

椭圆型方程的并行迭代区域分裂法

——多子区域情形

张 胜

黄 鸿 慈

(复旦大学数学研究所, 上海 200433) (中国科学院计算中心, 北京 100080)

摘 要

本文提出了一个有内交叉点的多子域区域分裂法。无交叉点的多子域分裂可归为两子域情形。在每一交叉点处取一子域覆盖之。称其为覆盖子域。不同交叉点的覆盖子域互不相交。本文的算法是把求解子区域上的 Dirichlet 问题, 混合问题和覆盖子域上的 Dirichlet 问题相结合而得到的。利用了两子域 Schwarz 交替法和两子域并行迭代分裂法思想。本算法具有高度并行性和通信局部性, 适应于任意多个子区域的分裂。

关键词: 区域分裂, 并行计算, 椭圆型方程

一、分裂方法

设 $\mathcal{Q} \subset R^2$ 是一多边形区域

$$\begin{cases} a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\mathcal{Q}), f \in H^{-1}(\mathcal{Q}), \\ u \in H_0^1(\mathcal{Q}), \end{cases} \quad (1.1)$$

是定义在 \mathcal{Q} 上的椭圆边值问题的变分形式, 其中双线性形

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a(X) u \cdot v \right] dX,$$

满足:

$$\begin{cases} a(u, v) = a(v, u), \\ |a(u, v)| \leq M' \|u\| \|v\|, \\ a(u, u) \geq M'' \|u\|^2, \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 $\|\cdot\|$ 是 $H^1(\mathcal{Q})$ 中的 Sobolev 范数, 由 (1.2) 式, 此范数等价于由 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $H_0^1(\mathcal{Q})$ 中引入的范数。在以下讨论中, 将视 $H_0^1(\mathcal{Q})$ 为赋内积 $a(\cdot, \cdot)$ 的 Hilbert 空间。

对 \mathcal{Q} 做一有限元剖分, 假定满足拟一致性和反假设等条件。为简单起见, 用一次连续元对 (1.1) 式进行离散。有限元空间记为 $S_h^1(\mathcal{Q})$ 。 $\hat{\mathcal{Q}}$ 为 \mathcal{Q} 内的有限元结点之集。为确定起见, 对 $\hat{\mathcal{Q}}$ 中的结点排定次序。 $\hat{\mathcal{Q}}$ 各子集中的结点将袭承这种次序。 $\{\varphi_i, i \in \hat{\mathcal{Q}}\}$ 是通常的有限元基函数之集。 (1.1) 式对应的离散问题是

$$\begin{cases} a(u, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad \forall i \in \hat{Q} \\ u \in S_0^h \end{cases} \quad (1.3)$$

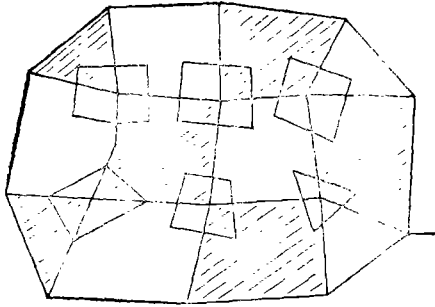


图 1

如图 1, 对 Q 做区域分裂, 有如下要求:

1. 分裂线与有限元剖分线重合.
2. 子区域可用红黑两种颜色分类, 使同色子区域除交叉点外无公共边界点.
3. 每个交叉点处取一子域覆盖之, 其边界亦与有限元剖分线重合. 不同交叉点的覆盖子域互不相交, 但边界可以相切.

引进下述符号: $\{Q_k; k = 1, 2, \dots, M\}$ 是子区域集合, $\hat{Q} = \bigcup_{k=1}^M \hat{Q}_k, \hat{Q}_k \cap \hat{Q}_l = \emptyset (k \neq l)$.

