



磁流体力学 Rayleigh-Taylor 与 Parker 不稳定性

献给李大潜教授 80 华诞

江飞¹, 江松^{2*}

1. 福州大学数学与计算机科学学院, 福州 350108;

2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088

E-mail: jiangfei0591@163.com, jiang@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2016-10-08; 接受日期: 2016-11-24; 网络出版日期: 2017-01-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271051, 11229101, 11301083, 11371065, 11471134, 11631008 和 11671086) 和国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2014CB745002) 资助项目

摘要 本文主要介绍近几年关于可压缩/不可压缩磁流体力学非线性稳定和不稳定性问题的数学分析结果, 其中包括不可压情形的磁 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性问题和可压情形的 Parker 不稳定性 (磁浮力不稳定性) 问题. 特别地, 本文从数学上分析了 (平衡) 磁场对不稳定性增长的影响, 刻画了一些因素 (如区域的几何形状和边界条件等) 如何影响不稳定性增长. 此外, 本文也介绍了重力作用下黏弹性流体中 Rayleigh-Taylor 问题的数学分析结果.

关键词 磁流体 Rayleigh-Taylor 不稳定性 Parker 不稳定性 黏弹性流体

MSC (2010) 主题分类 76E25, 76A10

1 引言

本文简要介绍近年来在不可压缩和可压缩磁流体力学不稳定性的数学理论研究方面的一些进展, 包括不可压缩情形的磁 Rayleigh-Taylor (简记为 RT) 不稳定性 (问题) 和可压情形的 Parker 不稳定性 (问题). 下面先介绍不可压磁流体 RT 不稳定性, 然后推广到可压情形, 再介绍 Parker 不稳定性.

考虑两层处在平衡状态的上重下轻且互不相溶的流体 (例如, 上层是水, 下层是油), 如果对轻重流体的交界面作轻微扰动, 则扰动因为重力的作用将会增长、被放大, 导致轻的流体上浮, 重的流体下沉. 此现象最早由 Rayleigh 在 19 世纪 80 年代研究过, 他试图解释云层在重力作用下呈现的卷积状现象^[1], 从流体力学方程组的线性分析中发现了这种不稳定性. 后来, Taylor^[2] 也独立地发现了该现象, 故现称此为 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性. 众所周知, 当系统处于势能极大值点时是不稳定的. RT 不稳定性就是这种情形, 对于处于平衡状态的上重下轻流体, 微小的扰动将造成轻重流体位置的互换并伴有势能的释放, 而由势能转化成的动能则将进一步加剧扰动的增长. 类似地, 对非均匀但密度分

英文引用格式: Jiang F, Jiang S. Rayleigh-Taylor and Parker instabilities in MHD fluids (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1155–1182, doi: 10.1360/N012016-00176

布连续的单流体, 如果其平衡态密度分布含有上重下轻的区域 (不管它多小), 则有同样的 RT 不稳定性. 同样地, 对导电的流体, RT 不稳定性也会发生, 此时, 磁场通过其诱导的 Lorentz 力对扰动的增长有影响. RT 不稳定性不仅是自然界普遍存在的现象, 而且广泛地存在于天体物理、大气海洋科学、激光聚变和磁约束聚变等研究领域中, 也是研究的热点问题. 关于 RT 不稳定性的物理机理和数值模拟研究已取得很大进展, 有很多成果. 尽管到目前对流体力学 RT 不稳定性的数学理论研究已有不少结果, 但仍有许多重要的数学问题有待解决, 例如, 如何从数学角度刻画分层流交界面的破裂行为 (参见文献 [3]), 特别是关于磁流体 RT (非线性) 不稳定性的数学分析结果还很少. 此外, 许多学者通过线性化和谱分析途径研究了流动中的各种物理因素 (如旋转效应、磁场和黏性等) 对 RT 不稳定性增长的影响, 相关结果被 Chandrasekhar 系统地收集在专著 [4] 中 (也可参见王继海的编著 [5]). 本文所介绍的磁流体 RT 问题主要研究重力场下不可压磁流体中的磁场如何影响 RT 不稳定性. 关于磁场对 RT 不稳定性影响的分析, 最早可追溯到 1954 年 Kruskal 和 Schwarzschild^[6] 对分层磁流体线性化 RT 问题的研究. 因此, 磁流体 RT 不稳定性也称为 Kruskal-Schwarzschild 不稳定性. 尽管后来有众多学者也进一步作了许多更精细的研究, 然而关于非线性磁流体 RT 问题的数学分析结果甚少, 特别是关于强磁场对不可压磁流体 RT 不稳定性的抑制作用的数学结果很少. 本文将介绍近几年在非线性的磁流体 RT 问题数学理论研究方面的一些进展.

不可压分层磁流体 RT 问题是可以进一步被推广到对应的可压缩流体情形. 然而要想把密度分布连续的单磁流体的 RT 问题推广到对应的可压缩流体情形, 需要对平衡态磁场 (也称背景磁场) 加以限制. 其中最简单的情形就是考虑平衡态磁场是水平的且沿重力场方向递增, 这种分布状态在天体物理中广泛存在. 此时, 磁场会产生与重力方向相反的磁压力 (也称磁浮力), 并支撑起更多磁流体中的物质. 特别地, 如果水平磁场沿重力场方向递增率比较大时, 可形成上重下轻的密度分布. 这种由向上磁压力支撑所形成的密度分布状态 (包含上重下轻情形) 是不稳定性的 (参见文献 [7, 8]), 并称为 Parker 不稳定. 这里简单描述 Parker 不稳定性所表现的物理现象: 假设平衡态中磁力线以波形扰动, 则上升的波峰部分中的物质沿着磁力线下滑, 以致波峰部分的质量比周围部分更轻. 如果在波峰处的浮力比磁张力大, 则波峰进一步上升, 并形成不稳定 (参见文献 [9]). Parker^[10] 首先注意到下滑物质会在磁力线波谷处聚集, 并发现这种不稳定增长率是气态星云 Jeans 引力不稳定增长率 10 倍以上, 因此, Parker 认为一些大尺度的星际星云的聚合体将以这种不稳定性形式形成. 目前, 基于磁流体力学方程组, 从数学上严格证明该现象仍是挑战性的难题. 需要注意的是, 这种不稳定性物理机制与磁浮力密切相关, 因此也常被称为磁浮力不稳定性. 磁浮力理论早在 1955 年就被 Parker^[11] 用于研究太阳耀斑产生的机制. 利用该理论可解释日珥一些独特的行为. 例如, 尽管日珥的密度是日冕的 1,000 至 10,000 倍, 但在太阳的磁浮力作用下, 日珥可在日冕中朝太阳引力相反方向悬浮, 有时甚至可在日冕中悬浮静止几个月. 目前, Parker 不稳定性已被认为与许多天体现象的发生密切相关, 例如, 星系圆盘周围出现的银晕现象^[12]. 特别地, 在 2006 年, Fukui 等^[13] 观察到这样的天体现象: 一些巨大密集的高能磁化气体环在磁浮力的作用下漂浮在星系中心附近, 不受银河系中心物质的吸引而坍缩. 该现象也为 Parker 不稳定性提供了一个重要的实例. 有关 Parker 不稳定性的数值模拟研究, 参见文献 [14–16] 及其引用的文献; 物理实验模拟, 参见文献 [17] (文中采用旋转产生的离心力模拟重力场); 耦合其他物理因素 (如旋转、温度和宇宙射线等) 的各种模型的研究, 参见文献 [18–20]. 本文所提及的 Parker 问题主要研究可压缩磁流体中磁场自身强度如何影响 Parker 不稳定性的发展. 本文将简要介绍近几年在该问题数学理论研究方面的一些进展.

本文所考虑的磁流体 RT 问题与 Parker 问题都是基于下面的磁流体运动方程组 (其推导可参见文献 [21–24]):

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \rho v_t + \rho v \cdot \nabla v + \nabla \left(P + \frac{\lambda |M|^2}{2} \right) = \mu_1 \Delta v + \mu_2 \nabla \operatorname{div} v + \lambda M \cdot \nabla M - \rho g e_3, \\ M_t = M \cdot \nabla v - v \cdot \nabla M - M \operatorname{div} v, \\ \operatorname{div} M = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

该方程组主要描述在重力作用下, 非均匀 (inhomogeneous)、黏性和无磁扩散 (即电导率为无穷大情形) 磁流体的运动规律. 在上述方程组中, 未知函数 $\rho := \rho(x, t)$, $v := v(x, t)$, $M := M(x, t)$ 和 $P := P(x, t)$ 分别表示磁流体的密度、速度、磁场和压强, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 表示空间变量, $t > 0$ 表示时间变量. $\lambda > 0$ 表示乘以 $\frac{1}{4\pi}$ 的真空磁导率, $g > 0$ 为重力常数, $e_3 := (0, 0, 1)^T$, 上标 T 表示转置, $-\rho g e_3$ 表示沿 x_3 方向的重力. $\mu_1 > 0$ 表示动力学黏性系数, $\mu_2 := \nu + \mu_1/3$, $\nu \geq 0$ 表示膨胀黏性系数. 上述方程组中第一个方程常称为质量方程 (或连续性方程), 第二个方程 (1.1)₂ 表示动量守恒, 而第三个方程 (1.1)₃ 称为电磁感应方程. 此外, 因为 (1.1)₃ 可推出 $(\operatorname{div} M)_t = 0$, 故只要 M 的初始值满足条件 (1.1)₄, 则对于任意时刻, (1.1)₄ 自动满足. 对于不可压情形, 我们还需要在上述方程组基础上添加不可压条件 $\operatorname{div} v = 0$. 而对于可压情形, 则需要根据气体状态给出压强 P 依赖于密度的表达式. 此外, 如果我们进一步考虑电导率的影响, 则需要在方程 (1.1)₃ 末端添加 $\frac{\Delta M}{\sigma \lambda}$, 其中 σ 表示电导率.

如果是研究分层磁流体 (即上重下轻且互不相溶并且由自由交界面隔开的两种磁流体) 的 RT 不稳定性 and Parker 不稳定性, 则需要在方程组 (1.1) 基础上, 进一步引入交界面高度的运动方程及交界面条件^[25]. 然而为突出磁场如何对 RT 不稳定性 and Parker 不稳定性的影响, 并避免交界面运动方程所带来的繁琐计算量, 我们在本文主要研究具有固定边界的单种但非均匀的磁流体不稳定性的数学理论, 其中的部分结果也能进一步推广到分层磁流体情形. 从第 2 节开始, 我们先介绍基于方程组 (1.1) 的线性化磁流体 RT 问题及线性化 Parker 问题的数学结果, 其中部分结果与对应的非线性问题密切相关. 由于非线性情形涉及 Lagrange 坐标变换, 所以我们将第 3 节介绍完 Lagrange 坐标下的磁流体运动方程组后, 在第 4 节中再介绍非线性情形的数学结果. 最后将在第 5 节中进一步介绍黏弹性流体中的 RT 问题. 此外, 本文采用下列 Sobolev 空间的简化记号:

$$L^p := L^p(\Omega), \quad L^2 := L^2(\Omega) := W^{0,2}(\Omega), \quad H_0^1 := W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^k := W^{k,2}(\Omega),$$

其中所省略的区域 Ω 可根据上下文确定. 当然对于不好确定的地方, 我们仍写出区域.

2 线性化磁流体 RT 和 Parker 问题

2.1 线性化磁流体 RT 问题的稳定性和不稳定性

为了研究磁流体 RT 问题, 考虑与 $x_h := (x_1, x_2)$ 变量无关的平衡态密度分布 $\bar{\rho} := \bar{\rho}(x_3) \in C^1(\bar{\Omega})$, 其满足

$$\inf_{x \in \Omega} \bar{\rho} > 0, \quad (2.1)$$

$$\bar{\rho}'|_{x_3=x_3^0} > 0, \quad (2.2)$$

其中 $x_3^0 \in \{x_3 \mid (x_h, x_3)^T \in \Omega\}$, $\bar{\rho}' := d\bar{\rho}/dx_3$, x_3^0 是 $x_0 \in \Omega$ 的第三个分量, Ω 表示磁流体运动区域. 根据 (2.2), 可以看出至少存在一个子区域, 其内部的密度会随着高度 x_3 的增加而增大, 这将导致 RT 不稳定性. 因此, (2.2) 也称为 RT 条件.

考虑常向量磁场

$$\bar{M} = \begin{cases} me_1, & \text{即磁场方向垂直于重力方向,} \\ me_3, & \text{即磁场方向平行于重力方向,} \end{cases}$$

其中 $|m|$ 表示磁场强度, $e_1 := (1, 0, 0)^T$. 则 $(\rho, v, M) = (\bar{\rho}, 0, \bar{M})$ 构成了不可压磁流体方程组

$$\begin{cases} \text{方程组 (1.1),} \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

的磁流体 RT 平衡态 (解), 其平衡态压强 $\bar{P}$ 由下式确定:

$$\nabla \bar{P} = -\bar{\rho} g e_3.$$

本文分别简称 me_3 和 me_1 为垂直 (平衡态) 磁场和水平 (平衡态) 磁场.

记沿磁流体 RT 平衡态扰动的密度量、速度量、磁场量和压强量分别为

$$\varrho = \rho - \bar{\rho}, \quad v = v - 0, \quad N = M - \bar{M}, \quad \tilde{q} = P - \bar{P},$$

则 (ϱ, v, q) 满足如下扰动方程组:

$$\begin{cases} \varrho_t + v \cdot \nabla(\varrho + \bar{\rho}) = 0, \\ (\varrho + \bar{\rho})v_t + (\varrho + \bar{\rho})v \cdot \nabla v + \nabla \left(\tilde{q} + \frac{\lambda|N + \bar{M}|^2}{2} \right) \\ \quad = \mu \Delta v + \lambda(N + \bar{M}) \cdot \nabla(N + \bar{M}) - \varrho g e_3, \\ N_t = (N + \bar{M}) \cdot \nabla v - v \cdot \nabla(N + \bar{M}), \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} N = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

对方程组 (2.3), 我们给定如下初边值条件:

$$(\varrho, v, N)|_{t=0} = (\varrho_0, v_0, N_0), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.4)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

我们称初边值问题 (2.3)–(2.5) 为 (非均匀不可压) 磁流体 RT 问题.

如果忽略扰动方程组中的非线性项, 可得如下线性化的磁流体 RT 方程组:

$$\begin{cases} \varrho_t + \bar{\rho}' v_3 = 0, \\ \bar{\rho} v_t + \nabla(\tilde{q} + \lambda m N_3) = \mu \Delta v + \lambda m \partial_i N - \varrho g e_3, \quad i = 1 \text{ 或 } i = 3, \\ N_t = m \partial_3 v, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} N = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $\partial_i := \partial_{x_i}$. 问题 (2.4)–(2.6) 的解 (在 Hadamard 意义下) 的稳定/不稳定性称为线性稳定/不稳定性.

