNR2 比 SNR1 提高 10 dB 以上, 甚至近 20 dB. 从表 1

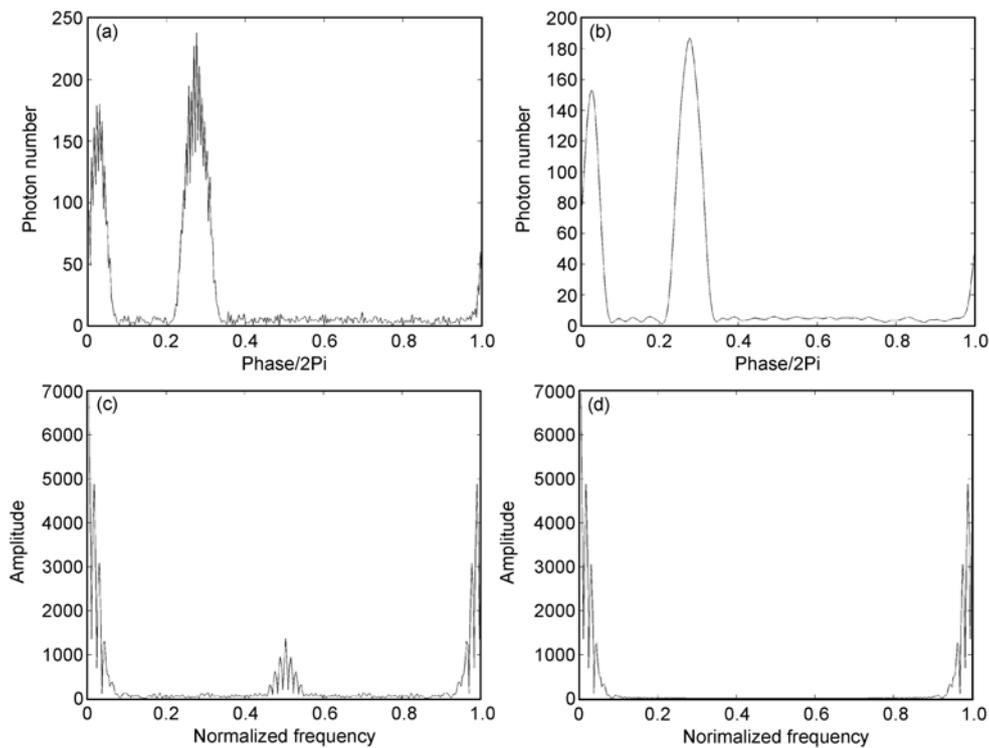


图 2 累积脉冲轮廓的平滑结果

(a) 原始累积脉冲轮廓; (b) 平滑后的累积脉冲轮廓; (c) 原始累积脉冲轮廓的傅里叶谱; (d) 平滑后的累积脉冲轮廓的傅里叶谱

Figure 2 Smoothing of integrated pulse profile. (a) Original pulse profile; (b) smoothing pulse profile; (c) spectrum of original pulse profile; (d) spectrum of smoothing pulse profile.

表 1 原始累积脉冲轮廓与平滑的累积脉冲轮廓的信噪比

Table 1 SNR of original pulse profile and smoothing pulse profile

Integrated time (s)	60	120	180	240	300	360
SNR1(dB)	10.89	11.83	12.89	13.29	12.52	13.57
SNR2(dB)	25.88	24.10	27.80	30.35	31.36	33.11

中可看出, 累积时间为 60 s 时 SNR1=10.89 dB, 累积时间延长至 360 s 时 SNR1=13.57 dB, 提高不到 3 dB, 而累积时间为 60 s 时, SNR2=25.88 dB, 信噪比提高近 15 dB.