$\hat{Q}_k = Q_k \cap \hat{Q}, \{1, 2, \dots, M\} = R \cup B, R \cap B = \emptyset, R$ 和 B 分别是红色和黑色子区域标号的集合, $Q_R = \bigcup_{k \in R} Q_k, Q_B = \bigcup_{k \in B} Q_k, \Gamma = \bigcup_{k=1}^M \partial Q_k - \partial Q$ 是分裂线, $\hat{\Gamma} = \Gamma \cap \hat{Q}$ 是分裂线上结点之集, $V \subset \hat{Q}$ 是所有交叉点之集, $\hat{\Gamma}^0 = \Gamma - V, \partial \hat{Q}_k = \partial Q_k \cap \hat{Q}, \partial \hat{Q}_k^0 = \partial Q_k \cap \hat{\Gamma}^0, S^h(Q_k) = S_0^h|_{Q_k}$. 由此定义乘积空间 $\prod_{k=1}^M S^h(Q_k) = \{u; u|_{Q_k} \in S^h(Q_k)\}$, $X \subset \prod_{k=1}^M S^h(Q_k)$ 是此乘积空间的子空间, 其中的函数在交叉点上连续.

在 $S^h(Q_k)$ 中定义双线性型

$$a_k(u, v) = \int_{Q_k} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial X_i} \frac{\partial v}{\partial X_j} + a(X) u \cdot v \right] dX,$$

$$(f, v)_k = \int_{Q_k} f \cdot v.$$

对 $u, v \in X$ 定义 $a_R(u, v) = \sum_{k \in R} a_k(u, v), a_B(u, v) = \sum_{k \in B} a_k(u, v), a(u, v) = a_R(u, v) + a_B(u, v), (f, v)_R = \sum_{k \in R} (f, v)_k, (f, v)_B = \sum_{k \in B} (f, v)_k$. 显然, $a(\cdot, \cdot)$ 引入了 X 中的内积. 由于讨论的是离散问题, 故 X 是有限维空间. 因此, 在上述内积下是 Hilbert 空间. 我们引入如下两个 X 到 $R^{1(n)}$ 中的线性算子:

$$D_R(u) = \{a_R(u, \varphi_i) - (f, \varphi_i)_R; i \in \hat{\Gamma}^0\},$$

$$D_B(u) = \{a_B(u, \varphi_i) - (f, \varphi_i)_B; i \in \hat{\Gamma}^0\}.$$

在下面的讨论中, 要用到 X 的子空间 $\tilde{S}_0^h = \{u; u \in X, D_R(u) + D_B(u) = 0\}$ 和有限元空间 S_0^h .

对 $i \in V$, 以 Q_i 表示它的覆盖子域, $\hat{Q}_i = Q_i \cap \hat{Q}, \partial \hat{Q}_i = \partial Q_i \cap \hat{Q}, N = |V|$ (交叉点的个数).

在算法中, 凡是涉及到 ∂Q 上的边值, 一律取 Dirichlet 零边值 (这仅是为了叙述问题方便). 如果 $u \in X$, 则 u_R, u_B 分别表示 u 在 Q_R 和 Q_B 上的限制. 求解 (1.3) 式的多子域并行迭代区域分裂法如下:

算法. 任取 $u^0 \in S_0^h$ 为迭代初始函数, 并假定 $u^n \in S_0^h$ 是 n 次近似. 求 $u^{n+1} \in S_0^h$ 的步骤如下:

步 1. 求解 $Q_i (i \in V)$ 上的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), & i \in \hat{Q}_i \\ u^{n+1}(j) = u^n(j), & j \in \partial \hat{Q}_i. \end{cases}$$

这是 N 个并行的子问题, 将所得结果延拓到整个 Ω 上, 仍记为 u^{n+1} , 使 $u^{n+1} = u^n|_{\Omega - \bigcup_{i \in V} \hat{Q}_i}$, 显然 $u^{n+1} \in S_0^h$.

步 2. 求解 $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, M)$ 上的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+2}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), & i \in \hat{Q}_k \\ u^{n+2}(j) = u^{n+1}(j), & j \in \partial \hat{Q}_k. \end{cases}$$

这是 M 个并行的子问题, 仍有 $u^{n+2} \in S_0^h$. 计算 $R^{1|0_1}$ 中向量 $D_R(u^{n+2}), D_B(u^{n+2})$ 和

$$D(u^{n+2}) = \theta_1 D_R(u^{n+2}) + (1 - \theta_1)[-D_B(u^{n+2})].$$

步 3. 对 $k \in R$ 求解 Ω_k 上的混合问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+3}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), & i \in \hat{Q}_k \\ a_k(u^{n+3}, \varphi_i) = (f, \varphi_i)_k + [D(u^{n+2})](i), & i \in \partial \hat{Q}_k^0 \\ u^{n+3}(j) = u^{n+2}(j), & j \in V. \end{cases}$$