在研究流体动力学不稳定性时, 常把非线性流体力学方程组在平衡态附近线性化, 得到线性化方程组. 线性化处理的优点在于绕开非线性项的分析困难, 有利于利用 Fourier 变换 (积分或离散 Fourier 变换) 把线性化偏微分方程组进一步转化为线性常微分方程组. 相对于偏微分方程组, 常微分方程组更容易构造出不稳定性解, 也容易寻找出精细的判别稳定性和不稳定性的准则. 相关的具体例子可参见专著 [4]. 该方法也被广泛运用于流体运动的稳定性问题的研究. 需要注意的是, 稳定性和不稳定性的研究本质上也可归结为线性化方程组谱分布的研究, 参见文献 [26]. 对线性问题 (2.6), 也可考虑分层磁流体线性化 RT 问题, 例如, Kruskal 和 Schwarzschild [6] 在 1953 年首先研究了磁场对不可压分层磁流体的线性化 RT 不稳定性的影响. 对条形区域上的线性化 RT 问题, 他们分析得到了水平磁场对 RT 不稳定性没有致稳作用的结论, 其原因在于, 在条形区域和水平磁场的情形, 磁场和流体可以解耦, 而流体 RT 问题总是不稳定的. 后来, Hide [27] 于 1955 年进一步考虑了不可压非均匀磁流体 RT 问题和电导率对不稳定性的影响, 并分析得出, 在条形区域和垂直磁场情形, 由于磁场与流体的相互 (强) 耦合, 垂直磁场对 RT 不稳定性具有致稳作用. 近来, 本文作者重新仔细分析了文献 [4] 中关于水平和垂直磁场对 RT 不稳定性影响时, 注意到一个特点: 如果考虑有界区域和无滑动边界条件, 即使对水平磁场 (2.6) 里的磁场与流体也是不可解耦的. 这个特点自然使我们猜测有界区域和无滑动边界条件可能有助于磁场的致稳作用. 为此, 考虑一般有界区域 Ω 上的方程组 (2.6), 我们利用能量方法和修正变分方法等, 能建立起如下结果:

定理 1 令 Ω 是 C^2 -光滑的有界区域, 平衡态密度函数 $\bar{\rho} \in C^1(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1) 和 (2.2). 记

$$m_C^i := \sup_{u \in H_\sigma^1} \sqrt{\frac{g \int_{\Omega} \bar{\rho}' u_3^2 dx}{\lambda \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 dx}}, \quad i = 1 \text{ 或 } i = 3, \quad \text{其中 } H_\sigma^1 := \{u \in H_0^1 \mid \operatorname{div} u = 0\}, \quad (2.7)$$

则 m_C^i 是利用磁场强度判别线性化磁流体 RT 问题 (2.4)–(2.6) 稳定和不安定的阈值, 即

- (1) 当 $|m| > m_C^i$ 时, 线性化磁流体 RT 问题是稳定的, 即解在 Sobolev 范数下可被初始值控制;
- (2) 当 $|m| < m_C^i$ 时, 线性化磁流体 RT 问题是不稳定的, 即解关于时间以 $e^{\Lambda t}$ 形式增长, 其中 $\Lambda > 0$ 称为最大增长率, 它关于 $|m|$ 严格递减, 并满足

$$\text{当 } |m| \rightarrow m_C^i \text{ 时, } \Lambda \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

注 1 上述定理中, 区域 C^2 -光滑且有界条件主要保证我们可以构造稳定和不安定的强解.

定理 1 的证明细节可参见文献 [28]. 这里补充介绍如何确定判别稳定/不安定的阈值.

首先, 为说明不稳定性, 我们寻找具有指数增长的规范模式 (normal mode) 解:

$$\varrho(x, t) = \tilde{\varrho}(x)e^{\Lambda t}, \quad u(x, t) = \tilde{u}(x)e^{\Lambda t}, \quad q(x, t) = \tilde{q}(x)e^{\Lambda t}, \quad N(x, t) = \tilde{N}(x)e^{\Lambda t},$$

其中 Λ 为正常数. 规范模式解方法是很有效的分析线性不稳定性的工具, 其可追溯到 19 世纪 Rayleigh 等对流体力学不稳定性的研究. 将上述拟设 (ansatz) 代入 (2.6), 可得

$$\begin{cases} \Lambda \tilde{\varrho} + \bar{\rho}' \tilde{u}_3 = 0, \\ \Lambda \bar{\rho} \tilde{u} + \nabla(\tilde{q} + \lambda m \tilde{N}_i) = \mu \Delta \tilde{u} + \lambda m \partial_i \tilde{N} - \tilde{\varrho} g e_3, \quad \operatorname{div} \tilde{u} = 0, \\ \Lambda \tilde{N} = m \partial_i \tilde{u}, \quad \operatorname{div} \tilde{N} = 0, \end{cases}$$

然后利用第一和第三个方程消去 $\tilde{\varrho}$ 和 $\tilde{N}$, 可得如下关于 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{q}$ 的边值问题解:

$$\begin{cases} \Lambda^2 \bar{\rho} \tilde{u} = \Lambda \mu \Delta \tilde{u} - \nabla(\Lambda \tilde{q} + \lambda m^2 \partial_i \tilde{u}_i) + \lambda m^2 \partial_i^2 \tilde{u} + g \bar{\rho}' \tilde{u}_3 e_3, \\ \operatorname{div} \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u} \mid_{\partial \Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

最后, 用 $\tilde{u}$ 同乘方程 (2.9)₁ 两边, 对所得等式在 Ω 上积分, 并利用分部积分公式和条件 (2.9)₂, 可得边值问题 (2.9) 具有下式变分结构:

$$\Lambda \int_{\Omega} \bar{\rho} |\tilde{u}|^2 dx = \tilde{E}_{\sigma}(\tilde{u}) - \Lambda \mu \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}|^2 dx,$$

其中

$$\tilde{E}_{\sigma}(\tilde{u}) := \int_{\Omega} g \bar{\rho}' \tilde{u}_3^2 dx - \lambda m^2 \int_{\Omega} |\partial_i \tilde{u}|^2 dx.$$

从变分方法的观点看, 只要存在非零函数 $\tilde{u} \in H_{\sigma}^1$ 满足 $\tilde{E}_{\sigma}(\tilde{u}) > 0$, 则线性化磁流体 RT 问题是不稳定的. 显然这等价于 $|m| < m_C^i$. 因此, 关于磁场强度的阈值应该为 m_C^i . $\square$

定理 1 表明, 在无滑动边界条件 (2.5) 下, 充分强的水平或垂直磁场能抑制 RT 不稳定性的发生. 特别地, 如果区域 Ω 关于 $x_1 = x_3$ 平面对称且 $\bar{\rho}'$ 是常数, 则 $m_C^1 = m_C^3$. 这说明水平磁场具有与垂直磁场相同的致稳效果.

对于具有有限高度和水平周期的水平层区域 $\Omega_p^h := \{(x_h, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_h \in \mathcal{T}, 0 < x_3 < h < \infty\}$, 定理 1 仍然成立, 其中

$$\mathcal{T} := (2\pi L_1 \mathbb{T}) \times (2\pi L_2 \mathbb{T}), \quad (2.10)$$

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $2\pi L_1$ 和 $2\pi L_2 > 0$ 分别表示 x_1 和 x_2 方向的周期长度. 但此时, $m_C^1 = \infty$, 因此对于区域 Ω_p^h , 由于磁场和流体可被解耦, 导致水平磁场不能抑制 RT 不稳定性发生. 我们相信, 关于水平或垂直磁场的不稳定性结果对于具有有限高度且无限长的水平层区域 $\Omega_{\mathbb{R}^2}^h := \{(x_h, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_3 < h < \infty\}$ 仍然成立, 但严格证明目前仍有困难. 值得注意的是, 在建立定理 1 之前, 大部分线性磁流体 RT 不稳定性结果都是建立在 Ω_p^h 区域上的, 这主要由于可利用离散 Fourier 变换方法进行分析. 显然这种方法无法应用到一般有界区域上. 而本文作者能得到一般有界区域上的不稳定性结果, 主要是采用了修正变分法. 该方法由 Guo 和 Tice^[29] 在构造分层流线性化 RT 不稳定解时引入, 主要用于克服黏性项引起的困难. 我们进一步分析发现该方法能避免使用 Fourier 变换, 从而可用于研究一般有界区域上黏性流的 RT 不稳定性^[30], 并可进一步应用于磁流体 RT 不稳定性的研究, 以及平衡态磁场强度与不稳定性最大增长率的定性关系 (2.8) 的推导. 此外, 利用修正变分法的思想, 定理 1 还可推广到一般平衡态磁场情形.

对于垂直磁场, 且区域为 Ω_p^h 情形, 其中 h 可取无穷大, 利用 Fourier 级数理论, 我们有如下关系式 (参见文献 [28]):

$$m_C^3 = \sqrt{\sup_{\psi(x_3) \in H_0^1(0,h)} \frac{g \int_0^h \bar{\rho}' |\psi(x_3)|^2 dx_3}{\lambda \int_0^h |\psi'(x_3)|^2 dx_3}}. \quad (2.11)$$

利用 Wirtinger 不等式, 可得 (参见文献 [31])

$$m_C^3 \leq \sqrt{\frac{gh}{4\lambda} \int_0^h |\bar{\rho}'_+| dx_3}, \quad \text{其中 } \bar{\rho}'_+ = \begin{cases} \bar{\rho}', & \text{当 } \bar{\rho}' \geq 0, \\ 0, & \text{当 } \bar{\rho}' < 0. \end{cases}$$

特别地, 如果 $\bar{\rho}'$ 是非负函数, 则有

$$m_C^3 \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gh}{\lambda} (\bar{\rho}|_{x_3=h} - \bar{\rho}|_{x_3=0})}. \quad (2.12)$$

如果 $\bar{\rho}'$ 是一个正常数, 利用不等式

$$\int_0^h \psi^2 dx_3 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h |\psi'|^2 dx_3, \quad (2.13)$$

(其中 h/π 是最佳估计常数) 和 (2.11), 可推出 $m_C^3 = \sqrt{gh\bar{\rho}'/(\pi\lambda)}$. 从中可看出: 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $m_C^3 \rightarrow \infty$. 事实上, 对于 $h = \infty$, 且 $\bar{\rho}'$ 不是正常数情形, 我们还有如下结论 (参见文献 [32, 性质 2.1]):

$$m_C^3 = \begin{cases} \text{无限,} & \text{当 } \int_0^\infty \bar{\rho}' dx_3 > 0, \\ \text{有限,} & \text{当 } \int_0^\infty \bar{\rho}' dx_3 < 0. \end{cases}$$

值得注意的是, 不等式 (2.12) 中上界与不可压分层磁流体 RT 问题是有关系的. 事实上, 沿垂直磁场扰动的不可压分层磁流体 RT 问题也有类似于 (2.11) 的关于磁场强度的阈值

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{gh}{\lambda}} (\varrho_+ - \varrho_-), \quad (2.14)$$

其中 $\varrho_+ > \varrho_-$, ϱ_+ 和 ϱ_- 分别表示上下两层均匀磁流体的密度, $h/2$ 表示处于平衡状态时上下两层磁流体的厚度^[25]. 比较 (2.14) 与 (2.12) 可看出, 如果密度在上下边界的差值给定, 则 (2.14) 恰好就是 m_C^1 达到最大值的极限情形.

2.2 线性化 Parker 问题的稳定性和不稳定性

为简单起见, 考虑可压磁流体方程组 (1.1) 中的压力表达式为

$$P := P(\rho) = A\rho^\gamma, \quad (2.15)$$

其中 $\gamma \geq 1$ 表示绝热常数, $A > 0$ 为常数. 注意, 多方理想气体的压力就满足 (2.15), 相关的物理介绍参见编著 [33].

对于上节给定的 $\bar{\rho}$ (可以允许不满足 RT 条件 (2.2)), 定义一个水平磁场 $\bar{M}_c := m_c e_1$, 其中

$$m_c = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}(C - P(\bar{\rho}) - F(g\bar{\rho}))}, \quad (2.16)$$

$F(g\bar{\rho})$ 表示 $g\bar{\rho}$ 的原函数, C 是一个正常数且满足 $\inf_{x \in \Omega} \{C - P(\bar{\rho}) - F(g\bar{\rho})\} > 0$. 则 $(\bar{\rho}, m_c)$ 满足关系式

$$P'(\bar{\rho})\bar{\rho}' = -\lambda m_c m'_c - g\bar{\rho}, \quad (2.17)$$

其中 $P'(\bar{\rho}) := A\gamma\bar{\rho}^{\gamma-1}$, $m'_c := dm_c/dx_3$. 则 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M})$ 构成可压磁流体方程组 (1.1) 的一个平衡态解, 即

$$\nabla \left(P(\bar{\rho}) + \frac{\lambda |\bar{M}_c|^2}{2} \right) = \lambda \bar{M}_c \cdot \nabla \bar{M}_c - g\bar{\rho} e_3, \quad (2.18)$$

且 $\operatorname{div} \bar{M}_c = 0$. 本文称上述平衡态为 (广义) Parker 平衡态.

注意, 上述 $\bar{M}_c \cdot \nabla \bar{M}_c$ 实际上为 0. 此外, 根据公式 $\nabla \times a \times a = a \cdot \nabla a - \nabla |a|^2/2$, 平衡态 (2.18) 也可改写成 $\nabla P(\bar{\rho}) = \nabla \times \bar{M}_c \times \bar{M}_c - g\bar{\rho} e_3$, 其中右端第一项一般称为 (广义) Lorentz 力.

如果 Parker 平衡态中的平衡态密度满足 RT 条件 (2.2), 则从 (2.17) 和 (2.15) 可得出

$$m' \big|_{x_3=x_3^0} < 0. \quad (2.19)$$

人们称 (2.19) 为 Parker 条件 (或磁浮力条件). (2.19) 意味着在 Parker 平衡态中, RT 条件隐含 Parker 条件, 反之不然. 本文称满足 (2.19) 的稳定态为磁浮力平衡态; 满足 (2.2) 的 Parker 平衡态为 Rayleigh-Taylor-Parker (简称 RTP) 平衡态. 在 RTP 平衡态中, 由 RT 条件 (2.2) 和 Parker 条件 (2.19) 可得, 至少存在着一个区域, 使得在此区域内密度随高度的增加而增加 (上重下轻), 但与重力方向相反的磁浮力 $\lambda \nabla |\bar{M}_c|^2/2$ 支撑着较重的气体悬浮在较轻的之上.

