中国科学（E 辑）
第 30 卷 第 5 期　SCIENCE IN CHINA (Series E)　2000 年 10 月

多边形平均法向量的新定义和计算*

梁友栋
（国家计算机辅助设计与图形重点实验室，浙江大学数学系，杭州 310027）

摘要　引入由多边形和某一顶点所决定的锥面及其对应侧面的法向量的平均给出多边形平均法向量的新定义. 证明此定义与 Newell 的由多边形在 3 个坐标平面投影的有向面积所决定的多边形平均法向量的定义是一致的. 由此可导出简单的计算公式，它比 Newell 公式减少 $3N$ 次加法和 N 次减法，其中 N 是多边形的顶点数.

关键词　计算机图形学　多边形　平均法向量

随着计算机图形技术的发展，曲面一般都是由众多的多边形表示. 要真实感图形的实现就需要计算多边形的法向量. 而法向量的计算通常占用图形处理的大部分计算时间. 因此多边形法向量计算的简化具有重要意义. Newell 提出基于以多边形相邻边的交叉积的平均给出多边形平均法向量的定义[1,2]. 对于共面多边形此平均法向量即多边形法向量本身. 对于非共面多边形则将其在 3 个坐标平面投影的有向面积所决定的向量取为其平均法向量. 它可看做为多边形法向量的"最佳逼近"[2]. 该方法的长处在于无需检查相邻边是否共线[3]. 正是因为其简单、方便，所以自 1974 年提出以来它被普遍采用. 现在很自然会提出是否有更简洁的具有几何完整性和不变性的定义和简单的计算方法? 本文给出肯定的回答，即从完整的几何对象定义出发，求出其等价的向量形式从而导出简单的计算公式.

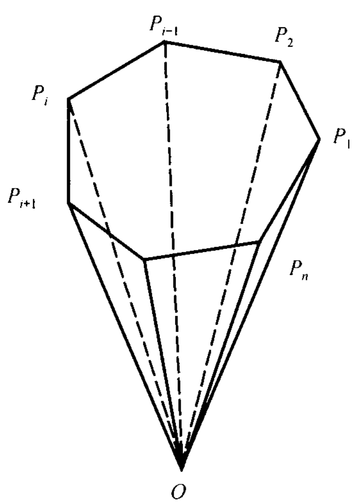

图 1　由多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 和顶点 O 所决定的锥面

设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为三维空间中以 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为顶点的多边形，共面或非共面，简单或退化如图 1 所示. 求在顶点 P_i 相邻边 P_iP_{i+1} 和 P_iP_{i-1} 的叉积并作和记为 $\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} P_iP_{i+1} \times P_iP_{i-1}, \tag{0.1}$$

其中 $P_{n+1} = P_1$，$P_0 = P_n$，P_iP_{i+1} 是以 P_i 为起点 P_{i+1} 为终点的向量，为了方便此后和式中的上、下限 n 和 1 均省略，不另做声明.

(0.1)式是 Newell 用以定义多边形平均法向量的基础，完整的几何不变的方法应是从构造几何对象使其具有最佳逼近出发给出定义，为此取空间任一点 O 出发过所有边 P_iP_{i+1} 作半

1999-12-06 收稿
* 国家自然科学基金资助项目（批准号：19771074）

射线所决定的锥面记为 $OP_1P_2\cdots P_n$ 如图 1 所示,顶点 O 可选取为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的重心或者使 $\sum\sin\angle P_iOP_{i+1}$ 达到最大. 实际上,若 $P_1P_2\cdots P_n$ 共面,那么由这种方法所构造几何对象即为该平面多边形区域. 如非共面那么这种点必存在. 由连续性知此方法构造的锥面应是对 $P_1P_2\cdots P_n$ 所围区域的一种"最佳逼近". 由相邻边的向量叉积所决定的平均法向量可由(0.1)式中的 $\boldsymbol{A}$ 表示,而锥面 $OP_1P_2\cdots P_n$ 的平均法向量则可由 $\sum OP_i\times OP_{i+1}$ 表示. 两者关系由下式给出:

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}P_iP_{i+1}\times P_iP_{i-1}=\begin{cases}3\sum OP_i\times OP_{i+1}, & n=3,\\ 2\sum OP_i\times OP_{i+1}, & n=4,\\ r\sum OP_i\times OP_{i+1}, & \text{平面多边形},\\ 2\sum OP_i\times OP_{i+1}+\sum OP_i\times OP_{i-1}, & \text{其他},\end{cases}\tag{0.2}$$

