中国科学(A 辑)
第 31 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2001 年 1 月

一类高次奇点与无穷远点的中心焦点理论*

刘一戎
(中南大学数学系,长沙 410083)

摘要 对实平面微分自治系统论述了一类高次奇点与无穷远点的中心焦点判定、后继函数、形式级数、中心积分、积分因子、焦点量、奇点量以及极限环分支等问题.

关键词 高次奇点 无穷远点 中心焦点 极限环分支

1 焦点量与极坐标下的后继函数

在实平面微分自治系统的定性理论和分支理论中,高次奇点(包括初等奇点)与无穷远点的中心焦点判定与极限环分支问题十分重要,虽经众多研究[1],还有许多重要的理论问题与计算问题没有解决. 本文讨论实平面微分自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} X_k(x, y) = X(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} Y_k(x, y) = Y(x, y), \tag{1.1}$$

以及实平面 $2n+1$ 次微分自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{2n+1} X_k(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{2n+1} Y_k(x, y), \tag{1.2}$$

其中 n 为自然数,$X_k(x, y)$, $Y_k(x, y)$为关于 x 与 y 的齐 k 次多项式,幂级数 $X(x, y)$与 $Y(x, y)$在原点充分小的邻域内收敛,并假定存在正数 $\sigma>0$,使得

$$xY_{2n+1}(x, y) - yX_{2n+1}(x, y) \geqslant \sigma(x^2+y^2)^{n+1}. \tag{1.3}$$

由(1.3)式,坐标原点是系统(1.1)的中心或焦点,且当 $n>0$ 时为高次奇点;而 Poincaré 闭球面上的赤道 Γ_∞ 为系统(1.2)的轨线,其上没有实奇点,称 Γ_∞ 为系统(1.2)的赤道环或(Gauss 球面上的)无穷远点. 系统(1.2)可通过 Bendixson 倒径变换[2]

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = (\xi^2+\eta^2)^{2n+1} \tag{1.4}$$

化为系统(1.1)的一种特殊形式,而无穷远点则化为坐标原点. 本文用变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 将系统(1.1)化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r^{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{2n+2+k}(\theta)r^k, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{2n+2+k}(\theta)r^k, \tag{1.5}$$

并用变换 $x=\cos\theta/r$, $y=\sin\theta/r$ 将系统(1.2)化为

1999-04-26 收稿,2000-07-06 收修改稿
* 国家自然科学基金与中南大学文理基金资助项目

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{r^{2n-1}}\sum_{k=0}^{2n+1}\varphi_{2n+2-k}(\theta)r^k,\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r^{2n}}\sum_{k=0}^{2n+1}\psi_{2n+2-k}(\theta)r^k. \tag{1.6}$$

在系统(1.5)与(1.6)的右端函数中,

$$\begin{cases}\varphi_{k+1}(\theta)=\cos\theta X_k(\cos\theta,\ \sin\theta)+\sin\theta Y_k(\cos\theta,\ \sin\theta),\\ \psi_{k+1}(\theta)=\cos\theta Y_k(\cos\theta,\ \sin\theta)-\sin\theta X_k(\cos\theta,\ \sin\theta)\end{cases} \tag{1.7}$$

是关于 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的齐 $k+1$ 次多项式($k=0,\ 1,\ \cdots$). 特别,由(1.3)式得 $\psi_{2n+2}(\theta)\geqslant\sigma>0$.

