



均布电势作用下横观各向同性功能梯度压电圆板的三维解析解

李翔宇, 丁皓江*, 陈伟球

浙江大学土木工程学系, 杭州 310027

* 联系人, E-mail: dinghj@zju.edu.cn

收稿日期: 2007-07-10; 接受日期: 2007-12-17

国家自然科学基金(批准号: 10472102, 10432030)和教育部高等学校博士学科点专项基金(编号: 20060335107)资助项目

摘要 提出用直接位移法研究了横观各向同性功能梯度压电圆板在表面受均匀电势作用下的响应. 由平衡方程和圆板上下表面的边界条件导出位移函数所满足的微分方程组及其边界条件. 求解微分方程组给出位移函数的显示表达式, 其中所含的 4 个积分常数可利用圆板周边边界条件确定, 从而得到自由和简支功能梯度圆板受均布电势作用下的三维压电弹性力学解析解, 并可退化得到均匀圆板的压电弹性力学解. 如果能量正定条件和一定的可积条件得到满足, 则圆板的弹性系数, 压电系数和介电系数可随厚度方向的坐标作任意变化. 最后给出了算例以说明材料的非均匀性对圆板弹性场和电场的影响.

关键词

横观各向同性
功能梯度
压电圆板
均匀电势
直接位移法

人类文明已开启了智能材料时代的曙光^[1]. 目前, 功能梯度压电材料(functionally graded piezoelectric materials, FGPM)作为一种特殊的智能材料已被制作成传感器和作动器而广泛地应用于微电机系统^[2,3]、智能结构^[4~9]、医学和航空工业^[10]. 由于物性参数随空间坐标连续变化, FGPM 具有传统层合材料无可比拟的优势. 因此, FGPM 在外载荷作用下的响应得到了不同领域研究者们越来越广泛的关注.

Cheng 等人^[11~15]运用传递矩阵法并结合渐近展开技术分析了多种 FGPM 结构的响应. Chen 和 Ding^[16,17]通过引入两个位移函数和两个应力函数发展出一类新型的状态空间列式, 并分析了横观各向同性 FGPM 矩形板的弯曲和自由振动问题. 对于匀速旋转的 FGPM 球壳, Chen 等人^[18]导出了一个三维精确解. 基于广义 Hamilton 原理, Wu 等人^[19]建议了一种分析 FGPM 壳变形问题的高阶理论. 2003 年, Zhong 和 Shang^[20]利用状态空间法得到了物性参数随板厚坐标指数变化的简支压电矩形板在外载荷作用下的三维精确解. Chen 等人^[21]采用近似层合模型并结合状态空间法给出了内充可压缩流体的 FGPM 空心圆柱壳自由振动问题的三维分析. 引入两类矢量

函数并结合传递矩阵法, Pan和Han^[22]导出了由横观各向同性FGPM组成的多层半无限体的格林函数. 最近, Lu等人^[23,24]利用类Stroh公式分别考察了简支FGPM板在机械载荷和圆柱弯曲作用下的力学和电学响应. 然而, 关于FGPM圆板的研究却鲜有报道.

本文旨在分析具有简支或自由边界的 FGPM 圆板在电载荷作用下的响应问题. 采用直接位移法, 即将位移和电势展开成径向坐标 r 的多项式, 其系数为轴向坐标 z 的待定函数, 给出了圆板弹性场和电场的三维解析解. 所获得的解精确地满足圆板上下表面的边界条件, 而柱面边界条件则在圣维南意义上满足. 在这些解中, 只要能量函数的正定性和一些可积条件得到满足, 横观各向同性压电材料的所有物性参数都可独立地随轴向坐标 z 作任意变化. 当所有材料系数等于常数时, 上述解退化到均匀圆板的情形, 此时所有公式均可显式写出. 最后针对仅两个物性参数为 z 的函数这一特殊 FGPM 圆板, 给出了数值计算, 并阐明材料非均匀性对圆板弹性场和电场的影响.