对 $k \in B$ 求解 Ω_k 上的混合问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+3}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), & i \in \hat{Q}_k \\ a_k(u^{n+3}, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - [D(u^{n+2})](i), & i \in \partial \hat{Q}_k^0 \\ u^{n+3}(j) = u^{n+2}(j), & j \in V. \end{cases}$$

这是 M 个并行的子问题, 可以看出, $u^{n+3} \in \tilde{S}_0^h$. 计算 $R^{1|0_1}$ 中向量 g :

$$g(j) = \theta_2 u_R^{n+3}(j) + (1 - \theta_2) u_B^{n+3}(j), \quad j \in \hat{\Gamma}^0.$$

步 4. 求解 $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, M)$ 上的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+4}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), & i \in \hat{Q}_k \\ u^{n+4}(j) = g(j), & j \in \partial \hat{Q}_k^0 \\ u^{n+4}(j) = u^{n+3}(j), & j \in V. \end{cases}$$

这是 M 个并行的子问题, 显然, $u^{n+4} \in S_0^h$.

$$u^{n+1} = u^{n+4}.$$

迭代过程中每一步的设计都是为了使方程(1.3)中的两个条件 $a(u, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \forall i \in \hat{Q}$ 和 $u \in S_0^h$ 在 \hat{Q} 的每一点得到满足或交替地满足. 步 2 和步 3 中的 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ 是两个组合系数. 关于它们, 将在收敛性分析中讨论.

二、收敛性证明的若干准备

在空间 X 中引入下述子空间:

$$S_0^h(Q_i) = \{u; u \in S_0^h, \text{supp} u \subset Q_i\}, \quad i \in V.$$

$X_1 = \sum_{i \in V} S_0^h(Q_i)$ 在 S_0^h 中的正交补.

$X_2 = \text{Span}_{i \in \hat{Q}-V} \{\varphi_i\}$ 在 S_0^h 中的正交补.

$X_3 = \sum_{k=1}^M S_0^h(\Omega_k)$ 在 S_0^h 中的正交补.

$X_4 = \{u; u \in X, a(u, \varphi_j) = 0, j \in \hat{Q} - \hat{\Gamma}, a_R(u, \varphi_j) + a_B(u, \varphi_j) = 0, j \in \hat{\Gamma}^0\}$,

$X_5 = X_1 \cap X_3$,

$X^0 = \{u; u \in X, u(i) = 0, i \in V\}$,

$X_3^0 = X_3 \cap X^0, X_4^0 = X_4 \cap X^0$.

以上各子空间中的内积和范数均由 X 中的内积导入. 这些子空间有下述简单性质:

1. $X_1 \cap X_2 = \{0\}, X_5 \cap X_2 = \{0\}$.
2. $X_3 \cap X_4 = X_2$.
3. $X = X_2 + X^0, X_3 = X_2 + X_3^0, X_4 = X_2 + X_4^0$.
4. X_3^0 与 X_2 正交, X_4^0 与 X_2 正交.

下面给出证明收敛性所需要的几个引理.

引理 2.1. 设子区域 $\{\Omega_k, k = 1, 2, \dots, M\}$ 满足拟一致性条件, 其直径为 H , 有限元部分满足拟一致性和反假设, 则关于 X_3^0 中的函数有

$$\sup_{u \in X_3^0} \frac{a_R(u, u)}{a_B(u, u)} = \sigma, \sup_{u \in X_3^0} \frac{a_B(u, u)}{a_R(u, u)} = \tau.$$

$$\sigma, \tau \leq 0 \left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^2.$$

证. 设 u 是 X_3^0 中任一函数, Ω_k 是任一子区域, 为简单起见, 假定其为三角形. 则 u 在 Ω_k 内部是离散调和函数, 在 Ω_k 的三个顶点上为零. $\partial\Omega_k = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 都是直线段, 文献[1]证明了存在与 H, h 无关的常数 C_1, C_2 使

$$C_1 \left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^{-2} \sum_{l=1}^3 |u|_{H_{00}^2(\Gamma_l)}^2 \leq a_{\Omega_k}(u, u) \leq C_2 \sum_{l=1}^3 |u|_{H_{00}^2(\Gamma_l)}^2.$$

就所有红色子域和所有黑色子域对上式作和, 可得引理结论.