系统(1.5)与(1.6)均可化为下列形式的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r\sum_{k=0}^{\infty}R_k(\theta)r^k. \tag{1.8}$$

其中方程(1.8)的右端函数在某域 $\theta\in[-4\pi,\ 4\pi]$, $|r|<r_0$ 内收敛,且

$$R_k(\theta+\pi)=(-1)^kR_k(\theta),\ k=0,\ 1,\cdots. \tag{1.9}$$

对充分小的 h, 方程(1.8)适合初值条件 $r|_{\theta=0}=h$ 的解与 Poincaré 后继函数,记为

$$r=r(\theta,\ h)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m(\theta)h^m,\ \Delta(h)=r(2\pi,\ h)-h. \tag{1.10}$$

定理 1.1 对任意正整数 m, $v_{2m}(2\pi)$与诸 $v_k(2\pi)$, $v_k(\pi)$有关系式

$$[1+v_1(\pi)]v_{2m}(2\pi)=\zeta_m^{(0)}[v_1(2\pi)-1]+\sum_{k=1}^{m-1}\zeta_m^{(k)}v_{2k+1}(2\pi), \tag{1.11}$$

其中所有的 $\zeta_m^{(k)}$ 都是关于 $v_1(\pi)$, $v_2(\pi)$, $\cdots$, $v_{2m}(\pi)$以及 $v_1(2\pi)$, $v_2(2\pi)$, $\cdots$, $v_{2m}(2\pi)$这 $4m$ 个元素的有理系数多项式.

证 由于诸 $R_k(\theta)$是关于 θ 的 2π 周期函数,故

$$r(\theta+2\pi,\ h)=r(\theta,\ r(2\pi,\ h)), \tag{1.12}$$

又,由(1.9)式,方程(1.8)经变换 $r\to-r$, $\theta\to\theta+\pi$ 后形式不变,故

$$r(\theta+\pi,\ h)=-r(\theta,\ -r(\pi,\ h)). \tag{1.13}$$

在(1.12)式中置 $\theta=\pi$,并在(1.13)式中置 $\theta=2\pi$, 得

$$r(\pi,\ r(2\pi,\ h))+r(2\pi,\ -r(\pi,\ h))=0. \tag{1.14}$$

由(1.10)与(1.14)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[v_k(\pi)r^k(2\pi,\ h)+(-1)^kv_k(2\pi)r^k(\pi,\ h)]=0. \tag{1.15}$$

将(1.15)式左端展开为 h 的幂级数,其 h^{2m}项的系数为

$$\sum_{k=1}^{2m}[v_k(\pi)\Omega_{2m,\ k}(2\pi)+(-1)^kv_k(2\pi)\Omega_{2m,\ k}(\pi)]=0. \tag{1.16}$$

其中

$$\Omega_{m,\ k}(\theta)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=m}\frac{m!}{i_1!\,i_2!\cdots i_k!}v_{i_1}(\theta)v_{i_2}(\theta)\cdots v_{i_k}(\theta) \tag{1.17}$$

是 $r^k(\theta,\ h)$关于 h 的幂级数展式中 h^m 项的系数. 由(1.16)与(1.17)式并注意到 $v_1^2(\pi)=v_1(2\pi)$, $[1+v_1(\pi)]^2=[v_1(2\pi)-1]+2[1+v_1(\pi)]$即得所欲证.

定义 1.1 对系统(1.1)(或(1.2)): 如果 $v_1(2\pi)\neq1$,则称坐标原点(或无穷远点)是粗焦点;如果 $v_1(2\pi)=1$, 且存在正整数 m, 使得

$$v_2(2\pi) = v_3(2\pi) = \cdots = v_{2m}(2\pi) = 0,\ v_{2m+1}(2\pi) \neq 0, \tag{1.18}$$

则称原点(或无穷远点)是 m 阶细焦点,并称 $v_{2m+1}(2\pi)$ 为原点(或无穷远点)的第 m 个焦点量;如果 $v_1(2\pi)=1$,且对一切正整数 m 有 $v_{2m+1}(2\pi)=0$, 则称原点(或无穷远点)是中心.

定理 1.2 对充分小的 $h>0$, 如果 $\Delta(h)<0$,则系统(1.1)的坐标原点(或系统(1.2)的无穷远点)是稳定的焦点;如果 $\Delta(h)>0$ 则系统(1.1)的坐标原点(或系统(1.2)的无穷远点)是不稳定的焦点;如果 $\Delta(h)\equiv 0$, 则系统(1.1)在原点(或系统(1.2)在无穷远点)邻域充满闭轨.