其中 $r=|\boldsymbol{A}|\Big/\Big|\sum OP_i\times OP_{i+1}\Big|$. 事实上, 对于 $n\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\sum(OP_{i+1}-OP_i)\times(OP_{i-1}-OP_i)\\&=2\Big(\sum OP_i\times OP_{i+1}\Big)+\sum OP_{i+1}\times OP_{i-1}.\end{aligned}\tag{0.3}$$

(0.2)式中 $n=3$ 与 $n=4$ 情况的成立是显然的. 注意到(0.3)式右方的首项和式与顶点 O 的选取无关, 即对于任意两点 O 和 O' 有

$$\sum OP_i\times OP_{i+1}=\sum O'P_i\times O'P_{i+1}.\tag{0.4}$$

再由于 $\boldsymbol{A}$ 与顶点选取无关故(0.3)式右方的第 2 项和式也与顶点 O 的选取无关. 对于共面情况,任取该平面上的一点为 O, 易知(0.2)式均成立,故(0.2)式对任意顶点 O 的选取均成立. 由此给出如下定义:

定义　对于 E^3 中的多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 和任意一点 O,由 O 到多边形的所有边 P_iP_{i+1} 的点作半射线的轨迹称为以 O 为顶点 $P_1P_2\cdots P_n$ 为边界的锥面,记为 $OP_1P_2\cdots P_n$,该锥面所有向量 $OP_i\times OP_{i+1}$ 的和称为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的平均法向量,记为 $\boldsymbol{N}$,

$$\boldsymbol{N}=\sum OP_i\times OP_{i+1},\tag{0.5}$$

$\boldsymbol{N}$ 实际上就是锥面 $OP_1P_2\cdots P_n$ 各侧面面积向量的总和的两倍(见图 1)特别若 $P_1P_2\cdots P_n$ 为共面时 $\boldsymbol{N}$ 就是其有向面积的两倍,可以证明此定义等价于 Newell 的多边形平均法向量定义. 为此先给出(0.5)式的如下两个等价的向量恒等式:

$$2\Big(\sum OP_i\times OP_{i+1}\Big)=\sum P_{i+1}P_1\times(OP_i+OP_{i+1}),\tag{0.6}$$

$$2\Big(\sum OP_i\times OP_{i+1}\Big)=\sum OP_i\times(OP_{i+1}-OP_{i-1}).\tag{0.7}$$

事实上,

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{N}&=\sum(OP_i\times OP_{i+1}+OP_i\times OP_{i+1})=\sum(OP_i-OP_{i+1})\times(OP_i+OP_{i+1})\\&=\sum P_{i+1}P_i\times(OP_i+OP_{i+1}),\end{aligned}\tag{0.8}$$

第 2 个恒等式是由于

$$2\boldsymbol{N}=\sum OP_{i-1}\times OP_i+\sum OP_i\times OP_{i+1}=\sum OP_i\times(OP_{i+1}-OP_i).\tag{0.9}$$

为证明 Newell 的多边形平均法向量公式[1,2]是(0.5)式的直接结果，求出向量 $\boldsymbol{N}$ 的坐标表达式：

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{N} &= \sum P_{i+1}P_i \times (OP_i + OP_{i+1}) \\ &= \sum [(y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}) + (y_i + y_{i+1})(z_{i+1} - z_i)]\boldsymbol{i} \\ &\quad + \sum [(z_i - z_{i+1})(x_i + x_{i+1}) + (z_i + z_{i+1})(z_{i+1} - x_i)]\boldsymbol{j} \\ &\quad + \sum [(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) + (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)]\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{0.10}$$

其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 是 X, Y, Z 轴方向的单位向量,顶点 O 为坐标原点．(x_i, y_i, z_i)是点 P_i 的坐标且指标与和式的约定如同(0.1)式,记 N_x, N_y, N_z 分别为$\boldsymbol{N}$ 在 X, Y, Z 轴的分量,而且

$$2N_x = \sum \left[(y_iz_i - y_{i+1}z_i + y_iz_{i+1} - y_{i+1}z_{i+1}) + (y_iz_{i+1} + y_{i+1}z_{i+1} - y_iz_i - y_{i+1}z_i) \right], \tag{0.11}$$

注意到

$$\sum (y_iz_i - y_{i+1}z_{i+1}) = 0, \tag{0.12}$$

得到

$$\sum (y_i + y_{i+1})(z_{i+1} - z_i) = \sum (y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}), \tag{0.13}$$