现在, 记相对于 Parker 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M})$ 的扰动密度、速度和磁场分别为

$$\varrho = \rho - \bar{\rho}, \quad v = v - 0, \quad N = M - \bar{M}_c,$$

则可得如下的扰动方程组:

$$\begin{cases} \varrho_t + \operatorname{div}((\varrho + \bar{\rho})v) = 0, \\ (\varrho + \bar{\rho})v_t + (\varrho + \bar{\rho})v \cdot \nabla v + \nabla \left(P(\varrho + \bar{\rho}) + \frac{\lambda |N + \bar{M}_c|^2}{2} \right) \\ \quad = \mu_1 \Delta v + \mu_2 \nabla \operatorname{div} v + \lambda(N + \bar{M}_c) \cdot \nabla(N + \bar{M}_c) - (\varrho + \bar{\rho})ge_3, \\ N_t = (N + \bar{M}_c) \cdot \nabla v - v \cdot \nabla(N + \bar{M}_c) - (N + \bar{M}_c)\operatorname{div} v, \\ \operatorname{div} N = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

相应的初边值条件为

$$(\varrho, v, N)|_{t=0} = (\varrho_0, v_0, N_0), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.21)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.22)$$

则初边值问题 (2.20)–(2.22) 称为 (非线性) Parker 问题. 忽略方程组 (2.20) 中的二阶项, 我们可得如下的线性化方程组:

$$\begin{cases} \varrho_t + \operatorname{div}(\bar{\rho}v) = 0, \\ \bar{\rho}v_t + \nabla(P'(\bar{\rho})\varrho + \lambda m_c N_1) = \mu_1 \Delta v + \mu_2 \nabla \operatorname{div} v + \lambda \bar{M}'_c N_3 + \lambda m_c \partial_1 N - \varrho ge_3, \\ N_t = m_c \partial_1 v - v_3 \bar{M}'_c - \bar{M}_c \operatorname{div} v, \\ \operatorname{div} N = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

其中 $M'_c := dM_c/dx_3$. 上述方程组与初边值条件 (2.21) 和 (2.22) 构成线性化 Parker 问题.

采用定理 1 的证明思路, 能很容易建立起线性化 Parker 问题 (2.21)–(2.23) 的稳定/不稳定结果.

定理 2 令 Ω 是 C^2 -光滑的有界区域, 平衡态密度面 $\bar{\rho} \in C^1(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1).

- (1) 如果 $C_r < 0$, 则线性化 Parker 问题是稳定的, 即解在 Sobolev 范数下能被初始值控制;
- (2) 如果 $C_r > 0$, 则线性化 Parker 问题是不稳定的, 即解关于时间以 $e^{\Lambda t}$ 形式增长, 其中

$$C_r := \sup_{w \in H_0^1} \frac{\tilde{E}_c(u)}{\int_{\Omega} \lambda(|\partial_1 u_v|^2 + |\operatorname{div}_v u_v|^2) dx}, \quad (2.24)$$

以及

$$\tilde{E}_c(u) := \int_{\Omega} g \bar{\rho}' u_3^2 dx + \int_{\Omega} 2g \bar{\rho} u_3 \operatorname{div} u dx$$

$$- \int_{\Omega} (P'(\bar{\rho})\bar{\rho}|\operatorname{div} u|^2 + \lambda m_c^2(|\partial_1 u_v|^2 + |\operatorname{div}_v u_v|^2)) dx, \quad (2.25)$$

其中 u_i 表示 u 的第 i 个分量, 这里及下文都记 $u_v := (u_2, u_3)$, $\operatorname{div}_v u_v := \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$.

定理 2 可以看作是定理 1 的推广. 特别地, 将 (2.24) 右端项限制在 H_{σ}^1 , 并定义

$$C_r^I := \sup_{u \in H_{\sigma}^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} g \bar{\rho}' u_3^2 dx - \lambda \int_{\Omega} m^2 |\partial_1 u|^2 dx}{\lambda \int_{\Omega} |\partial_1 u|^2 dx},$$

则 C_r^I 就是线性化磁流体 RT 问题 (2.4)–(2.6) (其中 $i = 1$) 稳定/不稳定的判别值.

从物理角度来看, 类似于磁流体 RT 问题, RT 条件有助于线性化 Parker 问题的不稳定性. 这也可从能量 $\tilde{E}_c(u)$ 的表达式看出, RT 条件使得 $\tilde{E}_c(u)$ 的第一项积分为正, 促进 C_r 的值增大, 从而更易形成不稳定性. 此外, 还可从 $\tilde{E}_c(u)$ 的最后一项积分看出平衡态磁场强度越大, 越导致 C_r 的值减小, 从而起到致稳效果. 不幸的是, 我们不能直接从 $\tilde{E}_c(u)$ 的表达式中看出磁浮力的不稳定性作用. 为此, 将 (2.17) 写成

$$\bar{\rho}' = -\frac{\bar{\rho}(\lambda m_c m_c' + g \bar{\rho})}{\gamma P(\bar{\rho})}. \quad (2.26)$$

并将其代入 (2.25), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{E}_c(u) = & - \int_{\Omega} \frac{\lambda g \bar{\rho} m_c m_c' u_3^2}{\gamma P(\bar{\rho})} dx - \int_{\Omega} \left(\left(\sqrt{\gamma P(\bar{\rho})} \operatorname{div} u - g \sqrt{\frac{\bar{\rho}^{2-\gamma}}{A \gamma}} u_3 \right)^2 \right. \\ & \left. + \lambda m_c^2 (|\partial_1 u_v|^2 + |\operatorname{div}_v u_v|^2) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

从上式易看出 Parker 条件促进 $\tilde{E}_c(u)$ 的值增长. 特别地, 如果对于某个函数 u , $\tilde{E}_c(u)$ 为正, 则必有 $C_r > 0$, 从而导致 Parker 不稳定性. 此外, 比较 C_r^I 的定义, 可看出 Parker 条件不会促使磁流体 RT 问题的不稳定性. 因此, Parker 不稳定性是可压磁流体独特的现象, 即与磁流体自身气体压强状态有关.

下面进一步分析稳定性条件 $C_r < 0$.

(1) 根据 (2.27), 可直接看出, 如果

$$m_c' \geq 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.28)$$

则 $C_r < 0$. 故 (2.28) 可作为稳定性条件. 根据关系式 (2.26), 条件 (2.28) 是等价于 Schwarzschild 稳定性条件

$$-\bar{\rho}' \geq \frac{g \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}. \quad (2.29)$$

这个稳定性条件也可从下列不等式看出:

$$E(u) \leq \int_{\Omega} g \left(\bar{\rho}' + \frac{g \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} \right) u_3^2 dx - \int_{\Omega} (\lambda m_c^2 (|\partial_1 u_v|^2 + |\operatorname{div}_v u_v|^2)) dx.$$

特别地, 设 Ω 是上半空间, Newcomb^[34] 在 1961 年通过使用 Fourier 分析方法, 根据能量负性判定 (2.29) 是线性稳定性的充分条件 (也可参见文献 [8]). 反之, 对于某个 $x_3^0 \in \{x_3 \mid (x_h, x_3)^T \in \Omega\}$, 条件

$$-\bar{\rho}'|_{x_3=x_3^0} < \frac{g \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} \Big|_{x_3=x_3^0} \quad (2.30)$$

称为 Schwarzschild 不稳定性条件 (Parker 条件的等价变形). 在第 5.2 小节, 我们会进一步介绍有关该条件在 Ω_p^b 区域上的非线性结果.

(2) 如果 m_c 满足 Parker 条件, 定义

$$\bar{n} := \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \sqrt{\frac{\int_{\Omega} g(\bar{\rho}') + g\bar{\rho}^2/\gamma P(\bar{\rho}) u_3^2 dx}{\int_{\Omega} \lambda(|\partial_1 u_v|^2 + |\operatorname{div}_v u_v|^2) dx}},$$

其中 Ω 表示在 x_1 方向有界的区域, 则可验证 $\bar{n} \in [0, +\infty)$. 需要注意的是 x_1 方向有界, 意味着在磁场方向有非滑动的边界条件, 将致使磁场和流体不能解耦, 因而有助于水平磁场的致稳效果. 根据 (2.16), 对于给定 P 、 $\bar{\rho}$ 、 g 和 λ , 可选择充分大的 m_c , 使得 $\inf_{x \in \Omega} |m_c| > \bar{n}$, 则易证明 m_c 满足 $C_r < 0$. 这表明充分强的水平磁场 $\bar{M}$ 具有抑制线性 Parker 不稳定性的发生. 特别地, 如果对 RTP 平衡态作小扰动, 则在磁场致稳作用下, 较重的气体仍可悬浮在较轻的气体之上.

最后, 我们给出 Ω 为有界区域时, $\bar{n}$ 的上界估计, 其有益于实验和数值模拟研究. 根据 $\bar{n}$ 的定义, 我们有 $\bar{n} \leq \varpi\chi$, 其中

$$\varpi := \sqrt{\frac{\|g\bar{\rho}' + g^2\bar{\rho}^2/\gamma P(\bar{\rho})\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda}}, \quad \chi := \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \sqrt{\frac{\int_{\Omega} u_3^2 dx}{\int_{\Omega} |\partial_1 u_v|^2 dx}}.$$

令 $a := \inf\{x_1 \mid (x_1, x_v) \in \Omega\}$, $b := \sup\{x_1 \mid (x_1, x_v) \in \Omega\}$ 及 $\Omega' := \{(x_1, x_v) \in \mathbb{R}^3 \mid x_v \in \mathcal{T}, a < x_1 < b\}$, 其中 $\mathcal{T}$ 由 (2.10) 定义, 则我们能选取充分大的 L_1 和 L_2 , 使得 $H_0^1(\Omega)$ 可被认为是 $H(\Omega')$ 的一个子空间. 所以有

$$\bar{n} \leq \varpi \sup_{u \in H_0^1(\Omega')} \sqrt{\frac{\int_{\Omega'} u_3^2 dx}{\int_{\Omega'} |\partial_1 u_v|^2 dx}}. \quad (2.31)$$

另一方面, 类似于 (2.11), 可得

$$\sup_{u \in H_0^1(\Omega')} \sqrt{\frac{\int_{\Omega} u_3^2 dx}{\int_{\Omega} |\partial_1 u_v|^2 dx}} = \sup_{\psi(x_1) \in H_0^1(a,b)} \sqrt{\frac{\int_a^b \psi^2(x_1) dx_1}{\int_a^b |\partial_1 \psi(x_1)|^2 dx_1}}. \quad (2.32)$$

因此, 从 (2.31) 和 (2.32) 及 (2.13) 可推出 $\bar{n} \leq (b-a)\varpi/\pi$.

3 Lagrange 坐标下的磁流体方程组

目前, 关于无磁耗散的磁流体方程全局稳定解的存在性已被许多学者证明, 参见文献 [35, 36] 及其中引用的文献. 已有存在性结果的证明思想基本都是基于某种变换, 使得动量方程中的 Lorentz 项变换为具有二阶弱耗散的项, 然后充分挖掘其弱耗散性质以实现能量估计的封闭. 考虑三维问题, 我们将通过定义流映射, 把 Euler 坐标下的磁流体方程组等价变换成 Lagrange 坐标下的方程组. 下面依次介绍 Lagrange 坐标下的磁流体 RT 问题和 Parker 问题.

3.1 Lagrange 坐标下的磁流体 RT 问题

假设存在一个可逆映射 $\zeta_0 := \zeta_0(y) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, 使得对于任意 $y \in \bar{\Omega}$, 有

$$\partial\Omega = \zeta_0(\partial\Omega), \quad \zeta_3^0 = y_3 \quad \text{和} \quad \det \nabla \zeta_0 \equiv 1, \quad (3.1)$$

其中 ζ_3^0 表示 ζ_0 的第三个分量. 定义流映射 ζ 为下列方程的解:

$$\begin{cases} \zeta_t(y, t) = v(\zeta(y, t), t), \\ \zeta(y, 0) = \zeta_0, \end{cases}$$

并且 $\Omega = \zeta(\Omega, t)$, 则 Euler 坐标下的 $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, 通过流映射 $x = \zeta(y, t)$ 后, 与 Lagrange 坐标下的 $(y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ 发生对应关系. 为了使 Euler 坐标与 Lagrange 坐标能相互变换, 进一步假定 $\zeta(\cdot, t)$ 可逆. 此外, 由非滑动边界条件 (2.5), 有 $\partial\Omega = \zeta(\partial\Omega, t)$; 并且如果 $\det \nabla \zeta_0 = 1$, $\operatorname{div} v = 0$, 则有 $\det(\nabla \zeta) = 1$. 由此可推出 $\operatorname{div} \eta = O(|\nabla \eta|^2)$, 这个性质在稳定性估计的推导中非常重要.

现在, 我们进一步定义如下的 Lagrange 未知量:

$$(\sigma, u, \tilde{p}, B)(y, t) = \left(\rho, v, P + \frac{\lambda |\nabla M|^2}{2}, M \right)(\zeta(y, t), t),$$

其中 $(y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, 则在 Lagrange 坐标下关于 σ 、 u 、 $\tilde{p}$ 和 B 方程组可改写为

$$\begin{cases} \zeta_t = u \\ \sigma_t = 0, \\ \sigma u_t - \mu \Delta_{\mathcal{A}} u + \nabla_{\mathcal{A}} \tilde{p} = \lambda B \cdot \nabla_{\mathcal{A}} B - \sigma g e_3, \\ B_t - B \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u = 0, \\ \operatorname{div}_{\mathcal{A}} u = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

对应的初边值条件为

$$(u, \zeta - y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\zeta, \sigma, u, B)|_{t=0} = (\zeta_0, \sigma_0, u_0, B_0).$$

此外, 如果初始值 ζ_0 和 B_0 满足

$$\operatorname{div}_{\mathcal{A}_0} B_0 = 0, \quad (3.3)$$

则仍有 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}} B = 0$, 这里 $\mathcal{A}_0$ 表示 $\mathcal{A}$ 的初始值.

下面对 (3.2) 中涉及 $\mathcal{A}$ 的记号作如下说明:

(1) $\mathcal{A}$ 由流映射定义:

$$\mathcal{A} := (\mathcal{A}_{ij})_{3 \times 3} := ((\nabla \zeta)^{-1})^T;$$

(2) 微分算子 $\nabla_{\mathcal{A}}$ 定义为: 对于向量函数 $u := (u_1, u_2, u_3)^T$,

$$\nabla_{\mathcal{A}} u := (\nabla_{\mathcal{A}} u_1, \nabla_{\mathcal{A}} u_2, \nabla_{\mathcal{A}} u_3)^T, \quad \nabla_{\mathcal{A}} u_i := (\mathcal{A}_{1k} \partial_k u_i, \mathcal{A}_{2k} \partial_k u_i, \mathcal{A}_{3k} \partial_k u_i)^T.$$

微分算子 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}}$ 定义为: 对于向量函数 $f_i := (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})^T$,

$$\operatorname{div}_{\mathcal{A}}(f_1, f_2, f_3) = (\operatorname{div}_{\mathcal{A}} f_1, \operatorname{div}_{\mathcal{A}} f_2, \operatorname{div}_{\mathcal{A}} f_3)^T, \quad \operatorname{div}_{\mathcal{A}} f_i := \mathcal{A}_{lk} \partial_k f_{il}.$$

在上述微分算子定义中, 已采用 Einstein 求和约定以略去关于成对出现的指标而进行的求和号, ∂_j 表示 $\partial_j := \partial_{y_j}$. 此外, 定义 $\Delta_{\mathcal{A}} X := \operatorname{div}_{\mathcal{A}} \nabla_{\mathcal{A}} X$, 其中 X 表示标量函数或向量函数.