2 中心积分与积分因子

对方程(1.8),以 $h=\hat{h}(\theta, r)$表示 $r=r(\theta, h)$的反函数. 由于方程(1.8)经变换 $r\to -r$, $\theta\to\theta+\pi$ 形式不变,故 $r=-r(\theta+\pi, -h)$也是方程(1.8)在零解 $r=0$ 附近的通解,其反函数即为 $h=-\hat{h}(\theta+\pi, -r)$. 由 $r(\theta, h)$的解析性质,

$$\hat{H}(\theta, r) = -\hat{h}(\theta, r)\hat{h}(\theta+\pi, -r) \tag{2.1}$$

可展为在某域 $\theta\in[-4\pi, 4\pi]$, $|r|<\delta$ 内收敛的幂级数

$$\hat{H}(\theta, r) = \frac{r^2}{v_1(\theta)v_1(\theta+\pi)}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}H_m(\theta)r^m\Big]. \tag{2.2}$$

由此得

定理 2.1 方程(1.8)在零解 $r=0$ 附近有通积分 $\hat{H}(\theta, r)=\text{const}$. 特别,当 $r(\theta, h)$为 2π 周期函数时有 $\hat{H}(\theta+\pi, -r)=\hat{H}(\theta, r)$; 相应地,在(2.2)式中有

$$H_m(\theta+\pi) = (-1)^m H_m(\theta),\ m = 1, 2, \cdots. \tag{2.3}$$

以下讨论系统(1.1)与(1.2)的右端函数中 $X_{2n+1}(x, y)=-y(x^2+y^2)^n$, $Y_{2n+1}(x, y)=x(x^2+y^2)^n$ 的情况. 即讨论实平面解析微分自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2+y^2)^n + \displaystyle\sum_{k=2n+2}^{\infty}X_k(x, y) = X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2+y^2)^n + \displaystyle\sum_{k=2n+2}^{\infty}Y_k(x, y) = Y(x, y), \end{cases} \tag{2.4}$$

以及实平面 $2n+1$ 次微分自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2+y^2)^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}X_k(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2+y^2)^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}Y_k(x, y), \end{cases} \tag{2.5}$$

相应地,在(1.7)与(1.10)式中有

$$\varphi_{2n+2}(\theta) \equiv 0,\ \psi_{2n+2}(\theta) \equiv 1,\ v_1(\theta) \equiv 1. \tag{2.6}$$

定理 2.2 如果坐标原点是系统(2.4)的中心点,则系统(2.4)有通积分 $H(x, y)=\text{const}$, 其中

$$H(x, y) = (x^2+y^2)\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_{(2n+3)m}(x, y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)m}}\Big] \tag{2.7}$$

在某域 $0<x^2+y^2<\delta^2$ 内收敛,诸 $h_{(2n+3)m}(x, y)$为关于 x, y 的齐$(2n+3)m$ 次多项式,且 $H(r\cos\theta, r\sin\theta)=\hat{H}(\theta, r)$.

证 由定理 2.1,系统(1.5)有通积分 $\hat{H}(\theta, r) = \text{const}$,从而由 $(\mathrm{d}\hat{H}/\mathrm{d}t)\Big|_{(1.5)} = 0$ 得

$$H'_m = 2\varphi_{2n+2+m} + \sum_{k=1}^{m-1}[(k+2)H_k\varphi_{2n+m-k+2} + H'_k\psi_{2n+m-k+2}] = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{2.8}$$

由(2.3)与(2.8)式用数学归纳法易证诸 $H_m(\theta)$ 可表为 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的齐 $(2n+3)m$ 次多项式. 记 $H_m(\theta) = h_{(2n+3)m}(\cos\theta, \sin\theta)$, 则 $\hat{H}(\theta, r)$ 在直角坐标 (x, y) 下即为 $H(x, y)$, 而 $H(x, y)$ 的收敛性质则由 $\hat{H}(\theta, r)$ 的收敛性质决定.