根据脉冲到达时间 TOA 的 Taylor 频域算法定义<sup>[10]</sup>:

$$D = \sum_{k=1}^{N/2} k F_k S_k \sin(\varphi_k - \theta_k + 2\pi k \tau / N), \quad (13)$$

式中当参数  $D=0$  时估计的  $\tau$  值为累积脉冲轮廓  $f(t)$  与标准脉冲轮廓  $s(t)$  间的时间延迟, 其中累积脉冲轮廓  $f(t)$  与事先建立的标准脉冲轮廓  $s(t)$  的关系为

$$f(t) = b + as(t - \tau) + g(t),$$

$a$  为幅度因子,  $b$  为累积脉冲轮廓的幅值偏差,  $g(t)$  为随机噪声,  $F(k)$  和  $S(k)$  分别表示  $f(t)$  和  $s(t)$  离散傅里叶变换系数的幅值,  $\theta(k)$  和  $\varphi(k)$  分别表示  $f(t)$  和  $s(t)$  离散傅里叶变换系数的相位. 如图 3 所示, 图 3 中虚线为标准脉冲轮廓, 实线为累积时间为 360 s 的原始累积脉冲轮廓, 累积脉冲轮廓与标准脉冲轮廓的时间延迟设置为 20 个时间仓, 10 ms. 分别对原始累积脉冲和光滑后的累积脉冲轮廓采用 Taylor 频域算法计算脉冲时间延迟, 结果如图 4 所示, 横轴表示时间延迟, 纵轴表示  $10\log_{10}(\text{abs}(D))$ , 曲线最低点出的横坐标对应于计算的时间延迟, 图中虚线为原始累积脉冲轮廓的计算结果, 时间延迟为 19.6866 个时间仓,

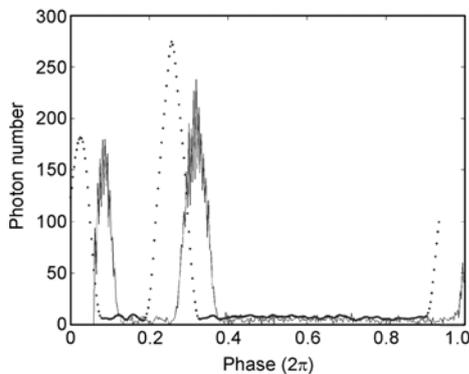


图 3 标准脉冲轮廓与累积脉冲轮廓

Figure 3 Standard pulse profile and integrated pulse profile.

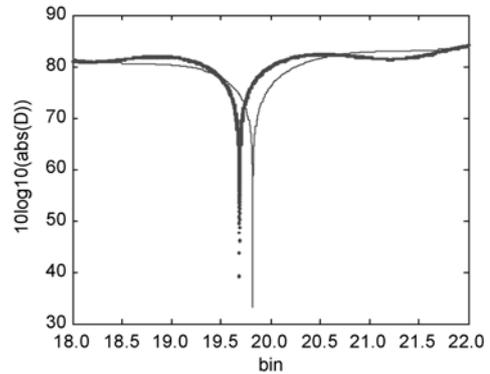


图 4 延迟时间测量

Figure 4 Time delay measurement.

9.8433 ms, 与真值 10 ms 相差 0.1567 ms, 图中实线为平滑后的累积脉冲轮廓的计算结果, 时间延迟为 19.8215 个时间仓, 9.9108 ms, 与真值 10 ms 相差 0.0892 ms. 平滑后的累积脉冲轮廓由于信噪比得以提高, 因此计算的脉冲延迟时间(脉冲到达时间 TOA)的精度得到了提高.

综上所述, 本文提出的基于泊松统计的消噪算法对于提高累积脉冲轮廓的信噪比, 进而提高脉冲到达时间 TOA 测量精度是非常必要而且有效的.

## 5 结论

论述了 X 射线脉冲星的辐射模型和 X 射线脉冲星脉冲轮廓的构造过程, 提出了以 Kullback-leibler 距离函数为评价标准的提高累积脉冲轮廓信噪比的平滑算法; 搭建了基于 X 射线脉冲星导航的地面模拟系统, 实现了 X 射线脉冲星辐射源的模拟, X 射线单光子计数探测, 完成了 X 射线脉冲轮廓的构造, 依据 TOA 算法可实现 X 射线脉冲到达时间的测量; 在 X 射线脉冲星导航地面模拟系统上, 对本文提出的平滑算法进行了验证, 结果表明平滑后的累积脉冲轮廓信噪比提高大于 10 dB, 局部甚至接近 20 dB. 通过计算, 分析了原始累积脉冲轮廓与平滑后的累积脉冲轮廓对脉冲到达时间 TOA 精度的影响, 结果表明平滑后的累积脉冲轮廓有助于 TOA 精度的提高.