1 基本方程和直接位移法

在柱坐标 (r, θ, z) 中, 轴对称问题的基本方程如下:

$$\sigma_{r,r} + \tau_{rz,z} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad \tau_{rz,r} + r^{-1}\tau_{rz} + \sigma_{z,z} = 0, \quad (1)$$

$$D_{r,r} + r^{-1}D_r + D_{z,z} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_r = c_{11}u_{,r} + c_{12}r^{-1}u + c_{13}w_{,z} + e_{31}\phi_{,z}, \quad \sigma_\theta = c_{12}u_{,r} + c_{11}r^{-1}u + c_{13}w_{,z} + e_{31}\phi_{,z}, \quad (3)$$

$$\sigma_z = c_{13}(u_{,r} + r^{-1}u) + c_{33}w_{,z} + e_{33}\phi_{,z}, \quad \tau_{rz} = c_{44}(u_{,z} + w_{,r}) + e_{15}\phi_{,r},$$

$$D_r = e_{15}(u_{,z} + w_{,r}) - \varepsilon_{11}\phi_{,r}, \quad D_z = e_{31}(u_{,r} + r^{-1}u) + e_{33}w_{,z} - \varepsilon_{33}\phi_{,z}, \quad (4)$$

式中 σ_r , σ_θ 和 τ_{rz} 为应力分量; D_r 和 D_z 为电位移分量; u 和 w 分别为径向位移和挠度; ϕ 为电势; 逗号表示对所跟变量的微分. c_{ij} 为弹性系数; e_{ij} 为压电系数; ε_{ij} 为介电系数. 本文考虑功能梯度材料, 即材料系数是板的厚度方向坐标的函数, 即 $c_{ij} = c_{ij}(z)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(z)$ 和 $e_{ij} = e_{ij}(z)$. 对于均匀材料, 这些材料系数为常数. 假设广义位移(位移和电势)具有如下形式

$$u = ru_1(z), \quad (5)$$

$$w = w_0(z) + r^2w_2(z), \quad \phi = \phi_0(z), \quad (6)$$

式中 $u_1(z)$, $w_0(z)$, $w_2(z)$ 和 $\phi_0(z)$ 分别称为位移函数和电势函数, 或统一称为广义位移函数.

将(5)和(6)式代入(3)和(4)式得

$$\sigma_r = (c_{11} + c_{12})u_1 + c_{13}w_{0,z} + e_{31}\phi_{0,z} + r^2c_{13}w_{2,z},$$

$$\sigma_\theta = (c_{11} + c_{12})u_1 + c_{13}w_{0,z} + e_{31}\phi_{0,z} + r^2c_{13}w_{2,z}, \quad (7)$$

$$\sigma_z = 2c_{13}u_1 + c_{33}w_{0,z} + e_{33}\phi_{0,z} + r^2c_{33}w_{2,z}, \quad \tau_{rz} = rc_{44}(u_{1,z} + 2w_2),$$

$$D_r = re_{15}(u_{1,z} + 2w_2), \quad D_z = 2e_{31}u_1 + e_{33}w_{0,z} - \varepsilon_{33}\phi_{0,z} + r^2e_{33}w_{2,z}. \quad (8)$$

将(7)代入(1)式, (8)代入(2)式, 得位移函数和电势函数的控制方程

$$(e_{33}w_{2,z})_{,z} = 0, \quad (9)$$

$$(c_{33}w_{2,z})_{,z} = 0, \quad (10)$$

$$\left[c_{44}(u_{1,z} + 2w_2) \right]_{,z} + 2c_{13}w_{2,z} = 0, \quad (11)$$

$$(2e_{31}u_1 + e_{33}w_{0,z} - \varepsilon_{33}\phi_{0,z})_{,z} + 2e_{15}(u_{1,z} + 2w_2) = 0, \quad (12)$$

$$(2c_{13}u_1 + c_{33}w_{0,z} + e_{33}\phi_{0,z})_{,z} + 2c_{44}(u_{1,z} + 2w_2) = 0. \quad (13)$$

2 均匀电势作用下的圆板

考虑如图 1 所示的表面自由的 FGPM 圆板, 在上表面 $z = -h/2$ 处给定均匀电势 k_1 , 下表面 $z = h/2$ 给定均匀电势 k_2 . 于是在 $z = \pm h/2$ 处的边界条件为

$$z = h/2: \sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0, \phi = k_1, \quad (14)$$

$$z = h/2: \sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0, \phi = k_2. \quad (15)$$