(3) $\mathcal{A}$ 具有下列性质:

$$\operatorname{div}_{\mathcal{A}} u = \partial_l (\mathcal{A}_{kl} u_k) = 0, \quad (3.4)$$

$$\partial_i \zeta_k \mathcal{A}_{kj} = \mathcal{A}_{ik} \partial_k \zeta_j = \delta_{ij}, \quad (3.5)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{对于 } i \neq j, \\ 1, & \text{对于 } i = j. \end{cases}$$

性质 (3.4) 主要用于后面稳定性估计的推导.

下面利用类似于“磁冻结”的物理概念将 B 用 ζ 表示, 其推导细节参见文献 [25, 37, 38]. 把算子 $\mathcal{A}_{jl}$ 作用到感应方程 (3.2)₄, 并利用 (3.5), 可推出 $\mathcal{A}_{jl} \partial_t B_j = -B_j \partial_t \mathcal{A}_{jl}$, 故 $\partial_t (\mathcal{A}_{jl} B_j) = 0$. 因此,

$$\mathcal{A}_{jl} B_j = \mathcal{A}_{jl}^0 B_j^0. \quad (3.6)$$

注意, 本文记号 f^0 同样表示关于时空函数 $f := f(x, t)$ 的初始值函数. 关系式 (3.6) 表明

$$B = \nabla \zeta \mathcal{A}_0^T B_0. \quad (3.7)$$

为了获得稳定条件下磁流体 RT 问题的全局稳定解, 人们自然希望当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$(\zeta, B) \rightarrow (y, \bar{M}). \quad (3.8)$$

由 (3.7) 可推出

$$\mathcal{A}_0^T B_0 = \bar{M}, \quad \text{即 } B_0 = \nabla \zeta_0 \bar{M} = m \partial_i \zeta_0, \quad i = 1 \quad \text{或} \quad i = 3. \quad (3.9)$$

将上述 B_0 的表达式代入 (3.7), 可得

$$B = m \partial_i \zeta. \quad (3.10)$$

因此, 利用 (3.10)、(3.9) 和 (3.6), Lorentz 可表示为

$$B \cdot \nabla_{\mathcal{A}} B = m^2 \partial_i^2 \zeta. \quad (3.11)$$

现在, 我们分析 Lagrange 坐标下密度函数表达式. 利用 (3.2)₁, 可得 $\tilde{\varrho} = \rho_0(\zeta_0)$. 与 (3.8) 类似, 我们希望当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{\varrho}$ 收敛到平衡密度分布 $\bar{\rho}(y_3)$. 另一方面, 由

$$\rho_0(\zeta_0) = \bar{\rho}(y_3), \quad (3.12)$$

有

$$\tilde{\varrho} = \bar{\rho}(y_3). \quad (3.13)$$

综上分析, 我们可看出, 在初值条件 (3.12)、(3.9)、(3.3) 和 (3.1) 下, 利用关系式 (3.11) 和 (3.13), 可将方程组 (3.2) 改写成带有源项 (涉及流函数 ζ 和平衡态密度面 $\bar{\rho}$) 的 Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases} \zeta_t = u, \\ \bar{\rho} u_t - \mu \Delta_{\mathcal{A}} u + \nabla_{\mathcal{A}} \tilde{p} = \lambda m^2 \partial_i^2 \zeta - \bar{\rho} g e_3, \\ \operatorname{div}_{\mathcal{A}} u = 0, \end{cases}$$

其中 $(\bar{\rho}, B)$ 由 (3.13) 和 (3.10) 确定. 现在, 进一步引入变换 $\eta = \zeta - y$, $q = \bar{p} - \bar{p}(\zeta_3)$, 其中 $\bar{p}(\zeta_3)$ 满足 Lagrange 坐标下的平衡态方程 $\nabla_{\mathcal{A}} \bar{p}(\zeta_3) = -\bar{\rho}(\zeta_3)ge_3$, 则可得如下关于 (η, u, q) 的方程组:

$$\begin{cases} \eta_t = u, \\ \bar{\rho}u_t - \mu\Delta_{\mathcal{A}}u + \nabla_{\mathcal{A}}q - \lambda m^2 \partial_i^2 \eta = gGe_3, \\ \operatorname{div}_{\mathcal{A}}u = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

其中 $\mathcal{A} = (I + \nabla\eta)^{-1}$, $I = (\delta_{ij})_{3 \times 3}$, $G := \bar{\rho}(y_3 + \eta_3(y, t)) - \bar{\rho}(y_3)$. 对应的初边值条件为

$$(\eta, u)|_{t=0} = (\eta_0, u_0), \quad (\eta, u)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.15)$$

这里需要注意的是, 在 Lagrange 坐标下, q 是在 Lagrange 坐标下的磁压及扰动压强的和. 为简便起见, 仍然称 q 为扰动压强.

在本文中, 我们称初边值问题 (3.14) 和 (3.15) 为变换的磁流体 RT 问题. 注意, 变换后的动量方程组中的 Lorentz 具有 $\partial_3^2 \eta$ 项, 其具有的弱耗散性将在先验能量估计中发挥重要作用. 因此, 与 (原始的) 磁流体 RT 问题 (2.20)–(2.22) 相比较, 变换后的磁流体 RT 问题相对具有更好的能量结构, 以至于可以通过能量方法来证明垂直磁场的稳定作用.

3.2 Lagrange 坐标下的 Parker 问题

对于 Parker 问题, 可以把可逆映射 ζ_0 满足的条件放松为, 对于任意 $y \in \bar{\Omega}$,

$$\partial\Omega = \zeta_0(\partial\Omega) \quad \text{且} \quad \det(\nabla\zeta_0(y)) \neq 0. \quad (3.16)$$

类似于变换的磁流体 RT 问题的推导, 定义流函数 ζ , 并定义 Lagrange 坐标下的密度、速度和磁场函数为

$$(\sigma, u, B)(y, t) = (\rho, v, M)(\zeta(y, t), t).$$

则在 Lagrange 坐标下, σ 、 u 和 B 满足如下的方程组:

$$\begin{cases} \zeta_t = u, \\ \sigma_t + \sigma \operatorname{div}_{\mathcal{A}}u = 0, \\ \sigma u_t - \mu_1 \Delta_{\mathcal{A}}u - \mu_2 \nabla_{\mathcal{A}} \operatorname{div}_{\mathcal{A}}u + \nabla_{\mathcal{A}} \left(P(\sigma) + \frac{\lambda |B|^2}{2} \right) = \lambda B \cdot \nabla_{\mathcal{A}} B - \sigma ge_3, \\ B_t - B \cdot \nabla_{\mathcal{A}}u + B \operatorname{div}_{\mathcal{A}}u = 0, \\ \operatorname{div}_{\mathcal{A}}B = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

对应的初边值条件为

$$(u, \zeta - y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\zeta, \sigma, u, B)|_{t=0} = (\zeta_0, \sigma_0, u_0, B_0).$$

如果初始值 (σ_0, B_0, ζ_0) 满足 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}_0} B_0 = 0$, $\sigma_0 = \bar{\rho}J_0^{-1}$, $B_0 = m_c J_0^{-1} \partial_1 \zeta_0$, 并且 (ζ, σ, u, B) 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(\zeta, \sigma, u, B)(t) \rightarrow (y, \bar{\rho}, 0, \bar{M}_c)$. 利用 ζ 的性质和感应方程, 可得

$$\operatorname{div}_{\mathcal{A}}B = 0, \quad \sigma = \bar{\rho}J^{-1} \quad \text{且} \quad B = m_c J^{-1} \partial_1 \zeta, \quad (3.18)$$

其中 J_0 表示 J 的初始值.

记 $\eta := \zeta - y$, 利用 (3.18) 的后两式, 可将 (3.17)₃ 中的 Lorentz 项、压强和重力项进行如下改写:

$$\lambda B \cdot \nabla_{\mathcal{A}} B - \frac{\lambda |\nabla B|^2}{2} = \mathcal{L}_M + \mathcal{N}_B - \frac{\lambda |\nabla_{\mathcal{A}} \tilde{M}_c|^2}{2}, \quad (3.19)$$

$$\nabla_{\mathcal{A}} P(\sigma) = -\nabla(P'(\bar{\rho}) \operatorname{div}(\bar{\rho} \eta)) + \mathcal{N}_P + \nabla_{\mathcal{A}} P(\bar{\rho}), \quad (3.20)$$

$$\sigma g e_3 = -g \operatorname{div}(\bar{\rho} \eta) e_3 + \mathcal{N}_{\sigma} + \tilde{\rho} g e_3, \quad (3.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &:= \bar{\rho}(\zeta_3), \quad \tilde{M}_c := \bar{M}_c(\zeta_3), \\ \mathcal{L}_M &:= \lambda(m_c^2 \partial_1^2 \eta - m_c^2 \partial_1 \operatorname{div} \eta e_1 + \nabla(m_c m'_c \eta_3 + m_c^2 \operatorname{div}_v \eta_v)), \\ \mathcal{N}_B &:= \lambda(\bar{M}_c \cdot (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla)(B - \bar{M}_c) + (B - \bar{M}_c) \cdot \nabla_{\mathcal{A}}(B - \bar{M}_c) \\ &\quad + (B - \bar{M}_c) \cdot (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla) \bar{M}_c - \bar{M}_c^T (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla)(B - \bar{M}_c) \\ &\quad - (B - \bar{M}_c)^T \nabla_{\mathcal{A}}(B - \bar{M}_c) - (B - \bar{M}_c)^T (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla) \bar{M}_c \\ &\quad + m_c m'_c J^{-1} (\partial_1 \eta_2 \partial_2 \eta_3 - \partial_1 \eta_3 \partial_2 \eta_2) e_1 \\ &\quad + \frac{(\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla)(|\tilde{M}_c|^2 - |\bar{M}_c|^2)}{2} + \frac{\nabla(|\tilde{M}_c|^2 - |\bar{M}_c|^2 - 2m_c m'_c \eta_3)}{2} \\ &\quad + m_c^2 \partial_1 ((J^{-1} - 1) \partial_1 \eta + (J^{-1} - 1 + \operatorname{div} \eta) e_1) \\ &\quad - \nabla(m_c^2 ((J^{-1} - 1) \partial_1 \eta_1 + J^{-1} - 1 + \operatorname{div} \eta))), \\ \mathcal{N}_P &:= (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla)(P'(\bar{\rho}) \bar{\rho} (J^{-1} - 1)) - \nabla(P(\bar{\rho}) - P(\bar{\rho}) - P'(\bar{\rho}) \bar{\rho}' \eta_3) \\ &\quad - (\nabla_{\mathcal{A}} - \nabla)(P(\bar{\rho}) - P(\bar{\rho})) + \nabla(P'(\bar{\rho}) \bar{\rho} (J^{-1} - 1 + \operatorname{div} \eta)) \\ &\quad + \nabla_{\mathcal{A}} \int_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho} J^{-1}} (\bar{\rho} J^{-1} - z) P''(z) dz, \\ \mathcal{N}_{\sigma} &:= (\bar{\rho}' \eta_3 + \bar{\rho} J^{-1} + \bar{\rho} \operatorname{div} \eta - \tilde{\rho}) g e_3. \end{aligned}$$

注意到, Parker 平衡态 (2.18) 在 Lagrange 坐标下的表达式为

$$\nabla_{\mathcal{A}} \left(P(\bar{\rho}) + \frac{\lambda |\tilde{M}_c|^2}{2} \right) = -\tilde{\rho} g e_3. \quad (3.22)$$

所以, 把关系式 (3.19)–(3.22) 代入 (3.17), 可得下列关于 (η, u) 的方程组:

$$\begin{cases} \eta_t = u, \\ \bar{\rho} J^{-1} u_t - \mu_1 \Delta_{\mathcal{A}} u - \mu_2 \nabla_{\mathcal{A}} \operatorname{div}_{\mathcal{A}} u - \nabla(P'(\bar{\rho}) \operatorname{div}(\bar{\rho} \eta)) = g \operatorname{div}(\bar{\rho} \eta) e_3 + \mathcal{L}_M + \mathcal{N}, \end{cases} \quad (3.23)$$

其中

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}_B - \mathcal{N}_P - \mathcal{N}_{\sigma},$$

$\mathcal{A} = (\nabla \eta + I)^{-1}$, I 表示单位矩阵, (σ, B) 由 (3.18) 给出. 相应的初边值条件为

$$(\eta, u)|_{t=0} = (\eta_0, u_0), \quad (\eta, u)|_{\partial \Omega} = 0. \quad (3.24)$$

在本文中, 称初边值问题 (3.23) 和 (3.24) 为变换的 Parker 问题. 类似于变换的磁流体 RT 问题, 相对于 (原始的) Parker 问题 (2.20)–(2.22), 变换后的 Parker 问题相对具有更好的能量结构, 方便人们利用能量方法证明水平磁场的致稳效果.

4 磁流体 RT 问题的数学分析

本节先介绍平衡态磁场为垂直情形的非线性磁流体 RT 问题的结果, 然后介绍平衡态磁场为水平情形的结果, 最后介绍具有上下无限水平周期区域上的 RT 不稳定性结果.