引理 2.2. 对引理 2.1 中的 σ, τ, X_3^0 中的函数有下述性质:

$$\sup_{u \in X_3^0} \frac{a_R(u, u)}{a_B(u, u)} \leq \tau, \sup_{u \in X_3^0} \frac{a_B(u, u)}{a_R(u, u)} \leq \sigma.$$

利用引理 2.1 和子空间性质 4 容易证明此引理.

定义 X_3^0 到 R^{M^0} 中的两个线性算子, 对 $u \in X_3^0$

$$D_R^0(u) = \{a_R(u, \varphi_j), j \in \hat{\Gamma}^0\},$$

$$D_B^0(u) = \{a_B(u, \varphi_j), j \in \hat{\Gamma}^0\}.$$

在 X_3^0 中做如下迭代: 任取 $u^0 \in X_3^0$ 为迭代初始函数, 由 u^n 到 u^{n+1} 的过程是:

步 1. 计算 R^{M^0} 中的向量 $D_R^0(u^n), D_B^0(u^n)$ 和

$$D^0(u^n) = \theta_1 D_R^0(u^n) - (1 - \theta_1) D_B^0(u^n);$$

在红色域 $\Omega_k (k \in R)$ 上求解混合问题

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, \varphi_i) = 0, & i \in \hat{\Omega}_k \\ a_k(u^{n+1}, \varphi_j) = [D^0(u^n)](j), & j \in \partial \hat{\Omega}_k^0 \\ u^{n+1}(j) = 0, & j \in V; \end{cases}$$

在黑色域 $\Omega_k (k \in B)$ 上求解混合问题

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, \varphi_j) = 0, & j \in \hat{\Omega}_k \\ a_k(u^{n+1}, \varphi_j) = -[D^0(u^n)](j), & j \in \partial \hat{\Omega}_k^0 \\ u^{n+1}(j) = 0, & j \in V \end{cases}$$

得到 $u^{n+1} \in X_k^1$.

步 2. 计算 R^{10_1} 中向量 g^0

$$g^0(j) = \theta_2 u_R^{n+1}(j) + (1 - \theta_2) u_B^{n+1}(j), \quad j \in \hat{r}^0;$$

求解 $\Omega_k (k = 1, 2, \dots, M)$ 上的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, \varphi_j) = 0, & j \in \hat{\Omega}_k \\ u^{n+1}(j) = g^0(j), & j \in \partial \hat{\Omega}_k^0 \\ u^{n+1}(j) = 0, & j \in V \end{cases}$$

得到 $u^{n+1} \in X_k^0$, 其中 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ 是组合因子.

引理 2.3. 存在 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ 使上述迭代过程收敛于零, 并存在收敛因子 $k = k_1 \cdot k_2 < 1$, 使

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq k \|u^n\|^2.$$

此引理的证明与张胜、黄鸿慈文^[1]中算法收敛性定理的证明几乎一致. 只不过要利用引理 2.1 和引理 2.2 的结论.

$$k_1 = \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2 \tau^2 + 2\theta_1(\theta_1 - 1) \frac{1}{\sigma},$$

$$k_2 = \theta_2^2 + (1 - \theta_2)^2 \sigma^2 + 2\theta_2(\theta_2 - 1) \frac{1}{\tau},$$

当 $\theta_1 \in \left(1 - 2 \frac{\sigma + 1}{\tau^2 \tau + \sigma + 2}, 1\right)$ 时, $k_1 < 1$. 当 $\theta_2 \in \left(1 - 2 \frac{\tau + 1}{\sigma^2 \tau + \tau + 2}, 1\right)$ 时, $k_2 < 1$. 当

θ_1, θ_2 取最优值 $\theta_1 = 1 - \frac{\sigma + 1}{\tau^2 \sigma + \sigma + 2}$, $\theta_2 = 1 - \frac{\tau + 1}{\sigma^2 \tau + \tau + 2}$ 时, $k_1 = 1 - \frac{(\sigma + 1)^2}{\tau^2 \sigma^2 + \sigma^2 + 2\sigma}$,

$$k_2 = 1 - \frac{(\tau + 1)^2}{\sigma^2 \tau^2 + \tau^2 + 2\tau}.$$

引理 2.4^[3] 设 H 是一 Hilbert 空间, H_1, H_2 是其子空间, P_1, P_2 分别是 H 中向 H_1, H_2 的正交投影算子. 则当 $H_1^\perp + H_2^\perp = H$ 时 $\|P_1 P_2\|, \|P_2 P_1\| < 1$.