将(6)和(7)式中的 ϕ , σ_z 和 τ_{rz} 代入上述边界条件, 得

$$\phi_0(-h/2) = k_1, \phi_0(h/2) = k_2, \quad (16)$$

和 $z = \pm h/2$ 处

$$w_{2,z} = 0, \quad (17)$$

$$2c_{13}u_1 + c_{33}w_{0,z} + e_{33}\phi_{0,z} = 0, \quad (18)$$

$$u_{1,z} + 2w_2 = 0. \quad (19)$$

对(10)式积分一次, 并利用边界条件(17)和 $c_{33} > 0$ 得

$$w_{2,z} = 0, \quad (20)$$

这使得(9)式自动满足. 对(20)式积分一次得

$$w_2 = a_1, \quad (21)$$

式中 a_1 为积分常数. 将(20)代入(11)式, 再积分(11)式并利用边界条件(19)和 $c_{44} > 0$ 得

$$(u_{1,z} + 2w_2) = 0. \quad (22)$$

将(21)代入(22)式, 积分一次得

$$u_1 = -2a_1z + a_2, \quad (23)$$

式中 a_2 为积分常数.

将(22)代入(12)和(13)式, 积分一次并利用边界条件(18)得

$$2c_{13}u_1 + c_{33}w_{0,z} + e_{33}\phi_{0,z} = 0, \quad (24)$$

$$2e_{31}u_1 + e_{33}w_{0,z} - \varepsilon_{33}\phi_{0,z} = a_3, \quad (25)$$

式中 a_3 是积分常数. 联立求解(24)和(25)式, 并将(23)式代入得

$$w_{0,z} = 4a_1F_1(z) - 2a_2F_2(z) + a_3F_3(z), \quad (26)$$

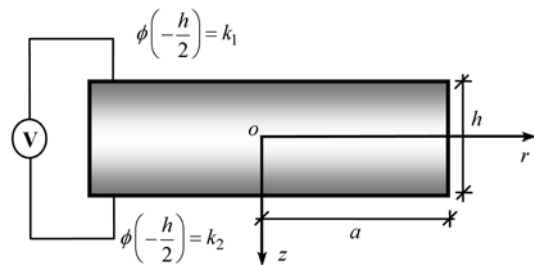


图 1 上下表面给定均匀电势的圆板

$$\phi_{0,z} = 4a_1 G_1(z) - 2a_2 G_2(z), \quad (27)$$

式中

$$\begin{aligned} J &= e_{33}^2 + c_{33} \varepsilon_{33}, \quad F_3(z) = J^{-1} e_{33}, \\ F_1(z) &= J^{-1} (e_{31} e_{33} + c_{13} \varepsilon_{33}) z, \quad F_2(z) = J^{-1} (e_{31} e_{33} + c_{13} \varepsilon_{33}), \\ G_1(z) &= J^{-1} (c_{13} e_{33} - e_{31} c_{33}) z, \quad G_2(z) = J^{-1} (c_{13} e_{33} - e_{31} c_{33}). \end{aligned} \quad (28)$$

对(26)和(27)式各积分一次得

$$w_0 = 4a_1 f_1(z) - 2a_2 f_2(z) + a_3 f_3(z) + a_4, \quad (29)$$

$$\phi_0 = 4a_1 g_1(z) - 2a_2 g_2(z) + a_5, \quad (30)$$

式中 a_4 和 a_5 为积分常数, 和

$$g_i(z) = \int_{-h/2}^z G_i(\xi) d\xi, \quad (i=1,2), \quad (31)$$

$$f_j(z) = \int_{-h/2}^z F_j(\xi) d\xi, \quad (j=1,2,3). \quad (32)$$

将(30)式代入边界条件(16)得

$$a_5 = k_1, \quad (33)$$

$$4a_1 g_1(h/2) - 2a_2 g_2(h/2) = k_2 - k_1 = k, \quad (34)$$

式中 k 为上下表面的电势差. 由前面的推导过程可以看出, 一共出现了 5 个积分常数 $a_i (i=1,2,\dots,5)$, 其中 a_5 已经解出, a_1 和 a_2 满足(34)式. 待定常数 $a_i (i=1\sim 4)$ 将由(34)式和 $r=a$ 处的边界条件来确定. 值得注意的是, a_4 为刚体位移, a_5 为常电势, 它们都不影响应力和电位移的分布.

