不完整区间上整数及其逆的差

徐哲峰^{①*}, 易媛^②^① 西北大学数学系, 西安 710127;^② 西安交通大学理学院, 西安 710049

E-mail: zfxu@nwu.edu.cn, yuanyi@mail.xjtu.edu.cn

收稿日期: 2011-04-17; 接受日期: 2011-07-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11001218)、中国博士后科学基金 (批准号: 20080430202, 2009020598) 及陕西省自然科学基金 (批准号: SJ08A04) 资助项目

摘要 设实数 λ, δ 满足 $0 < \lambda, \delta \leq 1$, $n > 2$ 为整数. 本文研究了不完整区间 $[1, [\lambda n]]$ 上整数与其模 n 逆的差. 定义 $S(n, \lambda, \delta) = \#\{a : 1 \leq a \leq \lambda n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\}$, 本文给出了有关 $S(n, \lambda, \delta)$ 的一些渐近公式.

关键词 整数及其逆 不完整区间 渐近公式**MSC (2000) 主题分类** 11N69

1 引言

设 $n \geq 3$ 为整数. 若 a 为整数且满足 $0 < a < n$ 及 $(a, n) = 1$, 则存在唯一整数 $1 \leq b < n$ 满足 $ab \equiv 1 \pmod{n}$. b 称为 a 模 n 的逆, 表示为 $\bar{a}$. 关于整数及其模 n 逆的分布的诸多性质可参阅文献 [1–4]. 设 λ, δ 为任意实数且满足 $0 < \lambda, \delta \leq 1$, 我们定义

$$S(n, \lambda, \delta) = \#\{a : 1 \leq a \leq \lambda n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\}.$$

本文的主要目的是研究 $S(n, \lambda, \delta)$ 的渐近性质. 若令 $\lambda = 1$, Zhang^[5] 证明了

$$S(n, 1, \delta) = \delta(2 - \delta)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n),$$

其中 $\phi(n)$ 是 Euler 函数, $d(n)$ 是除数函数.

本文中, 我们将获得一些更为一般的结果. 即, 我们证明了以下结论:

定理 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$ 以及整数 $n \geq 3$, 我们有渐近公式

$$S(n, \lambda, \delta) = 2(\delta^2 + \delta\lambda - \delta^2\lambda)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n),$$

如果 $[\lambda n] + [\delta n] \leq n$ 并且 $[\delta n] < [\lambda n]$;

$$S(n, \lambda, \delta) = 2(\lambda^2 + \lambda\delta - \lambda^3)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n),$$

如果 $[\lambda n] + [\delta n] \leq n$ 并且 $[\delta n] \geq [\lambda n]$;

$$S(n, \lambda, \delta) = (\delta^2(1 - 2\lambda) + 2(\delta - 1)\lambda + \lambda^2 + 1)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n),$$

$$\begin{aligned}
& \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\
& S(n, \lambda, \delta) = (4\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2\lambda + 1)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), \\
& \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\
& S(n, \lambda, \delta) = 2(\lambda - \lambda^3)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), \\
& \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] < \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

其中 $d(n)$ 是除数函数.

特别的, 令 $\lambda = 1$, 则有

推论 1 对任意给定的实数 $\delta \in (0, 1]$, 我们有渐近公式

$$S(n, 1, \delta) = \delta(2 - \delta)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n).$$

这个推论为文献 [5] 的主要结果.

推论 2 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{a : 1 \leq a \leq \lambda n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\}}{\phi(n)} = \begin{cases} 2(\delta^2 + \delta\lambda - \delta^2\lambda), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n]; \\ 2(\lambda^2 + \lambda\delta - \lambda^3), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n]; \\ \delta^2(1 - 2\lambda) + 2(\delta - 1)\lambda + \lambda^2 + 1, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ 4\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2\lambda + 1, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ 2(\lambda - \lambda^3), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 而且 } [\lambda n] < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

当 $\lambda = 1$ 时, 则有如下极限分布公式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{a : 1 \leq a < n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\}}{\phi(n)} = \delta(2 - \delta).$$

2 几个引理

为了完成定理的证明, 我们需要以下几个引理.

引理 1 设 k, l 及 $n > 2$ 为整数. 则我们有估计式

$$\sum_{a=1}^n e\left(\frac{ka + l\bar{a}}{n}\right) \ll (k, l, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n),$$

其中 (k, l, n) 表示是 k, l 及 n 的最大公因子.

证明 参阅文献 [6].