所以

$$N_x = z(y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}), \tag{0.14}$$

类似地,有

$$N_y = \sum (z_i - z_{i+1})(x_i + x_{i+1}), \tag{0.15}$$

$$N_z = \sum (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}), \tag{0.16}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} = \sum \Big[&(y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1})\boldsymbol{i} + (z_i - z_{i+1})(x_i + x_{i+1})\boldsymbol{j} \\ &+ (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\boldsymbol{k} \Big]. \end{aligned} \tag{0.17}$$

此即 Newell 的多边形平均法向量公式．

由于(0.12)和(0.14)式可改写为

$$N = \sum [(y_iz_{i+1} - y_{i+1}z_i)], \tag{0.18}$$

由此可得

$$\boldsymbol{N} = \sum (y_iz_{i+1} - y_{i+1}z_{i+1})\boldsymbol{i} + (z_ix_{i+1} - z_{i+1}x_i)\boldsymbol{j} + (x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\boldsymbol{k}, \tag{0.19}$$

即 $\boldsymbol{N}$ 为一向量,其 X, Y, Z 分量分别为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 在 YZ, ZX 和 XY 平面的有向面积的 2 倍,此即为 Newell 提出多边形平均法向量的基本思想．下节将利用第 2 个等价的向量恒等式(0.7)式导出更为简单的公式．

1 简单公式和计算

向量恒等式(0.7)式的坐标表示为

$$2\boldsymbol{N} = \sum[y_i(z_{i+1} - z_{i-1}) + z_i(y_{i-1} - y_{i+1})]\boldsymbol{i}$$
$$+ \sum[z_i(x_{i+1} - x_{i-1}) + x_i(z_{i-1} - z_{i+1})]\boldsymbol{j}$$
$$+ \sum[x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + y_i(x_{i-1} - x_{i+1})]\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

易知如下等式成立：

$$\sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1}) = \sum z_i(y_{i-1} - y_{i+1}), \tag{1.2}$$

$$\sum z_i(x_{i+1} - x_{i-1}) = \sum x_i(z_{i-1} - z_{i+1}), \tag{1.3}$$

$$\sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) = \sum y_i(x_{i-1} - x_{i+1}). \tag{1.4}$$

事实上，

$$\sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1}) = \sum y_{i-1}z_i - \sum y_{i+1}z_i = \sum z_i(y_{i-1} - y_{i+1}), \tag{1.5}$$

类似地，(1.3)和(1.4)式均成立，因此 $\boldsymbol{N}$ 可表示为

$$\boldsymbol{N} = \sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1})\boldsymbol{i} + \sum z_i(x_{i+1} - x_{i-1})\boldsymbol{j} + \sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})\boldsymbol{k}, \tag{1.6}$$

这一公式比 Newell 给出的(0.17)式简单．由此计算多边形平均法向量比用 Newell 公式减少 $3N$ 次加法．公式还可进一步简化，为此用(1.3)式改写向量 $\boldsymbol{N}$ 如下：

$$\boldsymbol{N} = \sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1})\boldsymbol{i} - \sum x_i(z_{i+1} - z_{i-1})\boldsymbol{j} + \sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})\boldsymbol{k}$$
$$= \sum(y_i\boldsymbol{i} - x_i\boldsymbol{j})(z_{i+1} - z_{i-1}) + \sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})\boldsymbol{k}, \tag{1.7}$$

或利用(1.2)式得到

$$\boldsymbol{N} = -\sum z_i(y_{i+1} - y_{i-1})\boldsymbol{i} + \sum z_i(x_{i+1} - x_{i-1})\boldsymbol{j} + \sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})\boldsymbol{k}$$
$$= \sum(-z_i\boldsymbol{i} + x_i\boldsymbol{k})(y_{i+1} - y_{i-1}) + \sum z_i(x_{i+1} - x_{i-1})\boldsymbol{j}, \tag{1.8}$$

用(1.4)式得到

$$\boldsymbol{N} = \sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1})\boldsymbol{i} + \sum z_i(x_{i+1} - x_{x-1})\boldsymbol{j} - \sum y_i(x_{i+1} - x_{i-1})\boldsymbol{k}$$
$$= \sum y_i(z_{i+1} - z_{i-1})\boldsymbol{i} + \sum(z_i\boldsymbol{j} - y_i\boldsymbol{k})(x_{i+1} - x_{i-1}), \tag{1.9}$$