引理 2.5. 设 H 是一 Hilbert 空间, H_1, H_2, H_0 是其子空间, $H_1 \cap H_2 = H_0, P_1, P_2, P$ 分别是 H 中向 H_1, H_2, H_0 的正交投影算子. 则对任意 $x_0 \in H$, 由 $x_{2n+1} = P_1 x_{2n}, x_{2n+2} = P_2 x_{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$, 产生的序列强收敛于 $P x_0$. 如果 $(H_0^\perp \cap H_1)^\perp + (H_0^\perp \cap H_2)^\perp = H$, 则存在收敛因子 $k > 1$, 使

$$\|x_{2n+2} - P x_0\| \leq k \|x_{2n} - P x_0\|,$$

$$\|x_{2n+3} - P x_0\| \leq k \|x_{2n+1} - P x_0\|,$$

[2] 张胜、黄鸿慈, 椭圆型方程的并行迭代区域分裂法——两子区域情形, 计算数学待发表.

$$x_n - Px_0 \in H_0^\perp, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

此引理利用引理 2.4 不难证明, 此处从略. 我们用到的空间是有限维的, 此时条件 $H_1^\perp + H_2^\perp = H$ 等价于 $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. 而条件 $(H_0^\perp \cap H_1)^\perp + (H_0^\perp \cap H_2)^\perp = H$ 则等价于 $H_0^\perp \cap (H_1 \cap H_2) = \{0\}$, 自动满足, 不需验证.

三、收敛性证明

用 u^* 表示(1.3)式的解, 算法中各步近似的误差记为

$$\begin{aligned} \varepsilon^n &= u^n - u^*, \\ \varepsilon^{n,l} &= u^{n,l} - u^*, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ \varepsilon^{n+1} &= u^{n+1} - u^* = \varepsilon^{n,4}. \end{aligned}$$

从迭代过程中可以看出 $\varepsilon^n, \varepsilon^{n,1}, \varepsilon^{n,2}, \varepsilon^{n,3}, \varepsilon^{n,4}$ 之间的下述关系:

$$\varepsilon^n \in X_3 \quad (n \geq 1).$$

由步 1 知

$$\begin{cases} a(\varepsilon^{n,1}, \varphi_i) = 0 & i \in \hat{Q}_i, i \in V \\ \varepsilon^{n,1} = \varepsilon^n & \text{on } Q - \bigcup_{i \in V} Q_i. \end{cases}$$

因此, $\varepsilon^{n,1} \in X_1$. 由于 $\varepsilon^{n,1} - \varepsilon^n \in \sum_{i \in V} S_0^h(Q_i) = X_1^\perp(S_0^h)$, 所以

$$\varepsilon^{n,1} = P_{X_1} \varepsilon^n. \quad (3.1)$$

这里, 我们用 $X_1^\perp(S_0^h)$ 表示 X_1 在 S_0^h 中的正交补, P_{X_1} 表示 S_0^h 中向 X_1 的正交投影算子, 下同.

由步 2 知

$$\begin{cases} a(\varepsilon^{n,2}, \varphi_j) = 0, & j \in \hat{Q}_k, k = 1, 2, \dots, M. \\ \varepsilon^{n,2}(j) = \varepsilon^{n,1}(j), & j \in \partial \hat{Q}_k, k = 1, 2, \dots, M. \end{cases}$$

因此, $\varepsilon^{n,2} \in X_3$, 由于 $\varepsilon^{n,2} - \varepsilon^{n,1} \in \sum_{k=1}^M S_0^h(Q_k) = X_3^\perp(S_0^h)$, 所以

$$\varepsilon^{n,2} = P_{X_3} \varepsilon^{n,1}. \quad (3.2)$$

注意到 $X_5 = X_1 \cap X_3$, 由引理 2.5 知, 存在 $\alpha \in (0, 1)$ 使

$$\|\varepsilon^{n,2} - P_{X_5} \varepsilon^n\| \leq \alpha \|\varepsilon^n - P_{X_3} \varepsilon^n\|. \quad (3.3)$$

由步 3, 我们看到

$$\begin{cases} a(\varepsilon^{n,3}, \varphi_i) = 0, & i \in \hat{Q}_k, k = 1, 2, \dots, M. \\ a_R(\varepsilon^{n,3}, \varphi_j) + a_B(\varepsilon^{n,3}, \varphi_j) = 0, & j \in \hat{F}^0, \end{cases}$$