引理 2 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$ 及整数 $n \geq 3$. 如果 $[\delta n] < [\lambda n]$, 则有

$$\sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{a=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} \sum_{b=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) = \frac{\delta^2}{2} n \phi(n) + O(n^{\frac{3}{2}} d^2(n) \ln^3 n).$$

证明 首先, 令

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\
 &= \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} 1 \\
 &+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\
 &:= \Psi + \Omega,
 \end{aligned}$$

对上式中的第一部分和式, 我们有

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} 1 \\
 &= \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{a-1} 1 \\
 &= \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum'_{b=1}^n e\left(\frac{ra+sb}{n}\right) \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \left(\sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
 &= \frac{[\delta n]\phi(n)}{n^2} \sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} (c + [\delta n] - [\lambda n] - 1) \\
 &\quad + \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum'_{a=1}^n e\left(\frac{ra}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} (c + [\delta n] - [\lambda n] - 1) e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum'_{a=1}^n e\left(\frac{s\bar{a}}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum'_{a=1}^n e\left(\frac{ra+s\bar{a}}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right). \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

由此我们很容易推出估计:

$$\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} (c + [\delta n] - [\lambda n] - 1) e\left(\frac{-rc}{n}\right) \ll \frac{2[\lambda n] - [\delta n]}{|\sin(\frac{\pi r}{n})|}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \ll \frac{[\delta n]}{|\sin(\frac{\pi s}{n})|} \quad (2.3)$$

以及

$$\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \ll \frac{1}{|\sin \frac{\pi s}{n}|} \left[\frac{1}{|\sin \frac{\pi(r+s)}{n}|} + \frac{1}{|\sin \frac{\pi r}{n}|} \right]. \quad (2.4)$$

注意到, 如果 $|x| \leq 1$, 则 $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x}$, 并且

$$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(s, r, n)^{\frac{1}{2}}}{s(r+s)} < \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(s, r, n)^{\frac{1}{2}}}{sr} \leq \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(r, n)^{\frac{1}{2}}}{sr} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \sum_{d|n} \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}} \sum_{r=1}^{\frac{n}{d}} \frac{1}{r} \ll d(n) \ln^2 n, \quad (2.5)$$

结合引理 1, (2.1)–(2.4), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{[\delta n]^2([\delta n]-1)\phi(n)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} (r, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n) \frac{2[\lambda n]-[\delta n]}{|\sin \frac{\pi r}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} (s, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n) \frac{[\delta n]}{|\sin \frac{\pi s}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} (r, s, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \frac{d(n)}{|\sin \frac{\pi s}{n}|} \left[\frac{1}{|\sin \frac{\pi(r+s)}{n}|} + \frac{1}{|\sin \frac{\pi r}{n}|} \right]\right) \\ &= \frac{\delta^3}{2} n \phi(n) + O(n^{\frac{3}{2}} d^2(n) \ln^2 n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

对于和式 Ω , 类似的有

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{\substack{a=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]} \sum'_{b=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{\substack{a=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{b=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{a-1} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \sum'_{\substack{a=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{b=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{a-1} e\left(\frac{m(a-b)}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

对于 (2.7) 中的内部双重和式, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum'_{\substack{a=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{b=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{a-1} e\left(\frac{m(a-b)}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum'_{b=1}^n e\left(\frac{(m+r)a+(s-m)b}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
& = \frac{\phi(n)}{n^2} \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-md}{n}\right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{ma-mb}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} (c+[\delta n]-[\lambda n]-2) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{(m+r)a-mb}{n}\right) \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} (c+[\delta n]-[\lambda n]-2) e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{ma+(s-m)b}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-m}}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{n-1} \left(\sum_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{(m+r)a+(s-m)b}{n}\right) \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-m}}^{n-1} \left(\sum_{a=1}^n e\left(\frac{(m+r)a}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-md}{n}\right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{n-1} \left(\sum_{a=1}^n e\left(\frac{(s-m)\bar{a}}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