## 参考文献

- 1 Taylor J H. Millisecond pulsars: Nature's most stable clocks. Proc IEEE, 1991, 79(7): 1054-1064

- 2 Zhong C X, Yang T G. Use of wiener filtration in wavelet domain in ensemble pulsar time algorithm. *Acta Phys Sin*, 2007, 56(10): 6157–6163 [仲崇霞, 杨廷高. 小波域中的维纳滤波在综合脉冲星时算法中的应用. *物理学报*, 2007, 56(10): 6157–6163]
- 3 Shuai P, Li M, Chen S L, et al. *The Principle and Method of X-Ray Pulsar Navigation System*. Beijing: China Space Navigation Press, 2009. 428–429 [帅平, 李明, 陈绍龙, 等. X 射线脉冲星导航系统原理与方法. 北京: 中国宇航出版社, 2009. 428–429]
- 4 Sheikh S I, Pines D J. Spacecraft navigation using X-Ray pulsars. *J Guidance Control Dyn*, 2006, 29(1): 49–63
- 5 Yang Y G. Using pulsar clock as time scale for spacecraft. *J Time Frequency*, 2007, 30(2): 125–131 [杨廷高. 用脉冲星钟作航天器时间标准. *时间与频率学报*, 2007, 30(2): 125–131]
- 6 Carew J D, Wahba G, Xie X H, et al. Optimal spline smoothing of fMRI time series by generalized cross-validation. *NeuroImage*, 2003, 18: 950–961
- 7 Gu C, Qiu C F. Penalized likelihood regression: A simple asymptotic analysis. *Stat Sin*, 1994, 4: 297–304
- 8 Huson H M. A natural identity for exponential families with applications in multiparameter estimation. *Ann Stat*, 1978, 6: 473–484
- 9 Hu H J, Zhao B S, Sheng L Z, et al. Simulation experiment system for X-ray pulsar based navigation. *Acta Phys Sin*, 2011, 60(2): 029701 [胡慧君, 赵宝升, 盛立志, 等. 基于 X 射线脉冲星导航的地面模拟系统研究. *物理学报*, 2011, 60(2): 029701]
- 10 Xie Z H, Xu L P, Ni G P. Time offset measurement algorithm based on bispectrum for pulsar integrated pulse profiles. *Acta Phys Sin*, 2008, 57: 6683–6688 [谢振华, 许录平, 倪广仁. 基于双谱的脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟测量. *物理学报*, 2008, 57(10): 6683–6688]

## A method for improving the SNR of X-ray pulsar pulse profile based on Poisson distribution

HU HuiJun<sup>1,2\*</sup>, ZHAO BaoSheng<sup>1</sup>, SHENG LiZhi<sup>1,2</sup>, YAN QiuRong<sup>1,2</sup>,  
YANG Hao<sup>1,2</sup> & CHEN BaoMei<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics of Chinese Academy of Science, Xi'an 710119, China;*

<sup>2</sup> *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*

The radiation model of pulsar and the construction of pulsar integrated pulse profile are discussed, and a smoothing algorithm for improving the SNR of pulsar integrated pulse profile which obeys Poisson distribution is proposed based on Kullback-leibler distance function. The formula for calculating smoothing parameter and smoothing integrated pulse profile are deduced. A simulation experiment system for X-ray pulsar based navigation is setup in order to study the key technologies of X-ray pulsar navigation. The time of arrival of individual X-ray photon from the simulation X-ray pulsar source is recorded, the integrated pulse profile is constructed and the time of arrival of pulse is calculated in the simulation system. The smoothing algorithm is verified in the simulation system, and the results show that SNR can be improved by 10 dB.

**pulsar navigation, pulsar profile, SNR, Poisson distribution**

**PACS:** 97.60.Gb, 07.85.-m, 07.05.Fb

**doi:** 10.1360/132010-1269