所以

$$\varepsilon^{n,3} \in X_4.$$

由步 4,

$$\begin{cases} a(\varepsilon^{n,4}, \varphi_i) = 0, & i \in \hat{Q}_k, k = 1, 2, \dots, M. \\ \varepsilon^{n,4} \in S_0^h, \end{cases}$$

所以

$$\varepsilon^{n,4} \in X_5.$$

由步 3、步 4, 我们还看到

$$\varepsilon^{n,2}(j) = \varepsilon^{n,3}(j) = \varepsilon^{n,4}(j), \quad \forall j \in V.$$

由此确定 $\delta^n \in X_2$, 使 $\delta^n(j) = \varepsilon^{n,2}(j) = \varepsilon^{n,3}(j) = \varepsilon^{n,4}(j), j \in V$. 不难看出, $\varepsilon^{n,2} - \delta^n \in X_1^0$, $\varepsilon^{n,3} - \delta^n \in X_2^0$, $\varepsilon^{n,4} - \delta^n \in X_3^0$. 由于 X_i^0 与 X_i 正交(子空间性质 4), 所以

$$\delta^n = P_{X_2} \varepsilon^{n,2} = P_{X_2} \varepsilon^{n,4}. \tag{3.4}$$

从 $\varepsilon^{n,2} - \delta^n$ 到 $\varepsilon^{n,3} - \delta^n$ 到 $\varepsilon^{n,4} - \delta^n$ 的过程, 正好就是引理 2.3 所论述的过程. 由引理 2.3 有

$$\|\varepsilon^{n,4} - \delta^n\|^2 \leq k_1 \cdot k_2 \|\varepsilon^{n,2} - \delta^n\|^2.$$

证 $\beta = \sqrt{k_1 k_2}$, 有

$$\|\varepsilon^{n,4} - \delta^n\| \leq \beta \|\varepsilon^{n,2} - \delta^n\|. \tag{3.5}$$

由于 $X_2 \cap X_3 = \{0\}$ (子空间性质 1), 由引理 2.4 知 $\max\{\|P_{X_2} P_{X_3}\|, \|P_{X_3} P_{X_2}\|\} < 1$, 令

$$\gamma = \|P_{X_2} P_{X_3}\|. \tag{3.6}$$

有了以上准备, 便可证明主要定理.

定理. 本文提出的多子域并行迭代区域分裂法是收敛的, 并存在收敛因子 k

$$k = 1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

使

$$\|\varepsilon^{n+1}\| \leq k \|\varepsilon^n\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ 分别由(3.3), (3.5), (3.6)给出.

证. 由上述分析过程我们得到了

$$\varepsilon^{n,1} = P_{X_1} \varepsilon^n, \quad \varepsilon^{n,2} = P_{X_3} \varepsilon^{n,1}.$$

由引理 2.5, $\varepsilon^{n,2} - P_{X_1} \varepsilon^n, \varepsilon^n - P_{X_1} \varepsilon^n$ 都与 X_3 正交, 且

$$\|\varepsilon^{n,2} - P_{X_1} \varepsilon^n\| \leq \alpha \|\varepsilon^n - P_{X_1} \varepsilon^n\|.$$

(3.4), (3.5)式说明

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n,4} - P_{X_3} \varepsilon^{n,2} = \varepsilon^{n,4} - \delta^n & \text{ 与 } X_2 \text{ 正交,} \\ \varepsilon^{n,2} - P_{X_3} \varepsilon^{n,2} = \varepsilon^{n,2} - \delta^n & \text{ 与 } X_2 \text{ 正交, 且} \\ \|\varepsilon^{n,4} - P_{X_3} \varepsilon^{n,2}\| & \leq \beta \|\varepsilon^{n,2} - P_{X_3} \varepsilon^{n,2}\|. \end{aligned}$$

令

$$\varepsilon_*^n = P_{X_1} \varepsilon^n + \frac{\|\varepsilon^n - P_{X_1} \varepsilon^n\|}{\|\varepsilon^{n,2} - P_{X_1} \varepsilon^n\|} (\varepsilon^{n,2} - P_{X_1} \varepsilon^n),$$

由 $\varepsilon^{n,2} - P_{X_1} \varepsilon^n$ 与 $P_{X_1} \varepsilon^n$ 的正交性得

$$P_{X_1} \varepsilon_*^n = P_{X_1} \varepsilon^n, \quad \|\varepsilon_*^n\| = \|\varepsilon^n\|, \tag{3.7}$$

$$\varepsilon^{n,2} = \rho_1 \varepsilon_*^n + (1 - \rho_1) P_{X_3} \varepsilon_*^n, \tag{3.8}$$

其中 $0 \leq \rho_1 \leq \alpha$.