由引理 1, 类似于对和式 Ψ 的估计方法, 同样可得

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\phi(n)}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \left(\sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-md}{n}\right) \right) \\
& \quad + O\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|} \right) + O\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(m+r, -m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi r}{n}|} \right) \\
& \quad + O\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(m, s-m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi s}{n}|} \right) \\
& \quad + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-m}}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{n-1} \frac{(m+r, s-m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi s}{n}| |\sin \frac{\pi r}{n}|} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-m}}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{n-1} \frac{(m+r, s-m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi s}{n}| |\sin \frac{\pi(r+s)}{n}|}\right) \\
& + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-m}}^{n-1} \left(\frac{(m+r, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|^2 |\sin \frac{\pi r}{n}|} + \frac{(m+r, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi r}{n}| |\sin \frac{\pi(m+r)}{n}|}\right)\right) \\
& + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq m}}^{n-1} \left(\frac{(s-m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|^2 |\sin \frac{\pi s}{n}|} + \frac{(m+r, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| |\sin \frac{\pi s}{n}| |\sin \frac{\pi(m+s)}{n}|}\right)\right) \\
& = \frac{\phi(n)}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-md}{n}\right) \\
& + O(n^{\frac{3}{2}} d^2(n) \ln^3 n).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi(n)}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \sum_{c=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} e\left(\frac{-md}{n}\right) \\
& = \frac{\phi(n)}{n} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{c=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ c-d-t \equiv 0 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} 1 - \frac{\phi(n)[\delta n]^2([\delta n]-1)}{2n^2} \\
& = \frac{\phi(n)}{n} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{c=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ c=d+t}}^{[\lambda n]} \sum_{d=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{c-1} 1 - \frac{\phi(n)[\delta n]^2([\delta n]-1)}{2n^2} \\
& = \frac{\phi(n)}{n} \sum_{t=1}^{[\delta n]} ([\delta n] - t) - \frac{\phi(n)[\delta n]^2([\delta n]-1)}{2n^2} \\
& = \frac{\delta^2 - \delta^3}{2} \phi(n)n + O(n),
\end{aligned}$$

于是

$$\Omega = \frac{\delta^2 - \delta^3}{2} \phi(n)n + O(n^{\frac{3}{2}} d^2(n) \ln^3 n).$$

由 Ψ 及 Ω 的渐近公式, 我们很容易推得引理 2 的结论.

引理 3 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$ 及整数 $n \geq 3$. 如果 $[\delta n] < [\lambda n]$, 则有

$$\sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{a=1 \\ a-b=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]'} \sum_{b=1}^{[\lambda n]'} 1 = \frac{\delta^2 + 2\delta\lambda - 2\delta^2\lambda}{2} \phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}} d^2(n) \ln^3 n).$$

证明 由三角恒等式, 容易推出

$$\sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{a=1 \\ a-b=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]'} \sum_{b=1}^{[\lambda n]'} 1 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]'} \sum_{b=1}^{[\lambda n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]-[\delta n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]-[\delta n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=[\lambda n]-[\delta n]+1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=[\lambda n]-[\delta n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n} \\ a > b}}^{[\lambda n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

对于和式

$$\sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]-[\delta n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right),$$

用类似引理 2 的方法, 我们仍然可得如下的渐近公式:

$$\sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]-[\delta n]'} e\left(\frac{m(a-b-t)}{n}\right) = (1-\delta)\lambda\delta\phi(n)n + O(n^{\frac{3}{2}}d^2(n)\ln^3 n). \quad (2.10)$$

于是由 (2.9), (2.10) 及引理 2 就推出引理 3 的结果.

引理 4 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$ 及整数 $n \geq 3$, 我们有

$$\begin{aligned}
S &:= \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 \\
&= \begin{cases} \frac{([\delta n]+1)[\delta n]}{2}, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n]; \\ \frac{[\lambda n](1 - [\lambda n] + 2[\delta n])}{2}, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n]; \\ [\lambda n]^2 - \frac{1}{2}[\delta n]^2 - (n+1)[\lambda n] + \left(n - \frac{1}{2}\right)[\delta n] + n, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ n([\lambda n] + [\delta n]) - [\lambda n]^2 - \frac{[\delta n]^2 + n^2 + [\delta n] - n}{2}, & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] < \frac{n}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

证明 容易看出, S 等于方程 $d = c + t$ 满足条件

$$1 \leq t \leq [\delta n], \quad 1 \leq c \leq [\lambda n], \quad [\lambda n] + 1 \leq d \leq n$$

的解 (t, c, d) 的个数. 如果 $[\lambda n] + [\delta n] \leq n$ 并且 $[\delta n] < [\lambda n]$, 易知

$$S = \sum_{t=1}^{[\delta n]} t = \frac{([\delta n]+1)[\delta n]}{2};$$

如果 $[\lambda n] + [\delta n] \leq n$ 并且 $[\delta n] \geq [\lambda n]$, 那么

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{[\lambda n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 + \sum_{t=[\lambda n]+1}^{[\delta n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 \\ &= \sum_{t=1}^{[\lambda n]} t + ([\delta n] - [\lambda n])[\lambda n] \\ &= \frac{[\lambda n](1 - [\lambda n] + 2[\delta n])}{2}; \end{aligned}$$