将相关函数代入(5)~(8)式得到功能梯度压电圆板的位移、电势、应力和电位移的表达式

$$u = -r(2a_1 z - a_2), \quad (35)$$

$$w = a_1 [r^2 + 4f_1(z)] - 2a_2 f_2(z) + a_3 f_3(z) + a_4, \quad (36)$$

$$\phi = 4a_1 g_1(z) - 2a_2 g_2(z) + k_1, \quad (37)$$

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= 2a_1 [2c_{13} F_1(z) + 2e_{31} G_1(z) - (c_{11} + c_{12})z] \\ &\quad - a_2 [2c_{13} F_2(z) + 2e_{31} G_2(z) - (c_{11} + c_{12})] + a_3 c_{13} F_3(z), \end{aligned} \quad (38)$$

$$D_r = 0, \quad D_z = a_3. \quad (39)$$

从(38)和(39)式可以看出: (i) 径向应力 σ_r 和环向应力 σ_θ 仅是厚度方向坐标 z 的函数, 与 r 无关; (ii) 板中只存在 z 方向的常电位移, 径向电位移为零.

根据(38)式中径向应力 σ_r , 易得径向合力 N 和弯矩 M 的表达式

$$N \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = 2a_1 N_{01} - a_2 N_{02} + a_3 N_{03}, \quad (40)$$

$$M \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz = 2a_1 N_{11} - a_2 N_{12} + a_3 N_{13}, \quad (41)$$

式中

$$\begin{aligned} N_{i1} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^i [2c_{13}F_1(z) + 2e_{31}G_1(z) - (c_{11} + c_{12})z] dz, \\ N_{i2} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^i [2c_{13}F_2(z) + 2e_{31}G_2(z) - (c_{11} + c_{12})] dz, \\ N_{i3} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^i c_{13}F_3(z) dz, \quad (i = 0, 1). \end{aligned} \quad (42)$$

3 确定剩余积分常数

考虑周边自由的 FGPM 圆板, 此时在 $r = a$ 处有

$$N(a) = 0, \quad M(a) = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad D_r = 0, \quad (43)$$

式中后两式已由(38)和(39)式自动满足. 将(40)和(41)式分别代入(43)式的前两式得

$$2a_1N_{01} - a_2N_{02} + a_3N_{03} = 0, \quad (44)$$

$$2a_1N_{11} - a_2N_{12} + a_3N_{13} = 0. \quad (45)$$

联立(34), (44)和(45)式可求得

$$a_i = kA_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (46)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= (N_{03}N_{12} - N_{13}N_{02})/(4D), \\ A_2 &= (N_{03}N_{11} - N_{13}N_{01})/(2D), \quad A_3 = (N_{02}N_{11} - N_{01}N_{12})/(2D), \\ D &= g_1(h/2)(N_{03}N_{12} - N_{13}N_{02}) - g_2(h/2)(N_{03}N_{11} - N_{13}N_{01}). \end{aligned} \quad (47)$$

将(46)代入(35)~(39)式可得周边自由的 FGPM 圆板的位移、电势、应力和电位移的表达式

$$u = -rk(2A_1z - A_2), \quad (48)$$

$$w = k \left\{ A_1 \left[r^2 + 4f_1(z) \right] - 2A_2f_2(z) + A_3f_3(z) \right\} + a_4, \quad (49)$$

$$\phi = 2k[2A_1g_1(z) - A_2g_2(z)] + k_1. \quad (50)$$

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= k \left\{ 2A_1[2c_{13}F_1(z) + 2e_{31}G_1(z) - (c_{11} + c_{12})z] \right. \\ &\quad \left. - A_2[2c_{13}F_2(z) + 2e_{31}G_2(z) - (c_{11} + c_{12})] + A_3c_{13}F_3(z) \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$D_r = 0, \quad D_z = kA_3. \quad (52)$$

如果取 $a_4 = -kA_1[a^2 + 4f_1(0)] + 2kA_2f_2(0) - kA_3f_3(0)$, 则有 $w(a, 0) = 0$, 此时(48)~(52)式对应周边简支的 FGPM 圆板在均匀电势下的解.