令
$$\varepsilon_{*}^{n,4} = P_{X_2} \varepsilon^{n,2} + \frac{\|\varepsilon^{n,4} - P_{X_2} \varepsilon^{n,2}\|}{\|\varepsilon^{n,2} - P_{X_2} \varepsilon^{n,2}\|} (\varepsilon^{n,2} - P_{X_2} \varepsilon^{n,2}),$$

则不难看出

$$\|\varepsilon_{*}^{n,4}\| = \|\varepsilon^{n,4}\|, \tag{3.9}$$

$$P_{X_2} \varepsilon_{*}^{n,4} = P_{X_2} \varepsilon^{n,4} = P_{X_2} \varepsilon^{n,2}, \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_{*}^{n,4} = \rho_2 \varepsilon^{n,2} + (1 - \rho_2) P_{X_2} \varepsilon^{n,2}. \tag{3.11}$$

其中 $0 \leq \rho_2 \leq \beta$, 把(3.8)式代入(3.11)式得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{*}^{n+1} &= (1 - \rho_2)(1 - \rho_1)P_{X_2}P_{X_1}\varepsilon_{*}^n + \rho_1(1 - \rho_2)P_{X_2}\varepsilon_{*}^n + \rho_2(1 - \rho_1)P_{X_1}\varepsilon_{*}^n + \rho_1\rho_2\varepsilon_{*}^n, \\ \text{所以 } \|\varepsilon_{*}^{n+1}\| &\leq (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\|P_{X_2}P_{X_1}\varepsilon_{*}^n\| + (1 - \rho_2)\rho_1\|P_{X_2}\varepsilon_{*}^n\| \\ &\quad + \rho_2(1 - \rho_1)\|P_{X_1}\varepsilon_{*}^n\| + \rho_1\rho_2\|\varepsilon_{*}^n\| \\ &\leq [(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\gamma + \rho_1(1 - \rho_2) + \rho_2(1 - \rho_1) + \rho_1\rho_2]\|\varepsilon_{*}^n\| \\ &= (1 - (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(1 - \gamma))\|\varepsilon_{*}^n\| \\ &\leq (1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma))\|\varepsilon_{*}^n\|. \end{aligned}$$

由(3.7)和(3.9)式得 $\|\varepsilon^{n+1}\| \leq (1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma))\|\varepsilon^n\|$. 定理证毕.

算法中的误差变化情况可从图 2 中看到.

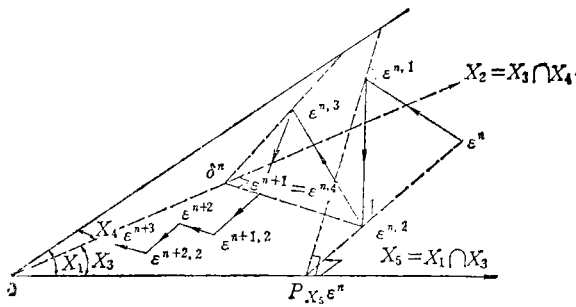


图 2

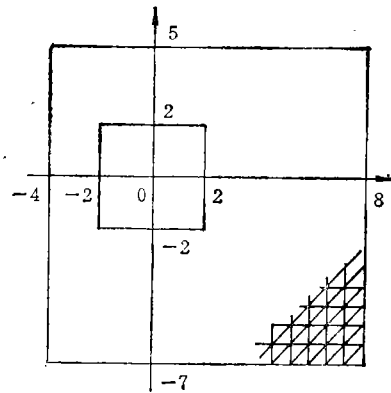


图 3

四、关于收敛因子的进一步讨论

首先,不难看到对算法略加改造: 执行完步 2 得到 u^{n+2} 返回步 1, 将 u^{n+2} 代入 u^n 位置, 再执行步 1、步 2, 如此循环 p 次, 再执行步 3、步 4 得 u^{n+p} , 代入 u^{n+2} 的位置执行步 3 和步 4. 如此循环 q 次, 再将所得结果作为 u^{n+1} . 这样改造后, 算法的收敛因子将是