4.1 垂直磁场情形

我们先介绍变换的磁流体 RT 问题的 (有条件) 全局稳定性结果, 然后再介绍 (原始的) 磁流体 RT 问题的稳定性结果. 为了使结果阐述简洁, 引入以下简化符号:

$$\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty), \quad \|\cdot\|_k := \|\cdot\|_{H^k}, \quad \|\cdot\|_{m,k} := \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} \|\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdot\|_k^2.$$

定义下列关于时间的泛函:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^L &:= \|\nabla \eta\|_{3,0}^2 + \|(\eta, u)\|_3^2 + \|(u_t, \nabla q)\|_1^2, \\ \mathcal{D}^L &:= \|(\partial_3 \eta, \nabla u)\|_{3,0}^2 + \|(\eta, u)\|_3^2 + \sum_{k=1}^2 \|\partial_t^k u\|_{4-2k}^2 + \|\nabla q\|_1^2 + \|\nabla q_t\|_0^2, \\ \mathcal{E}^H &:= \|\nabla \eta\|_{6,0}^2 + \|\eta\|_6^2 + \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k u\|_{6-2k}^2 + \sum_{k=0}^2 \|\nabla \partial_t^k q\|_{4-2k}^2, \\ \mathcal{D}^H &:= \|(\partial_3 \eta, \nabla u)\|_{6,0}^2 + \|(\eta, u)\|_6^2 + \sum_{k=1}^3 \|\partial_t^k u\|_{7-2k}^2 + \sum_{k=1}^2 \|\nabla \partial_t^k q\|_{5-2k}^2 + \|\nabla q\|_4^2, \\ \mathcal{G}_1(t) &= \sup_{0 \leq \tau < t} \|\eta(\tau)\|_7^2, \quad \mathcal{G}_2(t) = \int_0^t \frac{\|(\eta, u)(\tau)\|_7^2}{(1+\tau)^{3/2}} d\tau, \\ \mathcal{G}_3(t) &= \sup_{0 \leq \tau < t} \mathcal{E}^H(\tau) + \int_0^t \mathcal{D}^H(\tau) d\tau, \quad \mathcal{G}_4(t) = \sup_{0 \leq \tau < t} (1+\tau)^3 \mathcal{E}^L(\tau). \end{aligned}$$

此外, 下文中的字母 c 表示一般的正常数, 其依赖于区域 Ω 以及已知的物理参数 $\bar{\rho}$ 、 g 、 μ 、 λ 和 m (或 m_c). 请注意 Ω 在不同定理中可能表示不同形状的区域. 下面的结果是关于变换的磁流体 RT 问题 (3.14) 和 (3.15) 的稳定性, 表明了充分大的垂直磁场具有致稳效果, 即可抑制磁流体中 RT 不稳定性的发生.

定理 3 令 $\Omega := \Omega_p^h$ 是一个具有有限高度的水平周期区域, $\bar{\rho} \in C^6(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1) 和 (2.2), 且 $|m| > m_c^3$, 则存在一个充分小的常数 $\delta > 0$, 使得对任意 $(\eta_0, u_0) \in H^7 \times H^6$ 满足下述条件:

- (1) $\|\eta_0\|_7^2 + \|u_0\|_6^2 \leq \delta$;
- (2) $\zeta_0 := y + \eta_0$ 满足 (3.1) 中第一和第三条;
- (3) (η_0, u_0) 满足相容性条件 (即对于 $j = 1$ 和 2 , $\partial_t^j u(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$).

对于 $i = 3$ 的变换的磁流体 RT 问题 (3.14) 和 (3.15), 存在唯一全局解 $(\eta, u) \in C^0(\mathbb{R}_0^+, H^7 \times H^6)$ 和扰动压强 q . 此外, (η, u, q) 具有以下稳定性估计:

$$\mathcal{G}(\infty) := \sum_{k=1}^4 \mathcal{G}_k(\infty) \leq c(\|\eta_0\|_7^2 + \|u_0\|_6^2). \quad (4.1)$$

上述正常数 δ 依赖于区域 Ω 和已知的物理参数 $\bar{\rho}$ 、 g 、 μ 、 λ 和 m .

定理 3 的证明细节参见文献 [31], 下面简要介绍证明的思路.

通过标准能量方法, 存在关于 (η, u) 的两个泛函 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 和 Q 满足下列低阶能量不等式:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}^L + \mathcal{D}^L \leq Q\mathcal{D}^L, \quad (4.2)$$

其中可充分利用稳定条件 $|m| > m_C$ 证明泛函 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 等价于 $\mathcal{E}^L$. 遗憾的是, 由于 Q 不能被 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 控制, 导致不能从 (4.2) 推出封闭的能量估计. 值得注意的是, 上述能量不等式的结构与 Yan 和 Tice^[39, 40] 所研究的无表面张力的表面波问题的能量不等式结构极为相似. 为得到表面波问题的全局稳定性解, Strain 和 Guo^[41] 引入了两层能量方法. 根据两层能量方法, 需要寻找与低阶能量不等式 (4.2) 相匹配的高阶能量不等式. 因为 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 包含 $\|\eta\|_3$, 为了使 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 能被 $\mathcal{D}^L$ 所控制, 通过插值计算, 高阶能量 $\mathcal{E}^H$ 至少包含 $\|\eta\|_6$. 因此, 类似 (4.2) 推导, 可建立如下高阶能量不等式:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}^H + \mathcal{D}^H \leq c\sqrt{\mathcal{E}^L}\|(\eta, u)\|_7^2, \quad (4.3)$$

其中可利用稳定条件证明泛函 $\tilde{\mathcal{E}}^H$ 与 $\mathcal{E}^H$ 等价. 此外, 我们还有如下关于范数 $\|(\eta, u)\|_7^2$ 的最高阶能量不等式:

$$\frac{d}{dt}\|\eta\|_{7,*}^2 + \|(\eta, u)\|_7^2 \leq c(\mathcal{E}^H + \mathcal{D}^H), \quad (4.4)$$

其中范数 $\|\eta\|_{7,*}$ 与 $\|\eta\|_7$ 等价. 在先验估计中, $Q \lesssim \mathcal{E}^H$, 从而 (4.2) 可改写为

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}^L + \mathcal{D}^L \leq 0. \quad (4.5)$$

所以, 基于 (4.3)–(4.5), 并通过两层能量方法可推导出全局稳定性估计 (4.1). 事实上, 我们使用了三个能量不等式推导稳定性估计. 因此这里所用的两层能量方法也可称为三层能量方法. 需要注意的是这里之所以考虑水平板区域, 是因为它能直接提供关于 x_1 和 x_2 的偏导数估计, 然后利用 $\partial_3^2\eta$ 进一步可得到 x 的偏导估计. 由于 $\partial_3^2\eta$ 只是在 x_3 具有弱耗散性, 缺乏各向同性, 因此, 我们不能把该想法推广到一般的有界区域.

两层能量估计的基本想法在磁流体中的应用可追溯到 Ren 等在文献 [36, 定理 1.1] 中证明了具有零磁导率的二维不可压、均匀、黏性磁流体方程组 Cauchy 问题的时间衰减解的整体存在性. Abidi 和 Zhang^[35] 在研究相应的三维 Cauchy 问题时间衰减解的存在性时, 也部分地采用了类似的想法. Tan 和 Wang 则在文献 [42, 定理 2.2] 中完全用两层能量估计方法证明了三维初边值问题时间衰减解的存在性, 他们要求 $\|\eta_0\|_{17} + \|u_0\|_{16}$ 具有小性. 相比 Tan 等的结果, 定理 3 只需要 $\|\eta_0\|_7 + \|u_0\|_6$ 充分小, 原因在于基于更精细的插值不等式估计可降低初始值的正则性要求.

定理 3 的证明难点主要在于如何利用稳定性条件, 证明能量不等式 (4.2) 和 (4.3) 中的两个能量泛函 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 和 $\tilde{\mathcal{E}}^H$ 分别与 $\mathcal{E}^L$ 和 $\mathcal{E}^H$ 等价. 由于 RT 平衡态密度分布的存在, 磁流体 RT 问题的能量包括涉及重力的负能量和涉及磁场的正能量. 这个关系反映在数学上便是能量泛函包括

$$\lambda m^2 \|\partial_3 \partial_t^j u\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' |\partial_t^j u_3|^2 dy \quad (4.6)$$

和

$$\lambda m^2 \|\partial_3 \partial_h^j \eta\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' |\partial_h^j \eta_3|^2 dy. \quad (4.7)$$

因此, 在稳定性条件下, (4.6) 和 (4.7) 中涉及磁场的正能量必须占主导作用, 否则两层能量方法将失效. 注意到 $\operatorname{div} \partial_t^j u = 0$, 利用稳定性条件, 可直接看出 $\lambda m^2 \|\partial_3 \partial_t^j u\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' |\partial_t^j u_3|^2 dy$ 与 $\|\partial_3 \partial_t^j u\|_0^2$ 等

价. 所以, (4.6) 中磁场的正能量确实占主导作用. 然而, 由于 $\operatorname{div} \eta = O(|\nabla \eta|^2) \neq 0$, 这并不能直接应用于 (4.7). 为了克服这些困难, 采用驻波形式 Bogovskii 函数和利用 $\operatorname{div} \eta$ 的性质, (4.7) 可被修正为

$$\begin{aligned} & \lambda m^2 \|\partial_3 \partial_h^j \eta\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' |\partial_h^j \eta_3|^2 dy \\ &= \lambda m^2 \|\partial_3 (\partial_h^j \eta - \mathcal{B}[\partial_h^j \operatorname{div} \eta])\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' (\partial_h^j \eta_3 - \mathcal{B}_3[\partial_h^j \operatorname{div} \eta])^2 dy + \text{三阶小项}. \end{aligned}$$

由于 $\partial_h^j \eta - \mathcal{B}[\partial_h^j \operatorname{div} \eta] \in H_{\sigma}^1$, 因此根据稳定性条件, 可从上述等式中推导出

$$\|\partial_3 \partial_h^j \eta\|_0^2 \leq c \left(\lambda m^2 \|\partial_3 \partial_h^j \eta\|_0^2 - g \int_{\Omega} \bar{\rho}' |\partial_h^j \eta_3|^2 dy + \mathcal{F} \right),$$

其中 $\mathcal{F}$ 为三阶小项, 并可被 $\tilde{\mathcal{E}}^H$ 中其他正的积分项所控制. 利用上述结论, 即可通过能量方法证明 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 和 $\tilde{\mathcal{E}}^H$ 分别与 $\mathcal{E}^L$ 和 $\mathcal{E}^H$ 等价.

利用 Lagrange 逆变换, 可从定理 3 推导出 (原始的) 磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5) 的稳定性结果, 即定理 4.

定理 4 设 $\Omega := \Omega_p^h$ 是具有有限高度的水平周期区域, $\bar{\rho} \in C^6(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1) 和 (2.2), $\bar{M} = me_3$, $|m| > m_C^3$, 则存在充分小的常数 $\delta_0 > 0$, 使得对任意满足下列条件的 $(\varrho_0, v_0, N_0) \in H^6$:

- (1) 存在可逆映射 $\zeta_0 := \zeta_0(x) : \Omega \rightarrow \Omega$, 满足 (3.1), 且 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}_0} \partial_3 \zeta_0 = 0$, 其中 $\mathcal{A}_0^T = (\nabla \zeta_0)^{-1}$;
- (2) $\varrho_0 = 0$ 且 $(\bar{M} + N_0)(\zeta_0) = m \partial_3 \zeta_0$;
- (3) $\|\zeta_0 - x\|_7^2 + \|v_0\|_6^2 \leq \delta_0$;
- (4) 初始值 ϱ_0, v_0 和 N_0 满足相容性条件 (即对于 $j = 1$ 和 2 , $\partial_t^j v(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$),

磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5) 存在唯一全局解 $(\varrho, v, N) \in C^0(\mathbb{R}_0^+, H^6)$ 和扰动压强 $\tilde{q}$, 并且, $(\varrho, v, N, \tilde{q})$ 具有以下稳定性估计:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t < \infty} \left(\|(\varrho, N)\|_6^2 + \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k v(t)\|_{6-2k}^2 + \sum_{k=0}^2 \|\nabla \partial_t^k \tilde{q}(t)\|_{4-2k}^2 \right) \\ &+ \sup_{0 \leq t < \infty} (1+t)^3 (\|(\varrho, v, N)\|_3^2 + \|(v_t, \nabla \tilde{q})\|_1^2) \\ &\leq c(\|\zeta_0 - x\|_7^2 + \|v_0\|_6^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

上述正常数 δ_0 依赖于区域 Ω 和物理参数 $\bar{\rho}, g, \mu, \lambda$ 和 m .

下面进一步论证当 $|m| \in (0, m_C)$ 时, 磁流体 RT 问题是不稳定的. 这表明当垂直磁场的强度小于临界值时, 磁流体 RT 问题中的 RT 不稳定性仍会发生.

定理 5 设 $\Omega := \Omega_p^h$ 是具有有限高度的水平周期区域, $\bar{\rho} \in C^3(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1) 和 (2.2), $\bar{M} = me_3$, $|m| \in (0, m_C^3)$, 则磁流体 RT 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M})$ 是不稳定的, 即存在正常数 ε, ι 及函数组 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0) \in H^2$, 使得对任意给定 $\delta \in (0, \iota)$ 和初始值 $(\varrho_0, v_0, N_0) := \delta(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0)$, 磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5) 存在着定义在 $[0, T^{\max})$ 上的唯一强解 (ϱ, v, N) , 但在某个时刻 $T \in (0, T^{\max})$, 有

$$\|(\varrho, u, N)(T)\|_2 \geq \varepsilon, \quad (4.9)$$

其中 $\operatorname{div} \bar{v}_0 = 0$, $\operatorname{div} \bar{N}_0 = 0$, $T^{\max}$ 表示解 (ϱ, v, N) 的最大存在时间, ε, ι 和 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0)$ 依赖于区域 Ω 和磁流体 RT 问题中的物理参数.

定理 5 的证明细节参见文献 [31]. 注意, 上述定理对于一般的 C^3 -光滑有界区域仍然成立.

磁流体力学中的 RT 不稳定性常被称为磁 RT 不稳定性, 关于无黏性情形的磁 RT 不稳定性的数学证明可参见文献 [43], 其证明思想是利用脱靴不稳定性方法从线性不稳定性推导出非线性不稳定性. 该方法也被本文作者进一步用于证明有黏性情形的磁 RT 不稳定性^[32], 细节请见后面定理 7. 脱靴不稳定性方法由 Guo 和 Strauss^[44, 45] 引入. 随后, 许多学者提出了各种版本的脱靴不稳定性方法以适应不同物理模型的非线性不稳定性的证明, 如文献 [26, 46]. 据本文作者所知, 对于带有边界条件的非线性 RT 不稳定性仅有两个结果, 参见文献 [30, 47]. 这两篇文献都是通过构造不稳定的强解以证明 RT 不稳定性. 强解的优势主要在于线性不稳定解的初始值可直接用于构造非线性不稳定解的初始值. 如果考虑古典解, 则非线性不稳定解的速度必须满足相容性条件 $\partial_t v(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$. 然而对于不可压磁流体, 利用线性化问题的初始值构造满足相容性条件的非线性问题的初始值相当困难. 为此, 类似于文献 [30], 我们选择证明非线性不稳定性强解的局部存在性. 但是直接采用文献 [30] 中的方法, 证明磁流体 RT 问题不稳定性有技术上的困难, 困难主要在于磁场在边界上会出现难于处理的非零积分项. 注意, 这种边界困难是不会出现在空间周期或具有无限高度的水平周期区域情形, 因此, 文献 [32, 43] 分别能直接运用文献 [48, 49] 中的两种不同版本的脱靴方法, 证明无黏和有黏磁流体 RT 问题的不稳定性.

为克服定理 5 中由于磁场在边界上引起的困难, 本文作者提出了一个新的脱靴方法, 建立了具有无滑动边界条件的磁 RT 不稳定性 (证明细节参见文献 [31]), 其中证明的关键点在于充分利用磁流体 RT 方程组的结构和插值技巧, 给出非线性解与线性解间的误差估计.