对均匀材料, 即 $c_{ij} = \text{const}$, $e_{ij} = \text{const}$ 和 $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, 此时有关函数都为 z 的多项式. 按照(47)式可以计算得到 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 的显式表达式. 将它们代入(48)~(52)式可得周边自由均匀横观各向同性压电圆板应力、电位移、位移和电势的表达式如下:

$$u = -rk/(2C_2h), \quad w = k(z + h/2)C_5/(2C_2h) + a_4, \quad (53)$$

$$\phi = k(z/h + 1/2) + k_1. \quad (54)$$

$$\sigma_z = \tau_{rz} = \sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad (55)$$

$$D_r = 0, D_z = -C_4 k / (2c_{13}C_2C_3h), \quad (56)$$

式中

$$\begin{aligned} C_1 &= J^{-1}(e_{31}e_{33} + c_{13}\varepsilon_{33}), C_2 = J^{-1}(c_{13}e_{33} - e_{31}c_{33}), C_3 = J^{-1}e_{33}, \\ C_4 &= 2c_{13}C_1 + 2e_{31}C_2 - (c_{11} + c_{12}), C_5 = c_{13}^{-1}[(c_{11} + c_{12}) - 2e_{31}C_2]. \end{aligned} \quad (57)$$

比较(48)~(52)式和(53)~(56)式可以看出: (i) 均匀圆板的径向位移随径向坐标 r 线性变化, 与厚度方向坐标 z 无关, 而功能梯度圆板的径向位移与 z 的一次方有关; (ii) 均匀圆板的轴向位移 w 与 r 无关, 随 z 线性变化; 功能梯度圆板的轴向位移与 r^2 有关, 因此圆板中面变形后成为一个挠曲面, 而均匀圆板的中面和上下表面始终保持平行; (iii) 圆板中所有的应力为零, 而功能梯度圆板中的 σ_r 和 σ_θ 一般不为零. 如果取 $a_4 = -kC_5/(4C_2)$, (53)~(56)式为周边简支圆板位移、电势、应力和电位移的表达式.

4 算例及讨论

取功能梯度压电圆板的材料系数为

$$c_{11} = c_{11}^0, c_{12} = c_{12}^0, c_{13} = c_{13}^0, c_{33} = c_{33}^0 e^{\lambda(\eta+1/2)}, c_{44} = c_{44}^0, \quad (58)$$

$$e_{31} = e_{31}^0, e_{33} = e_{33}^0, e_{15} = e_{15}^0, \quad (59)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^0 e^{-\lambda(\eta+1/2)}. \quad (60)$$

式中 c_{ij}^0 , e_{ij}^0 和 ε_{ij}^0 为上表面 $z = -h/2$ 处的材料系数, $-1/2 \leq \eta = z/h \leq 1/2$, λ 为梯度指标(当 $\lambda = 0$ 对应均匀材料). 将(58)~(60)代入(28), (31), (32)和(42)式等, 可以得到相关函数和常数的显式表达式, 从而可得对应(48)~(52)及(53)~(56)式的显式表达式, 这里忽略.

下面的计算针对简支圆板, 即有 $w(a, 0) = 0$. 引入如下的无量纲量

$$\xi = \frac{r}{a}, 0 \leq \xi \leq 1, \sigma_\xi = \frac{\sigma_r}{c_{11}^0}, D_\eta = \frac{D_z}{\sqrt{c_{11}^0 \varepsilon_{33}^0}}, W = \frac{w}{h}, \Phi = \frac{\phi}{k}. \quad (61)$$

现取电势差 $k_1 = 0$ (V), $k_2 = 100$ (V), 圆板的半径 $a = 0.5$ (m), 厚度 $h = 0.1$ (m), 上表面 $z = -h/2$ 处的材料同PZT-5H^[25,26], 其材料常数见表 1.

由前面的分析可知, σ_ξ 与径向坐标无关, 仅为轴向坐标的函数. 图 2 给出了 σ_ξ 沿板厚的分布曲线. 当 $\lambda = 0$, σ_ξ 为一条水平直线; 当 $\lambda = -1$ 时, σ_ξ 沿厚度方向抛物线分布; 而当 $\lambda = 1$, σ_ξ 是 η 的减函数.

表 1 PZT-5H 的材料常数

参数	PZT-5H
弹性系数 (10^{10} N/m ²)	$c_{11}^0 = 12.6$, $c_{12}^0 = 5.5$, $c_{13}^0 = 5.3$, $c_{33}^0 = 11.7$, $c_{44}^0 = 3.53$
压电系数 (C/m ²)	$e_{15}^0 = 17.0$, $e_{31}^0 = -6.5$, $e_{33}^0 = 23.3$
介电系数 (10^{-11} F/m)	$\varepsilon_{11}^0 = 1510$, $\varepsilon_{33}^0 = 1300$

由(39)式可知, 轴向电位移为常量, 但它随梯度指标而改变. 从图 3 可看出, $\lambda=0$ 时的电位移大于 $\lambda=\pm 1$ 所对应的电位移.