若采用(1.7)式并记 z_i^* 为

$$z_i^* = z_{i+1} - z_i, \tag{1.10}$$

则有

$$N_x = \sum y_i(z_i - z_{i-1}) = \sum y_i z_i^*, \tag{1.11}$$

$$N_y = -\sum x_i(z_{i+1} - z_{i-1}) = -\sum x_i z_i^*, \tag{1.12}$$

$$N_z = \sum x_i(y_i - y_{i-1}). \tag{1.13}$$

由此公式计算多边形平均法向量共需 $3(N-1)$ 次加法，$2N$ 次减法和 $3N$ 次乘法，其中 N 为多边形顶点的个数．显然它比 Newell 方法减少 $3N$ 次加法和 N 次减法运算[1,2]．

2　讨论与实例

上述多边形平均法向量公式对于一般三维空间多边形包括凸与非凸，共面与非共面，简单

与退化的均成立,在退化情况下,某些项可能为零向量,但只要至少有两个相邻边非共线它就具有平均法向量的实际意义,即为取任一点 O 为顶点且以该多边形为边界的锥面各侧面有向面积总和的2倍.(1.11)~(1.13)式与Newell公式的等价性可直接由坐标运算推出.实际上,由

$$\sum (y_i z_i - y_{i+1} z_{i+1}) = 0, \tag{2.1}$$

而有

$$\begin{aligned} 2\sum (y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}) &= 2\sum (y_i z_i - y_{i+1} z_i + y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_{i+1}) \\ 2\sum (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) &= 2\sum y_i (z_{i+1} - z_{i-1}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2)式最后等式的成立是由于(1.2)式.因此

$$\sum (y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}) = \sum y_i (z_{i+1} - z_{i-1}). \tag{2.3}$$

类似地,

$$\sum (z_i - z_{i+1})(x_i + x_{i+1}) = \sum z_i (x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{2.4}$$

$$\sum (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) = \sum x_i (y_{i+1} - y_{i-1}), \tag{2.5}$$

此推导需要一些技巧,但基本思想是从两者等价性得到.

一个计算实例如下,设有一非共面的五边形,其顶点分别为 $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$, $P_4(1/2, 0,1)$, $P_5(1, -1/2, 1/2)$(见图2).

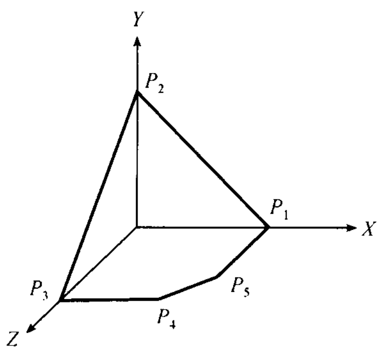

图2 以 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 为顶点的非共面多边形

由(1.11)~(1.13)式,

$$\begin{aligned} N_x &= y_1(z_2 - z_5) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_4 - z_2) \\ &\quad + y_4(z_5 - z_3) + y_5(z_1 - z_4) = 1.5, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} N_y &= -\left[x_1(z_2 - z_5) + x_2(z_3 - z_1) + x_3(z_4 - z_2) \right. \\ &\quad \left. + x_4(z_5 - z_3) + x_5(z_1 - z_4)\right] = 1.75, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} N_z &= x_1(y_2 - y_5) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) \\ &\quad + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_1 - y_4) = 1.25, \end{aligned} \tag{2.8}$$

因此该多边形的平均法向量为

$$\boldsymbol{N} = 1.5\boldsymbol{i} + 1.75\boldsymbol{j} + 1.25\boldsymbol{k}. \tag{2.9}$$

这与采用 Newell 公式得到的结果一致.若移动 $P_4(1/2, 0, 1,)$ 到 $\bar{P}_4(1/2, -1/2, 1)$ 使五边形变成共面即在 P_1, P_2 和 P_3 所决定平面上,这时平均法向量为 $\boldsymbol{N} = 1.75\boldsymbol{i} + 1.75\boldsymbol{j} + 1.25\boldsymbol{k}$, 实际上即为平面 $P_1P_2P_3$ 的法向量.该法向量的模长 $7\sqrt{3}/4$ 是共面五边形 $P_1P_2P_3\bar{P}_4P_5$ 面积的2倍,当 P_4 趋于 $\bar{P}_4$ 平均法向量连续趋近于平面五边形区域有向面积的2倍.

参 考 文 献

1 Sutherland I E, Sproull R F, Schumaker R A. A characterization of ten hidden surface algorithms. Computing Surveys, 1974, 6: 1~55

2 Rogers D F. Procedural Elements for Computer Graphics. New York: McGraw-Hill, 1998

3 Harrington Steven. Computer Graphics, Programming Approach. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1987