4.2 水平磁场情形

下面把垂直磁场的结果进一步推广到水平磁场情形. 众所周知, 对具有有限高度的水平周期区域上的线性化磁流体 RT 问题, 水平磁场 (即 $\bar{M} = me_1$) 没有致稳效果 (参见文献 [28, 注 2.4]), 因此, 定理 4 不能直接推广到水平磁场的情形. 基于线性不稳定结果和定理 5 的证明, 同样可证明在水平磁场的情形下, 具有有限高度的水平周期区域上的磁流体 RT 问题存在在 (4.9) 意义下的不稳定解. 因此, 为得到水平磁场的致稳效果, 需要考虑具有有限宽度的垂直周期区域. 对此, 我们有下列结论:

定理 6 设

- (1) $\Omega := \Omega_p^w := (0, w) \times \mathcal{T}$, 其中 w 表示正常数;
- (2) $\bar{\rho} \in C^6(\bar{\Omega})$ 与变量 (x_1, x_2) 无关, 并且满足 (2.1) 和 (2.2), 对任意整数 n 和 m , 有

$$\bar{\rho}|_{x_3=2\pi nL_2} = \bar{\rho}|_{x_3=2\pi mL_2};$$

- (3) $|m| > m_C^1$,

则存在充分小的正常数 δ_0 , 使得对任意 $(\varrho_0, v_0, N_0) \in H^6$, 其满足定理 4 中的条件 (3) 和 (4) 以及下列两个条件:

- (i) 存在可逆映射 $\zeta_0 := \zeta_0(x) : \Omega \rightarrow \Omega$ 使得 (3.1) 成立, 且 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}_0} \partial_1 \zeta_0 = 0$, 其中 $\mathcal{A}_0^T = (\nabla \zeta_0)^{-1}$;
- (ii) $\varrho_0 = 0$ 且 $(\bar{M} + N_0)(\zeta_0) = m\partial_1 \zeta_0$,

对于 $\bar{M} = me_1$ 的磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5), 存在唯一全局解 $(\varrho, v, N) \in C^0(\mathbb{R}_0^+, H^6)$ 和扰动压强 $\tilde{q}$, 并且, $(\varrho, v, N, \tilde{q})$ 满足稳定性估计 (4.8).

此外, 如果 $|m| < m_C^1$, 则对于 $\bar{M} = me_1$ 的磁流体 RT 问题是不稳定的.

类似于定理 4 和 5 的证明即可得到定理 6.

注意, 在定理 6 的假设条件 (1) 和 (2) 下, 有

$$m_C^3 = \sup_{u \in H_\sigma^1} \sqrt{\frac{g \int_{\Omega} \bar{\rho}' u_3^2 dx}{\lambda \int_{\Omega} |\partial_3 u|^2 dx}} = \infty.$$

因此根据定理 5 的证明, 很容易验证对具有有限宽度的垂直周期域上的磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5), 垂直磁场 $\bar{M} = me_3$ 不具有致稳作用. 这也再次表明在磁场方向的无滑动边界条件导致磁场与流体不能解耦, 从而有助于磁场的致稳定作用. Chandrasekhar 在其编写的专著中指出 Kruskal 和 Schwarzschild [6] 首先证明了水平磁场对 RT 不稳定性没有致稳作用 (参见文献 [4] 中第 X 章 97 节的注记), 然而, 上述的定理 6 更新了该论断.

4.3 水平周期区域上的不稳定性结果

如果考虑上下无限的水平周期区域 $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, 则可以得到比 (4.9) 更精细的不稳定结果.

定理 7 记 $\Omega := \mathcal{T} \times \mathbb{R}$, m_C^3 重新定义为

$$m_C^3 := \sqrt{\sup_{\psi(x_3) \in H^1(\mathbb{R})} \frac{\int_{\mathbb{R}} g \bar{\rho}' |\psi(x_3)|^2 dx_3}{\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x_3)|^2 dx_3}} > 0.$$

设 $\bar{\rho}$ 满足 (2.1) 和 (2.2), 且对于任意 $k \geq 1$ 有 $\bar{\rho} \in W^{k, \infty}(\Omega)$;

$$\bar{M} = \begin{cases} me_1, & m \neq 0, \\ me_3, & |m| \in (0, m_c), \end{cases}$$

则磁流体 RT 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M})$ 是不稳定的, 即存在正常数 Λ^* 、 ε 、 m_0 和 ι , 以及向量函数组 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0) \in H^\infty := \bigcap_{k=0}^\infty H^k$, 使得对任意的 $\delta \in (0, \iota)$ 和初始值 $(\varrho_0, v_0, N_0) := (\delta \bar{\varrho}_0, \delta \bar{v}_0, \delta \bar{N}_0)$, 磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5) 存在定义在 $[0, T^{\max})$ 的唯一古典解 (ϱ, v, N) , 其在某个时刻 $T^\delta := \frac{1}{\Lambda^*} \ln \frac{2\varepsilon}{m_0 \delta} \in (0, T^{\max})$ 满足

$$\|\varrho(T^\delta)\|_0, \|(v_1, v_2)(T^\delta)\|_0, \|v_3(T^\delta)\|_0 \geq \varepsilon, \quad (4.10)$$

其中 $\operatorname{div} \bar{v}_0 = 0$, $\operatorname{div} \bar{N}_0 = 0$, $T^{\max}$ 表示解 (ϱ, v, N) 的最大存在时间. 此外, 对 $\bar{M} = Me_3$ 情形, 进一步有

$$\|N_3(T^\delta)\|_0 \geq \varepsilon.$$

注 2 定理 4 对于有限高度的水平板区域 $\Omega_{\mathbb{R}^2}^h$ 情形仍然成立. 然而定理 5 和 7 是否对板区域 $\Omega_{\mathbb{R}^2}^h$ 成立, 目前仍不清楚. 此外, 上述定理中的 m_C^3 满足

$$m_C^3 = \begin{cases} \text{无限}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}} \bar{\rho}' dx_3 > 0, \\ \text{有限}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}} \bar{\rho}' dx_3 < 0, \end{cases}$$

其证明参见文献 [32, 性质 2.1].

定理 7 之所以能得到更精细的不稳定性估计 (4.10), 主要在于区域 $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$ 上的磁流体 RT 问题 (2.3)–(2.5) 具有下列的能量结构: 对于充分小的 δ_0 , 如果 $\mathcal{E}(t) \leq \delta_0$, 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}^2(t) + \|v_t(t)\|_2^2 + \|(\nabla q, v_t)_t\|_0^2 + \|\nabla q\|_2^2 + \int_0^t \left(\sum_{i=0}^1 \|\partial_s^i (\nabla v, v_s, \nabla v_s)(s)\|_0^2 + \|\nabla^4 v(s)\|_0^2 \right) ds \\ & \leq C(\delta_0) \mathcal{E}_0^2 + \int_0^t (C(\delta_0) \|(\varrho, v, N)(s)\|_0^2 + \Lambda^* \mathcal{E}^2(s)) ds, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}(\varrho, v, N) := (\|\varrho, N\|_3^2 + \|v\|_4^2)^{1/2}$, $\mathcal{E}_0$ 表示 $\mathcal{E}$ 的初始能量, $C(\delta_0)$ 表示依赖于 δ_0 的正常数. 由于上式右端中可以有低阶范数 $\|(\varrho, v, N)(s)\|_0^2$, 故可采用文献 [49] 中标准的脱靴不稳定性方法证明磁流体 RT 问题的解在 L^2 范数下是不稳定的. 然而对于带有非滑动边界的磁流体 RT 问题, 本文作者不能得到类似于上面的能量结构.

5 Parker 问题的数学分析

类似磁流体 RT 问题, 对于一般区域, 稳定性结果目前还不能得到. 但对于有限宽度的垂直板区域情形, 即

$$\Omega_{\mathbb{R}^2}^w := (0, w) \times \mathbb{R}^2, \quad \text{其中 } w \text{ 为正常数}, \quad (5.1)$$

我们仍然可以建立 Parker 问题的稳定性. 下面先介绍区域 $\Omega_{\mathbb{R}^2}^w$ 上的 Parker 问题的数学结果, 然后陈述在区域 Ω_T^b 上的不稳定性结果.

5.1 有限宽度的垂直板区域情形

首先, 重新定义第 4.1 小节中关于时间的泛函:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^L(t) &:= \|\eta(t)\|_4^2 + \|u(t)\|_3^2 + \|u_t(t)\|_1^2, \quad \mathcal{E}^H(t) := \|\eta(t)\|_7^2 + \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k u(t)\|_{6-2k}^2, \\ \mathcal{D}^L(t) &:= \|(\partial_1 \eta, \operatorname{div} \eta)(t)\|_3^2 + \sum_{k=0}^2 \|\partial_t^k u(t)\|_{4-2k}^2, \quad \mathcal{D}^H(t) := \|(\partial_1 \eta, \operatorname{div} \eta)(t)\|_6^2 + \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k u(t)\|_{7-2k}^2, \\ \mathcal{G}_1(t) &= \sup_{0 \leq \tau < t} \mathcal{E}^H(\tau) + \int_0^t \mathcal{D}^H(\tau) d\tau, \quad \mathcal{G}_2(t) = \sup_{0 \leq \tau < t} (1 + \tau)^3 \mathcal{E}^L(\tau). \end{aligned}$$

由于考虑的区域是垂直条形的, 为了使磁场强度表达式 (2.16) 有意义, 我们将重力常数 g 修正为以下形式:

$$0 \leq g := g(x_3) \in C_0^7(\mathbb{R}), \quad (5.2)$$

并进一步假设

$$\bar{\rho} \in B^8(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^8(\mathbb{R}) \mid \sup_{x_3 \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^i f}{dx^i} \right| < \infty, 0 \leq i \leq 8 \right\}, \quad (5.3)$$

则在条件 (5.1)–(5.3) 和 (2.1) 下, 通过 (2.18) 方式仍可构造一个 Parker 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M})$, 其中 m_c 满足 $m_c \in B^8(\mathbb{R})$. 下面的定理是关于变换的 Parker 问题的稳定性, 表明了充分强的水平磁场具有抑制 Parker 不稳定性增长的作用.

定理 8 令 $\Omega := \Omega_{\mathbb{R}^2}^w$ 为有限宽度的垂直板区域, $(\bar{\rho}, g, m_c)$ 满足 (5.3)、(5.2)、(2.16) 和 (2.1). 如果 $C_r < 0$, 则存在充分小的 $\delta < 0$, 使得对任意满足以下条件的 $(\eta_0, u_0) \in H^7 \times H^6$:

- (1) $\|\eta_0\|_7^2 + \|u_0\|_6^2 \leq \delta$;
- (2) $\zeta_0 := y + \eta_0$ 满足 (3.16);
- (3) (η_0, u_0) 满足兼容性条件 (即对于 $j = 0, 1, 2$, 有 $\partial_t^j u(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$),

变换的 Parker 问题 (3.23) 和 (3.24) 存在唯一的全局解 $(\eta, u) \in C(\mathbb{R}_0^+, H^7 \times H^6)$, 并且满足下列稳定性估计:

$$\mathcal{G}(\infty) := \mathcal{G}_1(\infty) + \mathcal{G}_2(\infty) \leq c(\|\eta_0\|_7^2 + \|u_0\|_6^2), \quad (5.4)$$

上述正常数 δ 依赖于区域 Ω 和问题中的物理参数.

定理 8 的证明参见文献 [50, 定理 2.1].

下面简评一下定理 8 的证明. 类似于定理 3 的证明, 仍可用两层能量法证明定理 8. 众所周知, 压强的梯度项在证明可压 Navier-Stokes 方程组小解的整体存在性时, 会提供扰动密度函数的好估计. 这在变换的 Parker 问题上表现为 $-\nabla(P'(\bar{\rho})\operatorname{div}(\bar{\rho}\eta))$ 会提供有关 $\operatorname{div}\eta$ 的好估计. 利用 $\operatorname{div}\eta$ 的估计, 我们只需推导下列两个能量不等式:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}^L + \mathcal{D}^L \leq 0, \quad \frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}}^H + \mathcal{D}^H \leq \sqrt{\mathcal{E}^L}\|\eta\|_7^2,$$

其中能量泛函 $\tilde{\mathcal{E}}^L$ 和 $\tilde{\mathcal{E}}^H$ 在稳定条件 $C_r < 0$ 下分别等价于 $\mathcal{E}^L$ 和 $\mathcal{E}^H$. 结果通过标准两层能量方法, 即可得到全局稳定估计 (5.4). 此外, 在证明能量泛函等价性时, 不需要像磁流体 RT 问题那样引入 Bogovskii 算子, 而是直接利用稳定性条件和正项 $\int_{\Omega} P'(\bar{\rho})\bar{\rho}|\operatorname{div}u|^2 dy$ 直接证明 $-E(u)$ 等价于 $\|(u, \partial_1 u, \operatorname{div}_v u_v, \operatorname{div}u)\|_0^2$.

最后, 利用 Lagrange 逆变换, 可从定理 8 推出如下关于 (原始的) Parker 问题的稳定性结果.

定理 9 令 $\Omega := \Omega_{\mathbb{R}^2}^w$ ($w \in (0, \infty)$), $(\bar{\rho}, g, m_c)$ 满足 (5.3)、(5.2)、(2.16) 和 (2.1). 如果 $C_r < 0$, 则存在一个充分小的 $\delta < 0$, 使得对于任意满足以下条件的 $(\varrho_0, v_0, N_0) \in H^6$:

(1) 存在可逆映射 $\zeta_0 := \zeta_0(x) : \Omega \rightarrow \Omega$ 满足 (3.16);

(2) $\|\zeta_0 - x\|_7^2 + \|v_0\|_6^2 \leq \delta$;

(3) $\rho_0(\zeta_0) = \bar{\rho}(\det(\nabla\zeta_0))^{-1}$, $(N_0 + \bar{M}_c)(\zeta_0) = m_c(\det(\nabla\zeta_0))^{-1}\partial_1\zeta_0$ 且 $\operatorname{div}_{\mathcal{A}_0}((N_0 + \bar{M}_c)(\zeta_0)) = 0$, 其中 $\mathcal{A}_0^T = (\nabla\zeta_0)^{-1}$;

(4) 初始值 (ϱ_0, v_0, N_0) 满足兼容性条件 (即对 $j = 0, 1, 2$, 有 $\partial_t^j v(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$),

Parker 问题 (2.20)–(2.22) 存在唯一的全局解 $(\varrho, v, N) \in C(\mathbb{R}^+, H^6)$, 且满足以下估计:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq \infty} \left(\|(\varrho, N)\|_6^2 + \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k v(t)\|_{6-2k}^2 \right) + \sup_{0 \leq t \leq \infty} (1+t)^3 (\|(\varrho, v, N)\|_3^2 + \|v_t\|_1^2) \\ & \leq c(\|\zeta_0 - x\|_7^2 + \|v_0\|_6^2), \end{aligned}$$

上述正常数 δ 依赖于区域 Ω 和物理参数.