图 4 为周边简支圆板中面 $\eta=0$ 处的无量纲挠度 W 随径向坐标 ξ 的变化曲线. 可以看出, 当 $\lambda=0$ 时, $W(\xi)=0$ 为一条直线; 当 $\lambda=-1$ 时, 挠曲线呈凹形且 $W(\xi)\leq 0$; 当 $\lambda=1$ 时, 挠曲线呈凸形且 $W(\xi)\geq 0$. 图 5 为表面给定均匀电势的功能梯度压电圆板的中心 $\xi=0$ 处无量纲 Φ 随径向坐标 η 的变化曲线. 当 $\lambda=0$ 时, Φ 线性变化, 且大于梯度指标 $\lambda=\pm 1$ 时所对应的电势.

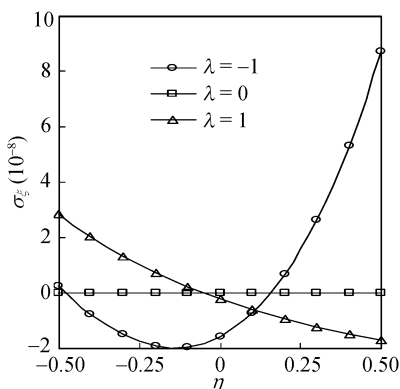


图 2 无量纲径向应力随 η 的变化曲线

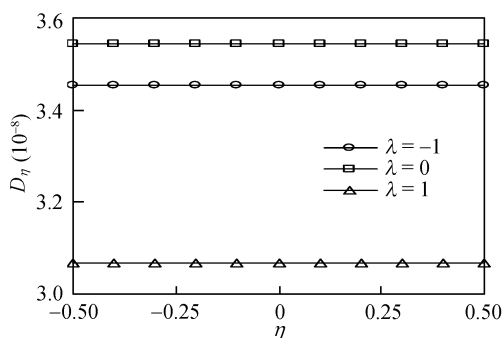


图 3 无量纲轴向应力随 η 的变化曲线

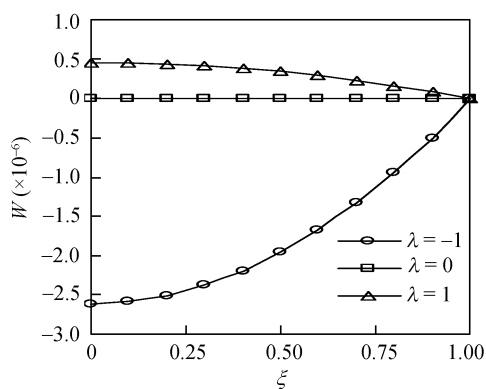


图 4 圆板的无量纲中面挠度曲线

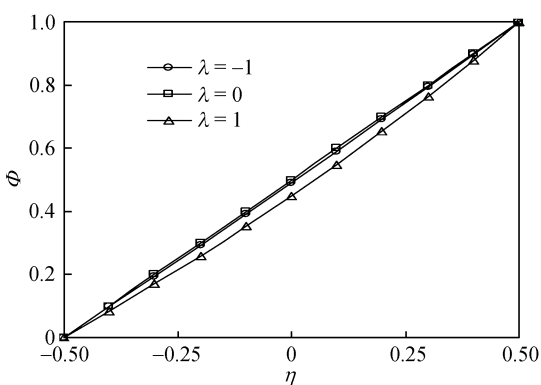


图 5 对称轴上无量纲电势随 η 的变化曲线

5 结论

对于弹性系数、压电系数和介电系数沿板的厚度方向可以任意变化的压电圆板, 当表面给定均匀电势时, 在周边自由和简支两种情形, 导出了轴对称变形的三维解析解. 这些解不依赖材料的特征根, 且可退化到均匀压电圆板情形. 从数值结果可以看到梯度指标对弹性场和电场都有显著的影响, 因此利用此特点可开展优化设计.

由于对圆板的弹性场和电场分布没有引进特殊的假定, 本文给出的解可作为基准用以校验各种近似理论和数值方法.