$$k' = 1 - (1 - \alpha^p)(1 - \beta^q)(1 - \gamma).$$

关于 γ , 由 $\gamma = \|P_{X_2}P_{X_1}\| \leq \|P_{X_2}\| \|P_{X_1}\|$ 知 γ 不超过以 $\Omega_1 = \bigcup_{i \in V} Q_i$ 和 $\Omega_2 = \Omega - V$ 为子域的两子域 Schwarz 交替法的收敛因子, 可以证明(参见张胜文¹⁾)

$$\gamma \leq 1 - \frac{R^2}{C(1 + R^2)},$$

其中 C 是与一切参量无关的常数, R 是 $\{Q_i, i \in V\}$ 内切圆直径的最小者, 由此可知, 当覆盖子域选取得相对大时, γ 将减小.

关于 β , 从其表达式可以给出一个保守的估计

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{C \left(1 + \ln \frac{H}{h}\right)^4}.$$

1) 张胜, 椭圆型方程的分裂并行算法, 中国科学院计算中心博士论文, 1989.

至于 α , 除 $\alpha \in (0, 1)$ 外, 未得到估计。

五、数值试验

我们以矩形域上 Poisson 方程的齐边界 Dirichlet 问题为模型, 用均匀三角部分上的线性连续元作有限元逼近, 如图 3, 区域内部只选取了一个交叉点, 子区域和覆盖子域都是矩形。以误差函数在坐标轴上限制的二范数作误差 E (这样做是合理的, 因为误差函数在子区域内部是离散调和函数, 而在子区域其它边界上为零) 算法循环一次叫迭代一步。表 1 列出了误差随迭代步数 N 和离散步长 h 的变化情况。第 0 步表示初始状态。

在迭代过程中, 我们选取了一些中间量来估算和校正引理 2.1 和引理 2.2 中的 σ 和 τ 。所用组合系数是用第二节的最优值表达式计算的。对 $h = \frac{1}{8}$, 在各迭代步所用参数列入表 2。

做数值试验时, 我们所取的问题的真解是零。

表 1

$h \backslash N$	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.366 \cdot 10^2$	$0.204 \cdot 10^1$	$0.115 \cdot 10^0$	$0.617 \cdot 10^{-2}$	$0.457 \cdot 10^{-3}$	$0.561 \cdot 10^{-12}$
$\frac{1}{3}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.577 \cdot 10^2$	$0.259 \cdot 10^1$	$0.119 \cdot 10^0$	$0.544 \cdot 10^{-2}$	$0.116 \cdot 10^{-3}$	$0.378 \cdot 10^{-17}$
$\frac{1}{4}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.785 \cdot 10^2$	$0.306 \cdot 10^1$	$0.125 \cdot 10^0$	$0.426 \cdot 10^{-2}$	$0.118 \cdot 10^{-3}$	
$\frac{1}{5}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.987 \cdot 10^2$	$0.347 \cdot 10^1$	$0.123 \cdot 10^0$	$0.663 \cdot 10^{-2}$	$0.329 \cdot 10^{-10}$	
$\frac{1}{6}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.113 \cdot 10^3$	$0.374 \cdot 10^1$	$0.138 \cdot 10^0$	$0.319 \cdot 10^{-10}$		
$\frac{1}{7}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.137 \cdot 10^3$	$0.450 \cdot 10^1$	$0.302 \cdot 10^{-1}$	$0.863 \cdot 10^{-13}$		
$\frac{1}{8}$	$0.112 \cdot 10^3$	$0.156 \cdot 10^3$	$0.475 \cdot 10^1$	$0.220 \cdot 10^{-1}$	$0.198 \cdot 10^{-17}$		

表 2

N	1	2	3	4
σ	0.944	0.980	0.996	1.000
τ	1.059	1.059	1.059	1.059

参 考 文 献

- [1] Widlund, O. B., in *Domain Decomposition Methods for PDE's* (Eds. Glowinski, R. et al.), SIAM, Philadelphia, 1988.
- [2] Lions, P. L., in *Domain Decomposition Methods for PDE's* (Eds. Glowinski, R. et al.), SIAM, Philadelphia, 1988.