下面的定理 10 给出 Parker 问题在 $C_r > 0$ 时的不稳定性. 定理 10 结合定理 4, 表明 C_r 可作为 Parker 问题的稳定性/不稳定性判别值.

定理 10 令 $\Omega := \Omega_{\mathbb{R}^2}^w$ ($w \in (0, \infty)$), $(\bar{\rho}, g, m_c)$ 满足 (5.3)、(5.2)、(2.16) 和 (2.1). 如果 $C_r > 0$, 则 Parker 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, \bar{M}_c)$ 是不稳定的, 即存在一个正常数 ε 和 ι , 以及函数组 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0, v_r) \in H^3$, 使得对任意给定的 $\delta \in (0, \iota)$ 和初始值

$$(\varrho_0, v_0, N_0) := \delta(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0) + (0, \delta^2 v_r, 0),$$

Parker 问题 (2.20)–(2.22) 存在定义在 $[0, T^{\max})$ 上的唯一古典解 (ϱ, v, N) , 其在某个时刻 $T \in (0, T^{\max})$ 满足

$$\|(\varrho, u, N)(T)\|_3 \geq \varepsilon.$$

上述初始值 (ϱ_0, v_0, N_0) 满足 Parker 问题的相容性条件 $\partial_t^i v(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 0, 1$, 并且 $\operatorname{div}N_0 = 0$, $T^{\max}$ 表示解 (ϱ, v, N) 的最大存在时间, 常数 ε, ι 和 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{N}_0, v_r)$ 依赖于区域 Ω 和物理参数.

定理 10 的证明参见文献 [50, 定理 2.2].

上述定理表明 Parker 问题在 $C_r > 0$ 时会出现 Parker 不稳定性. 定理 10 的证明思路与定理 5 类似. 不过由于考虑的是古典解, 因此利用线性不稳定性推导非线性不稳定性时, 需要对线性不稳定解的初始值函数进行修正, 使得修正后的初始值能满足相应的非线性问题的相容性条件. 幸运的是, 我们可以利用椭圆方程的理论实现这个想法. 此外, 定理 5 对于 C^4 -光滑的有界区域仍然成立.

5.2 水平周期区域上的不稳定性结果

现在, 我们把 Parker 不稳定性结果进一步推广到具有有限高度的水平周期区域 Ω_p^h . 对此情形, 容易验证: 如果 $\bar{\rho}$ 满足 Schwarzschild 不稳定性条件, 且 L_1 充分大, 或者 $\bar{\rho}$ 满足 Tserkovnikov 不稳定性条件^[51]:

$$\text{对于某个 } x_3^0 \in (0, l), \quad -\bar{\rho}'|_{x_3=x_3^0} < \frac{g\bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho}) + \lambda m_c^2} \Big|_{x_3=x_3^0}, \quad (5.5)$$

则必有 $C_r > 0$. 所以, 类似于定理 5 的证明, 很容易建立起 Schwarzschild 不稳定性条件或 Tserkovnikov 不稳定性条件下的 Parker 不稳定性结果.

在给出具体的结果前, 先引入下列记号:

$$\begin{aligned} \chi(\psi) &:= \int_0^h \left(\lambda m_c^2 \left(|\psi'|^2 + \frac{\psi^2}{L_2^2} \right) - \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) \psi^2 \right) dx_3, \\ \xi_{3D} &:= \sup_{\psi \in H_0^1(0, h)} \sqrt{\frac{\chi^2(\psi) + \frac{4}{L_2^2} \int_0^h \lambda m_c^2 \psi^2 dx_3 \int_0^h \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) \psi^2 dx_3 - \chi(\psi)}{2 \int_0^h \lambda m_c^2 \psi^2 dx_3}}, \\ \kappa(h) &:= \sup_{\psi \in H_0^1(0, h)} \sqrt{\frac{\int_0^h \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) \psi^2 dx_2}{\int_0^h \lambda m_c^2 |\psi'|^2 dx_2}}, \\ \xi_{2D} &:= \sup_{\psi \in H_0^1(0, h)} \sqrt{\frac{\int_0^h \left(\left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) \psi^2 - \lambda m_c^2 |\psi'|^2 \right) dx_2}{\int_0^h \lambda m_c^2 \psi^2 dx_2}}. \end{aligned}$$

注意, 为简单起见, 在上述 ξ_{3D} 和 ξ_{2D} 定义中, 我们省略了说明: ψ 需进一步满足分母不为零及开根号有意义的限制性条件. 本节的主要结果为定理 11.

定理 11 令 $\Omega := \Omega_p^h$ 为有限高度的水平周期区域, g 为常数, $\bar{\rho} \in C^4(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1), m_c 由 (2.16) 给出. 如果下列两个条件有一个满足:

- (1) $\bar{\rho}$ 满足 Schwarzschild 不稳定性条件 (2.30), 且 $L_1 > \xi_{3D}^{-1}$;
- (2) $\bar{\rho}$ 满足 Tserkovnikov 不稳定性条件 (5.5),

则 Parker 问题 (2.20)–(2.22) 是不稳定的, 其不稳定性详细表述类似于定理 5.

定理 11 的参见文献 [50, 定理 2.3].

注 3 不稳定性条件 (5.5) 最早由 Tserkovnikov 于 1960 年从 (离散) Fourier 像空间下能量的角度分析得到. 特别地, 当 $m_c = 0$ 时, (5.5) 就变成著名的 Schwarzschild 不稳定条件. 关于该条件下的非线性磁对流不稳定性问题, 我们将在后续工作中开展研究. Newcomb 于 1961 年推广了 Tserkovnikov 的工作, 并进一步验证了条件 (2.30) 是 Parker 不稳定性的充分条件^[34]. 显然, 条件 (2.30) 比 (5.5) 更好. 利用已有的 Fourier 相空间下的能量方法, 并进一步使用函数构造的小技巧, 可在定理 11 假设条件下, 推出 $C_r > 0$. 所以, 定理 11 的证明可归结为定理 10 的证明. 据本文作者所知, 定理 11 首次从

动力系统角度严格证明了 Schwarzschild 不稳定性条件和 Tserkovnikov 不稳定性条件可以作为非线性 Parker 不稳定性的充分条件.

注 4 根据 Schwarzschild 不稳定性条件, 存在一个开区间 $I \subset (0, h)$ 满足, 对于任意的 $x_3 \in I$, 有

$$-\bar{\rho}' < \frac{g\bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})}.$$

故可选取一个函数 $\psi_0 \in H_0^1(0, h)$ 使得 $\psi_0(x_3) > 0$ 在 I 内, 且 $\psi_0(x_3) = 0$ 在 $(0, h) \setminus I$ 内. 所以,

$$\int_0^h \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) \psi_0^2 dx_3 > 0.$$

因此, ξ_{3D} 必为非零正常数. 并且对于给定的 $\bar{\rho}$, 可以看出当 $|m| \rightarrow \infty$ 时, $\xi_{3D} \rightarrow 0$.

注 5 前面已陈述过 Schwarzschild 不稳定性条件与 Parker 条件是等价的. 因此, 定理 11 表明, 如果定义域中存在一个点, 使得 Parker 平衡态 (2.18) 中的磁浮力在该点的方向与重力场的方向相反, 则 Parker 问题是不稳定的. 这是可压磁流体 Parker 不稳定性的本质特征, 这也是为何称之为磁浮力不稳定性的原因. 根据定理 8, 人们知道, 如果平衡态的磁力方向与重力场方向一致, 则 Parker 问题是稳定的. 然而, 定理 8 的证明依赖于水平方向的无滑动边界条件. 人们自然会问, 如果水平方向没有无滑动边界条件或者说区域是水平周期的, 那么定理 8 中的稳定性结论仍然成立吗? 关于这个问题的研究, 我们将在今后的工作中继续开展.

注 6 如果区域为 $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, 且 $g \in C_0^3(\mathbb{R})$, 则可以建立起类似于定理 11 的 Parker 不稳定性结果 (包含二维和三维两种情形), 并且解在 L^2 范数下是不稳定的.

最后, 我们介绍二维情形下的 Parker 不稳定性.

定理 12 令 $h \in (0, \infty)$, $\Omega := 2\pi L_1 \mathbb{T} \times (0, h) \subset \mathbb{R}^2$, g 为正常数, $\bar{\rho} := \bar{\rho}(x_2) \in C^4(\Omega)$ 满足 (2.1), $m_c := m_c(x_2)$ 由 (2.16) 给出. 如果 $\kappa > 1$ 且 $L_1 > \xi_{2D}^{-1}$, 则对于 $\bar{M}_c = (m_c, 0)$ 的二维 Parker 问题 (2.21)–(2.23) 是不稳定的, 其不稳定性详细表述类似于定理 5.

注 7 注意 κ 的定义是非常类似于定义在区域 $\Omega := \Omega_p^h$ 上沿垂直磁场扰动的三维磁流体 RT 问题稳定/不稳定性的临界值 m_C^3 .

注 8 在 Schwarzschild 稳定性条件下, 对于 $h < \infty$, 有 $0 < \kappa(h) < \infty$. 并且对于给定的 $\bar{\rho}$, 当 $m_c \rightarrow \infty$ 时, $\kappa \rightarrow 0$. 另一方面, 如果 $\kappa \in (0, 1]$, 使用离散 Fourier 分析方法, 则对于任意的 $w \in H_0^1$, $E(w) \leq 0$. 因此, $C_r \leq 0$. 所以, 在二维情形下, 充分大的水平磁场具有致稳效果. 这与二维情形下沿着水平磁场扰动的磁流体 RT 问题的结论相一致. 此外, 如果 $h = \infty$ 且 $0 \leq g \in C_0^0(\mathbb{R})$, 则在 Schwarzschild 不稳定性条件下, 有

$$\kappa(\infty) = \begin{cases} \text{无限,} & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) dx_2 > 0, \\ \text{有限,} & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{g^2 \bar{\rho}^2}{\gamma P(\bar{\rho})} + g\bar{\rho}' \right) dx_2 < 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

证明参见文献 [32, 性质 2.1]. 注意, (5.6) 中积分区域改成 $\mathbb{R}$ 后仍然成立.

6 黏弹性流体力学 RT 不稳定性

本节主要考虑磁流体 RT 问题在黏弹性流体中的推广. 之所以考虑这样的问题, 是因为我们注意到, 如果方程组 (3.14) 中的 $\partial_3^2 \eta$ 替换成 $\Delta \eta$, 则所得到的方程组刚好就是下列运动方程组在某些条件

限制下变换到 Lagrange 坐标后所得到的方程组:

$$\begin{cases} \rho_t + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho v_t + \rho v \cdot \nabla v - \mu \Delta v - \kappa \operatorname{div}(\rho U U^T) + \nabla p = -g \rho e_3, \\ U_t + v \cdot \nabla U - \nabla v U = 0, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

因此, 我们自然期待弹性系数 κ 将在方程组 (6.1) 中具有类似于磁场的致稳效果. 方程组 (6.1) 也称为在重力作用下非均匀理想黏弹性流体的 Oldroyd-B 模型, 其中 ρ 、 v 和 p 仍分别表示流体的密度、速度和压强; 3×3 矩阵函数 $U := U(x, t)$ 表示形变张量; μ 、 g 和 κ 分别表示黏性系数、重力常数和弹性系数. 更多关于黏弹性流体模型的数学结果, 参见文献 [52–56]; 关于可压情形的模型可参见文献 [57, 58].

许多学者已从物理角度研究了黏弹性流体中的 RT 不稳定性, 参见文献 [59, 60] 及其中引用的文献. 我们这里考虑的模型 (6.1) 与已有的物理文献中所研究的黏弹性流体模型略有不同. 众所周知, 黏弹性流体受到外力作用时, 具有黏性和弹性两种物理特性. 特别地, 当弹力受外力拉直时, 其会产生抵抗形变的弹力 (或称回复力), 一旦移除外力, 黏弹性流在弹力作用快速恢复原状. 因此, 弹力具有像表面张力那样的致稳效果. 关于表面张力在 RT 问题中的致稳作用, 参见文献 [29, 61, 62]. 但据本文作者所知, 目前还没有任何关于弹性致稳的严格数学证明. 下面介绍一些最近的数学分析结果.

考虑方程组 (6.1) 的黏弹性流体 RT 平衡态:

$$v(t, x) = 0, \quad U = I, \quad \nabla(\bar{\rho} + \kappa \bar{\rho}) = -\bar{\rho} g e_3, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

其中 I 仍表示恒等矩阵, $\bar{\rho}$ 满足 (2.1) 和 (2.2). 不难证明该平衡密度分布 $\bar{\rho}$ 仅依赖于 x_3 . 并且对于给定的 $\bar{\rho}$, 可通过流体静力学公式计算出平衡压强 $\bar{p}$.

记扰动量为

$$\varrho = \rho - \bar{\rho}, \quad v = v - 0, \quad q = p - \bar{p}, \quad V = U - I,$$

则方程组 (6.1) 可写成如下的扰动方程组:

$$\begin{cases} \varrho_t + v \cdot \nabla(\varrho + \bar{\rho}) = 0, \\ (\varrho + \bar{\rho})v_t + (\varrho + \bar{\rho})v \cdot \nabla v + \nabla \beta = \mu \Delta v + \kappa \operatorname{div}((\varrho + \bar{\rho})(V + V^T + VV^T)) - g \varrho e_3, \\ V_t + v \cdot \nabla V - \nabla v(I + V) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

其中 $\beta := q + \kappa \varrho$. 对应的初边值条件为

$$(\varrho, v, V)|_{t=0} = (\varrho_0, v_0, V_0), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (6.3)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t > 0, \quad (6.4)$$

其中初始值满足相容性条件 $\operatorname{div} v_0 = 0$.

我们称初边值问题 (6.2)–(6.4) 为黏弹性 RT 问题. 类似于 (2.7), 定义

$$\kappa_C := \sup_{u \in H_0^1} \frac{2g \int_D \bar{\rho}' u_3^2 dx}{\|\sqrt{\bar{\rho}}(\nabla u + \nabla u^T)\|_0^2},$$

则 κ_C 是弹性系数判别黏弹性 RT 问题稳定性/不稳定性的阈值. 具体结果如下:

定理 13 令 $\bar{\rho}$ 满足 (2.1) 和 (2.2), 且 $\bar{\rho}'$ 为常数. 如果弹性系数 $\kappa > \kappa_C$, 则存在充分小的 $\delta_0 < 0$, 使得对于任意 $(\varrho_0, v_0, V_0) \in H^2$, 满足

$$\begin{aligned} v_0 &\in H_\sigma^1, \quad \|(v_0, V_0)\|_2 \leq \delta_0, \quad \det(I + V_0) = 1, \\ \text{对于某个 } \psi_0 &\in H^3 \cap H_0^1, \quad V_0 = (\nabla \psi_0 + I)^{-1} - I, \\ \varrho_0 &= \bar{\rho}' \psi_0^0, \end{aligned}$$

则黏弹性 RT 问题 (6.2)–(6.4) 存在唯一的强解 $(\varrho, v, V) \in C(\mathbb{R}_0^+, H^2)$, 满足如下的指数衰减稳定性估计:

$$\|(\varrho, v, V)(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_0^2 \leq c \|(\varrho_0, v_0, V_0)\|_2^2 e^{-\omega t},$$

上述 c 、 δ_0 和 ω 仅依赖于区域 Ω 、 $\bar{\rho}$ 和物理参数 ρ 、 μ 、 g 及 κ .