参考文献

- 1 Gandhi M V, Thompson B S. Smart Materials and Structures. London: Chapman & Hall, 1992
- 2 Yee Y, Nam H J, Lee S H, et al. PZT Actuator micromirror for finite-tracking mechanism of high-density optical data storage. *Sens Actuator A*, 2001, 89: 166—173 [\[DOI\]](#)
- 3 Wang S, Li J F, Wakabayashi K, et al. Lost silicon mold process for PZT microstructure. *Adv Mater*, 1999, 10: 874—876
- 4 Taya M, Almajid A A, Dunn M, et al. Design of bimorph piezo-composite actuators with functionally graded microstructure. *Sens Actuator A*, 2003, 107: 248—260 [\[DOI\]](#)
- 5 Wu C C M, Kahn M, Moy W. Piezoelectric ceramics with functionally gradients, a new application in material design. *J Am Ceram Soc*, 1999, 79: 809—812
- 6 Ichinose N, Miyamoto M, Takahashi S. Ultrasonic transducers with functionally graded piezoelectric ceramics. *J Euro Ceram Soc*, 2004, 24: 1681—1685 [\[DOI\]](#)
- 7 Zhu X H, Meng Z Y. Operational principle, fabrication and displacement characteristic of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator. *Sens Actuator A*, 1995, 48: 169—176 [\[DOI\]](#)
- 8 Yan W, Chen W Q. Electro-mechanical response of functionally graded beams with imperfectly integrated surface piezoelectric layers. *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2006, 49(5): 513—525 [\[DOI\]](#)
- 9 于涛, 仲政. 功能梯度压电悬臂梁的弯曲分析. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2006, 36(5): 518—529
- 10 Bernhard A P F, Chopra I. Trailing edge flag activated by a piezo-induced bending-torsion coupled beam. *J Am Helicopter Soc*, 1999, 44: 3—15
- 11 Cheng Z Q, Lim C W, Kitipornchai S. Three-dimensional exact solution for inhomogeneous and laminated piezoelectric plates. *Int J Solids Struct*, 1999, 37: 1425—1439
- 12 Cheng Z Q, Batra R C. Three-dimensional asymptotic scheme for piezothermoelastic laminates. *J Therm Stresses*, 2000, 23: 95—110 [\[DOI\]](#)
- 13 Cheng Z Q, Lim C W, Kitipornchai S. Three-dimensional asymptotic approach to inhomogeneous and laminated piezoelectric plates. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 3153—3175 [\[DOI\]](#)
- 14 Cheng Z Q, Batra R C. Three-dimensional asymptotic analysis of multi-electroded piezoelectric laminates. *AIAA J*, 2000, 38(2): 317—324
- 15 Reddy J N, Cheng Z Q. Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates. *J Appl Mech*, 2001, 68: 234—241 [\[DOI\]](#)
- 16 Chen W Q, Ding H J. Bending of functionally graded piezoelectric rectangular plates. *Acta Mech Sinica*, 2000, 13(4): 312—319 [\[DOI\]](#)
- 17 Chen W Q, Ding H J. On free vibration of a functionally graded piezoelectric rectangular plate. *Acta Mech*, 2002, 153: 207—216 [\[DOI\]](#)
- 18 Chen W Q, Ding H J, Liang J. The exact elasto-electric field of a rotating piezoceramic spherical shell with a functionally graded property. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 7015—7027 [\[DOI\]](#)
- 19 Wu X H, Chen C Q, Shen Y P, et al. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 5325—5344 [\[DOI\]](#)
- 20 Zhong Z, Shang E T. Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate. *Int J Solids Struct*, 2003, 40: 5335—5352 [\[DOI\]](#)
- 21 Chen W Q, Bian Z G, Lv C F, et al. 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *Int J Solids Struct*, 2004, 41: 947—964 [\[DOI\]](#)
- 22 Pan E, Han F. Green's functions for transversely isotropic piezoelectric functionally graded multilayered half space. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 3207—3233 [\[DOI\]](#)
- 23 Lu P, Lee H P, Lu C. An exact solution for simply supported functionally graded piezoelectric laminates in cylindrical bending. *Int J Mech Sci*, 2005, 47: 437—458 [\[DOI\]](#)
- 24 Lu P, Lee H P, Lu C. Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by Stroh-like formalism. *Compos Struct*, 2006, 72: 352—363 [\[DOI\]](#)
- 25 Ding H J, Liang J. The fundamental solutions for semi-infinite transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method. *Comput Struct*, 1999, 77: 447—455 [\[DOI\]](#)
- 26 Ding H J, Chen W Q. Three Dimensional Problems of Piezoelectricity. New York: Nova Science Publishers, 2001