如果 $[\lambda n] + [\delta n] > n$ 并且 $[\lambda n] \geq \frac{n}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{n-[\lambda n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 + \sum_{t=n-[\lambda n]+1}^{[\delta n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 \\ &= \sum_{t=1}^{n-[\lambda n]} t + \sum_{t=n-[\lambda n]+1}^{[\delta n]} (n-t) \\ &= [\lambda n]^2 - \frac{1}{2}[\delta n]^2 - (n+1)[\lambda n] + \left(n - \frac{1}{2}\right)[\delta n] + n; \end{aligned}$$

如果 $[\lambda n] + [\delta n] > n$ 并且 $[\lambda n] < \frac{n}{2}$, 则

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{[\lambda n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 + \sum_{t=[\lambda n]}^{n-[\lambda n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 + \sum_{t=n-[\lambda n]+1}^{[\delta n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 \\ &= \sum_{t=1}^{[\lambda n]} t + (n - 2[\lambda n])[\lambda n] + \sum_{t=n-[\lambda n]+1}^{[\delta n]} (n-t) \\ &= n([\lambda n] + [\delta n]) - [\lambda n]^2 - \frac{[\delta n]^2 + n^2 + [\delta n] - n}{2}. \end{aligned}$$

引理 5 对任意给定的实数 $\lambda, \delta \in (0, 1]$ 及整数 $n \geq 3$, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]'} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ b-a=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n 1 \\ &= \begin{cases} \frac{\delta^2}{2} \phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}} d^2(n) \ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n]; \\ \left(\lambda \delta - \frac{\lambda^2}{2}\right) \phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}} d^2(n) \ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n]; \\ \frac{(1-\lambda)^2}{2} \phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}} d^2(n) \ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ \left(\lambda - \frac{3}{2} \lambda^2\right) \phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}} d^2(n) \ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] < \frac{n}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

证明 应用引理 3 的证明方法, 我们可以证明引理 5. 这里, 我们仅列出主要步骤和公式. 首先, 有

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ b-a=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n 1 &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{m(b-a-t)}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{m(b-a-t)}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

对 (2.11) 式中的第二个和式, 利用计算 (2.7) 同样的计算方法, 则有

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{m(b-a-t)}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \sum_{a=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n e\left(\frac{m(b-a)}{n}\right) \\ &= \frac{\phi(n)}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{[\delta n]} e\left(\frac{-mt}{n}\right) \sum_{c=1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-mc}{n}\right) \sum_{d=[\lambda n]+1}^n e\left(\frac{md}{n}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|} [\lambda n](n - [\lambda n])\right) \\ &\quad + O\left(\frac{n - [\lambda n]}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r-m, m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| \cdot |\sin \frac{\pi r}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{[\lambda n]}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(-m, m+s, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| \cdot |\sin \frac{\pi s}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n-m}}^{n-1} \frac{(r-m, m+s, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}| \cdot |\sin \frac{\pi r}{n}| \cdot |\sin \frac{\pi s}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{n-1} \frac{(r-m, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|^2 \cdot |\sin \frac{\pi r}{n}|}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n-m}}^{n-1} \frac{(m+s, n)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} d(n)}{|\sin \frac{\pi m}{n}|^2 \cdot |\sin \frac{\pi s}{n}|}\right) \\ &= \frac{\phi(n)}{n} \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum_{c=1}^{[\lambda n]} \sum_{\substack{d=[\lambda n]+1 \\ d=c+t}}^n 1 - \frac{\phi(n)}{n^2} [\delta n][\lambda n](n - [\lambda n]) + O(n^{\frac{3}{2}} d^2(n) \ln^3 n). \end{aligned} \quad (2.12)$$