定理 13 证明的细节参见文献 [63, 定理 1.1]. 值得指出的是上述定理中去掉条件 (2.2) 后仍然成立. 类似地, 在定理 4 去掉条件 (2.2) 后, 且只要 $m \neq 0$, 则修改后的定理仍然成立.

注 9 类似于定理 4, 还有如下版本的稳定性结果, 其稳定解的存在性条件与定理 13 中的条件略有不同: 令 $\bar{\rho} \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足 (2.1). 如果弹性系数 $\kappa > \kappa_C$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对于任意满足下列条件的初始值 $(v_0, V_0) \in H^2$:

(1) 存在可逆映射 $\zeta_0: \Omega \rightarrow \Omega$, 满足 $\eta_0 := \zeta_0(y) - y \in H_0^1 \cap H^3$, $V_0 = \nabla \zeta_0(\zeta_0^{-1}(x)) - I$ 和 $\det \nabla \zeta_0 = 1$;

(2) $\varrho_0 = 0$ 且 $\|(v_0, V_0)\|_2 \leq \delta$ (根据假设 (1), 该小性条件同样可推导出 $\|\eta_0\|_3$ 具有小性), 黏弹性 RT 问题 (6.2)–(6.4) 存在唯一强解 (v, V) 和扰动压强 q ; 并且

$$\|(\varrho, v, V)(t)\|_2 \leq c e^{-ct} \|(v_0, V_0)\|_2, \quad \forall t > 0,$$

其中 c 依赖于区域 Ω 和物理参数.

定理 14 令 Ω 是 C^3 -光滑的有界区域, 且 $\bar{\rho}$ 满足 (2.1) 和 (2.2). 如果 $\kappa < \kappa_C$, 则黏弹性 RT 平衡态 $(\bar{\rho}, 0, I)$ 是不稳定的, 即存在正常数 ε 、 ι 和 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{V}_0) \in H^2(\Omega)$, 满足: 对任意给定的 $\delta \in (0, \iota)$ 和初始值 $(\varrho_0, v_0, V_0) := \delta(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{V}_0)$, 黏弹性 RT 问题 (6.2)–(6.4) 存在着定义在 $[0, T^{\max})$ 的唯一强解 (ϱ, v, V) , 其在时刻 $T \in (0, T^{\max})$ 满足

$$\|(\varrho, v, V)(T)\|_2 \geq \varepsilon,$$

其中 $\operatorname{div} \bar{v}_0 = 0$, $T^{\max}$ 表示解 (ϱ, v, V) 最大的存在时间, ε 、 ι 和 $(\bar{\varrho}_0, \bar{v}_0, \bar{V}_0)$ 依赖于区域 Ω 和黏弹性 RT 问题中的物理参数.

定理 14 的证明参见文献 [64, 定理 2.2].

注 9 中的稳定性结果也可以进一步推广到上重下轻两层不相溶的不可压均匀黏弹性 RT 问题 (简称分层黏弹性 RT 问题), 并得类似的稳定性结果. 由于其模型较为复杂, 我们这里不对其进行介绍, 有兴趣的读者可参见文献 [64, 定理 2.1]. 目前, 我们还不能利用定理 14 的方法证明小弹性系数下分层黏弹性流体的 RT 不稳定性, 主要原因在于利用传统脱靴不稳定性方法时, 很难把线性不稳定解的初始值修正成非线性不稳定解的初始值, 关于此困难的细节介绍参见文献 [64, 注 4.3].

参考文献

- 1 Rayleigh L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. Proc Lond Math Soc, 1883, 14: 170–177

- 2 Taylor G I. The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1950, 201: 192–196
- 3 Castro A, Codoba D, Fefferman C, et al. Rayleigh-Taylor breakdown for the Muskat problem with applications to water waves. *Ann of Math (2)*, 2012, 175: 909–948
- 4 Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The International Series of Monographs on Physics. Oxford: Clarendon Press, 1961
- 5 王继海. 二维非定常流和激波. 中国工程物理研究院科技丛书. 北京: 科学出版社, 1994
- 6 Kruskal M, Schwarzschild M. Some instabilities of a completely ionized plasma. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1954, 233: 348–360
- 7 Acheson D J. Instability by magnetic buoyancy. *Sol Phys*, 1979, 62: 23–50
- 8 Kim J, Ryu D, Hong S S, et al. The Parker instability. *Astrophys Space Sci Lib*, 2005, 315: 315–322
- 9 Shibata K, Matsumoto R. Formation of giant molecular clouds and helical magnetic fields by the Parker instability. *Nature*, 1991, 353: 633–635
- 10 Parker E N. The dynamical state of the interstellar gas and field. *Astrophys J*, 1966, 145: 811–833
- 11 Parker E N. The formation of sunspots from the solar toroidal field. *Astrophys J*, 1955, 121: 491–507
- 12 Mouschovias T C, Kunz M M, Christie D A. Formation of interstellar clouds: Parker instability with phase transitions. *Monthly Not Roy Astron Soc*, 2009, 397: 14–23
- 13 Fukui Y, Yamamoto H, Fujishita M, et al. Molecular loops in the galactic center: evidence for magnetic flotation. *Science*, 2006, 314: 106–109
- 14 Barker A J, Silvers L J, Proctor M R, et al. Magnetic buoyancy instabilities in the presence of magnetic flux pumping at the base of the solar convection zone. *Monthly Not Roy Astron Soc*, 2012, 424: 115–127
- 15 Kowal G, Hanasz M, Otmianowska-Mazur K. Resistive MHD simulations of the Parker instability in galactic disks. *Astron Astrophys*, 2005, 315: 315–322
- 16 Vasil G M, Brummell N H. Magnetic buoyancy instabilities of a shear-generated magnetic layer. *Astrophys J*, 2008, 686: 709–730
- 17 Khalzov I V, Brown B P, Katz N, et al. Modeling the Parker instability in a rotating plasma screw pinch. *Phys Plasmas*, 2012, 19: 022107
- 18 Kim J, Ryu D, Jones T W. Three-dimensional simulations of the Parker instability in a uniformly-rotating disk. *Astrophys J*, 2001, 557: 464–474
- 19 Kuwabara T, Nakamura K, Ko C. Nonlinear Parker instability with the effect of cosmic-ray diffusion. *Astrophys J*, 2004, 607: 828–839
- 20 Lo Y Y, Ko C M, Wang C Y. 3D Magneto-hydrodynamic simulations of Parker instability with cosmic rays. *Comput Phys Comm*, 2011, 182: 177–179
- 21 Cabannes H. *Theoretical Magnetofluidynamics*. New York: Academic Press, 1970
- 22 Cowling T G. *Magnetohydrodynamics*, 2nd ed. London: Adam Hilger, 1976
- 23 Kulikovskiy A G, Lyubimov G A. *Magnetohydrodynamics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1965
- 24 Landau L, Lifshitz E, Pitaevskii L. *Electrodynamics of Continuous Media*, vol. 8: *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1984
- 25 Jiang F, Jiang S, Wang Y J. On the Rayleigh-Taylor instability for the incompressible viscous magnetohydrodynamic equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2014, 39: 399–438
- 26 Friedlander S, Pavlović N, Shvydkoy R. Nonlinear instability for the Navier-Stokes equations. *Comm Math Phys*, 2006, 264: 335–347
- 27 Hide R. Waves in a heavy, viscous, incompressible, electrically conducting fluid of variable density, in the presence of a magnetic field. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1955, 233: 376–396
- 28 Jiang F, Jiang S. On linear instability and stability of the Rayleigh-Taylor problem in magnetohydrodynamics. *J Math Fluid Mech*, 2015, 17: 639–668
- 29 Guo Y, Tice I. Linear Rayleigh-Taylor instability for viscous, compressible fluids. *SIAM J Math Anal*, 2011, 42: 1688–1720
- 30 Jiang F, Jiang S. On instability and stability of three-dimensional gravity flows in a bounded domain. *Adv Math*, 2014, 264: 831–863
- 31 Jiang F, Jiang S. On the stabilizing effect of the magnetic field in the magnetic Rayleigh-Taylor problem. [Http://wenku.baidu.com/view/23db63a131b765ce040814a7?fr=prin](http://wenku.baidu.com/view/23db63a131b765ce040814a7?fr=prin), 2016
- 32 Jiang F, Jiang S, Wang W W. Nonlinear Rayleigh-Taylor instability in nonhomogeneous incompressible viscous magnetohydrodynamic fluids. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2016, 9: 1853–1898

- 33 李大潜, 秦铁虎. 物理学与偏微分方程. 第 2 版上册. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 34 Newcomb W. Convective instability induced by gravity in a plasma with a frozen-in magnetic field. *Phys Fluids*, 1961, 4: 391–396
- 35 Abidi H, Zhang P. On the global solution of 3-D MHD system with initial data near equilibrium. *Comm Pure Appl Math*, doi: 10.1002/cpa.21645, 2016
- 36 Ren X X, Wu J H, Xiang Z Y, et al. Global existence and decay of smooth solution for the 2-D MHD equations without magnetic diffusion. *J Funct Anal*, 2014, 267: 503–541
- 37 Hu X P. Global existence for two dimensional compressible magnetohydrodynamic flows with zero magnetic diffusivity. *ArXiv:1405.0274*, 2014
- 38 Wang Y J. Critical magnetic number in the MHD Rayleigh-Taylor instability. *J Math Phys*, 2012, 53: 073701
- 39 Guo Y, Tice I. Almost exponential decay of periodic viscous surface waves without surface tension. *Arch Ration Mech Anal*, 2013, 207: 459–531
- 40 Guo Y, Tice I. Decay of viscous surface waves without surface tension in horizontally infinite domains. *Anal PDE*, 2013, 6: 1429–1533
- 41 Strain R M, Guo Y. Almost exponential decay near maxwellian. *Comm Partial Differential Equations*, 2006, 31: 417–429
- 42 Tan Z, Wang Y J. Global well-posedness of an initial-boundary value problem for viscous non-resistive MHD systems. *ArXiv:1509.08349*, 2015
- 43 Hwang H J. Variational approach to nonlinear gravity-driven instability in a MHD setting. *Quart Appl Math*, 2008, 66: 303–324
- 44 Guo Y, Strauss W. Instability of periodic BGK equilibria. *Comm Pure Appl Math*, 1995, 48: 861–894
- 45 Guo Y, Strauss W. Nonlinear instability of double-humped equilibria. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1995, 12: 339–352
- 46 Friedlander S, Strauss W, Vishik M. Nonlinear instability in an ideal fluid. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1997, 14: 187–209
- 47 Prüss J, Simonett G. On the Rayleigh-Taylor instability for the two-phase Navier-Stokes equations. *Indiana Univ Math J*, 2010, 59: 1853–1871
- 48 Hwang H J, Guo Y. On the dynamical Rayleigh-Taylor instability. *Arch Ration Mech Anal*, 2003, 167: 235–253
- 49 Guo Y, Hallstrom C, Spirn D. Dynamics near unstable, interfacial fluids. *Comm Math Phys*, 2007, 270: 635–689
- 50 Jiang F, Jiang S. Stabilizing effect of the equilibrium magnetic fields upon the Parker instability. <https://pan.baidu.com/s/1o7UYtNO>, 2016
- 51 Tserkovnikov Y A. The question of convectional instability of a plasma. *Soviet Phys Dokl*, 1960, 5: 87–89
- 52 Lei Z. On 2D viscoelasticity with small strain. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 198: 371–398
- 53 Lei Z, Liu C, Zhou Y. Global solutions for incompressible viscoelastic fluids. *Arch Ration Mech Anal*, 2008, 188: 371–398
- 54 Lin F H. Some analytical issues for elastic complex fluids. *Comm Pure Appl Math*, 2012, 65: 893–919
- 55 Lin F H, Liu C, Zhang P. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. *Comm Pure Appl Math*, 2005, 57: 1437–1471
- 56 Lin F H, Zhang P. On the initial-boundary value problem of the incompressible viscoelastic fluid system. *Comm Pure Appl Math*, 2008, 61: 539–558
- 57 Hu X P, Wang D H. Global existence for the multi-dimensional compressible viscoelastic flows. *J Differential Equations*, 2011, 250: 1200–1231
- 58 Hu X P, Wu G C. Global existence and optimal decay rates for three-dimensional compressible viscoelastic flows. *SIAM J Math Anal*, 2013, 45: 2815–2833
- 59 Boffetta G, Mazzino A, Musacchio S, et al. Rayleigh-Taylor instability in a viscoelastic binary fluid. *J Fluid Mech*, 2010, 643: 127–136
- 60 Sharma R C, Sharma K C. Rayleigh-Taylor instability of two viscoelastic superposed fluids. *Acta Phys Acad Sci Hungar*, 1978, 45: 213–220
- 61 Guo Y, Tice I. Compressible, inviscid Rayleigh-Taylor instability. *Indiana Univ Math J*, 2011, 60: 677–712
- 62 Wang Y J, Tice I, Kim C. The viscous surface-internal wave problem: Global well-posedness and decay. *Arch Ration Mech Anal*, 2014, 212: 1–92
- 63 Jiang F, Wu G C, Zhong X. On exponential stability of gravity driven viscoelastic flows. *J Differential Equations*, 2016, 260: 7498–7534
- 64 Jiang F, Jiang S, Wu G C. On stabilizing effect of elasticity in Rayleigh-Taylor problem of stratified viscoelastic fluids. <https://pan.baidu.com/s/1bp9qrWN>, 2016

Rayleigh-Taylor and Parker instabilities in MHD fluids

JIANG Fei & JIANG Song

Abstract We present a brief survey of recent mathematical results on the stability and instability of magnetohydrodynamic flows in the presence of a gravitational field, which include the incompressible magnetic Rayleigh-Taylor instability, and the Parker instability (i.e., the magnetic buoyancy instability) in compressible magnetohydrodynamics. In particular, the stabilizing effect of some factors (e.g., steady magnetic fields, boundary conditions, domains) are analyzed. In addition, the mathematical results on the Rayleigh-Taylor instability problem in viscoelastic flows are discussed.

Keywords magnetohydrodynamic fluids, Rayleigh-Taylor instability, Parker instability, viscoelastic fluids

MSC(2010) 76E25, 76A10

doi: 10.1360/N012016-00176