对 (2.11) 式中的第一个和式, 仍然有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{a=1}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n 1 \\
 &= \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum'_{b=1}^n e\left(\frac{ra+sb}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \left(\sum_{d=[\lambda]+1}^n e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
 &= \frac{\phi(n)}{n^2} [\delta n][\lambda n](n - [\lambda n]) + \frac{[\delta n]}{n^2} (n - [\lambda n]) \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum'_{a=1}^n e\left(\frac{ra}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{[\delta n]}{n^2} [\lambda n] \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum'_{a=1}^n e\left(\frac{s\bar{a}}{n}\right) \right) \left(\sum_{d=[\lambda n]+1}^n e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{[\delta n]}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^n \sum'_{b=1}^n e\left(\frac{ra+sb}{n}\right) \right) \left(\sum_{c=1}^{[\lambda n]} e\left(\frac{-rc}{n}\right) \right) \left(\sum_{d=[\lambda]+1}^n e\left(\frac{-sd}{n}\right) \right) \\
 &= (\lambda\delta - \lambda^2\delta)n\phi(n) + O(n^{\frac{3}{2}}d^2(n)\ln^2 n). \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

由 (2.11)–(2.13) 及引理 4 立刻推出引理 5 的结论.

3 定理的证明

本节中, 我们将完成定理的证明. 由 $S(n, \lambda, \delta)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
 S(n, \lambda, \delta) &= \#\{a : 1 \leq a \leq \lambda n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\} \\
 &= \sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=1 \\ |a-b| < \delta n}}^n 1 \\
 &= \sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=1 \\ |a-b| < \delta n}}^{[\lambda n]} 1 + \sum'_{\substack{a=1 \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ |a-b| < \delta n}}^n 1 \\
 &= \begin{cases} 2 \sum_{t=1}^{[\delta n]} \sum'_{\substack{a=1 \\ a-b=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ b-a=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} 1 + O(d(n)), & \text{如果 } [\delta n] < [\lambda n]; \\ 2 \sum_{t=1}^{[\lambda n]-1} \sum'_{\substack{a=1 \\ a-b=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} \sum'_{\substack{b=[\lambda n]+1 \\ b-a=t \\ ab \equiv 1 \pmod{n}}}^{[\lambda n]} 1 + O(d(n)), & \text{如果 } [\delta n] \geq [\lambda n]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

于是, 由引理 3 及 5, 则有

$$S(n, \lambda, \delta) = \begin{cases} 2(\delta^2 + \delta\lambda - \delta^2\lambda)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n]; \\ 2(\lambda^2 + \lambda\delta - \lambda^3)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] \leq n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n]; \\ (\delta^2(1 - 2\lambda) + 2(\delta - 1)\lambda + \lambda^2 + 1)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] < [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ (4\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2\lambda + 1)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\delta n] \geq [\lambda n] \text{ 而且 } [\lambda n] \geq \frac{n}{2}; \\ 2(\lambda - \lambda^3)\phi(n) + O(n^{\frac{1}{2}}d^2(n)\ln^3 n), & \text{如果 } [\lambda n] + [\delta n] > n \text{ 并且 } [\lambda n] < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

这样就完成了定理的证明.

致谢 作者对审稿者提出的宝贵建议表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Zhang W P. On the difference between an integer and its inverse modulo n . J Number Theory, 1995, 52: 1–6
- 2 Beck J, Khan M R. On the uniform distribution of inverses modulo n . Period Math Hungar, 2002, 44: 147–155
- 3 Khan M R, Shparlinski I E. On the maximal difference between an element and its inverse modulo n . Period Math Hungar, 2003, 47: 111–117
- 4 Ford K, Khan M R, Shparlinski I E, et al. On the maximal difference between an element and its inverse in residue rings. Proc Amer Math Soc, 2005, 133: 3463–3468
- 5 Zhang W P. On the distribution of inverses modulo n . J Number Theory, 1996, 61: 301–310
- 6 Estermann T. On Kloostermann's sum. Mathematika, 1961, 8: 83–86
- 7 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976
- 8 Hua L K. Introduction to Number Theory. Beijing: Science Press, 1979
- 9 Pan C D, Pan C B. Goldbach Conjecture. Beijing: Science Press, 1981

Differences of integers and their inverses over incomplete intervals

XU ZheFeng & YI Yuan

Abstract Let λ, δ be any real numbers with $0 < \lambda, \delta \leq 1$, and $n > 2$ be an integer. We will study the differences of integers and their inverses modulo n over incomplete intervals $[1, [\lambda n]]$. Define $S(n, \lambda, \delta) = \#\{a : 1 \leq a \leq \lambda n, (a, n) = 1, |a - \bar{a}| < \delta n\}$. Some asymptotic formulas of $S(n, \lambda, \delta)$ will be given.

Keywords: integer and its inverse, incomplete intervals, asymptotic formula

MSC(2000): 11N69

doi: 10.1360/012011-276