仿定理 2.2 可证

定理 2.2′ 如果无穷远点是系统(2.5)的中心点,则系统(2.5)有通积分 $H(x, y) = \text{const}$, 其中

$$H(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_{(2n+1)m}(x, y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)m}}\right] \tag{2.9}$$

在某域 $0 < (x^2+y^2)^{-1} < \delta^2$ 内收敛,诸 $h_{(2n+1)m}(x, y)$ 为关于 x, y 的齐 $(2n+1)m$ 次多项式, 且 $H\left(\frac{\cos\theta}{r}, \frac{\sin\theta}{r}\right) = \hat{H}(\theta, r)$.

定理 2.3 如果坐标原点是系统(2.4)的中心点,则系统(2.4)在某域 $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ 内存在一个收敛的积分因子,具有下列形式:

$$D(x, y) = \frac{\frac{\partial H}{\partial x}x + \frac{\partial H}{\partial y}y}{xY - yX} = \frac{2}{(x^2+y^2)^n}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{(2n+3)k}(x, y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)k}}\right], \tag{2.10}$$

其中 $H(x, y)$ 由(2.7)式给出,诸 $d_{(2n+3)m}(x, y)$ 为关于 x, y 的齐 $(2n+3)m$ 次多项式,且 $\frac{\partial H}{\partial x} = DY$, $\frac{\partial H}{\partial y} = -DX$.

定理 2.3′ 如果无穷远点是系统(2.5)的中心点,则系统(2.5)在某域 $0 < (x^2+y^2)^{-1} < \delta^2$ 内存在一个收敛的积分因子,具有下列形式:

$$D(x, y) = \frac{-2}{(x^2+y^2)^{n+2}}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{(2n+1)k}(x, y)}{(x^2+y^2)^{(n+1)k}}\right], \tag{2.11}$$

其中诸 $d_{(2n+1)m}(x, y)$ 为关于 x, y 的齐 $(2n+1)m$ 次多项式,且 $\frac{\partial H}{\partial x} = DY$, $\frac{\partial H}{\partial y} = -DX$, $H(x, y)$ 由(2.9)式给出.

3 奇点量与广义形式级数

系统(2.4)与(2.5)经变换 $z = x + \mathrm{i}y$, $w = x - \mathrm{i}y$, $T = \mathrm{i}t$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 分别化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T} = z^{n+1}w^n + \sum_{k=2n+2}^{\infty}Z_k(z, w), \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T} = -w^{n+1}z^n - \sum_{k=2n+2}^{\infty}W_k(z, w), \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T} = z^{n+1}w^n + \sum_{k=0}^{2n}Z_k(z, w), \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T} = -w^{n+1}z^n - \sum_{k=0}^{2n}W_k(z, w). \tag{3.2}$$

在系统(3.1)与(3.2)的右端函数中

$$Z_k(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=k}a_{\alpha,\beta}\,z^{\alpha}w^{\beta}, \quad W_k(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=k}b_{\alpha,\beta}\,w^{\alpha}z^{\beta}. \tag{3.3}$$

为 z, w 的齐 k 次多项式 $(k = 1, 2, \cdots)$.

定义 3.1　对系统(2.4)、(2.5)、(3.1)与(3.2),称右端函数在原点邻域的幂级数展式中所有的系数均为参数. 对任意正整数 $m\geqslant 3$, 如果存在诸参数 $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$的复系数多项式ξ_2, ξ_3, $\cdots$, ξ_{m-1}, 使得 $v_m(2\pi)+\sum\limits_{k=2}^{m-1}\xi_k v_k(2\pi)=V$, 则称 V 与 $v_m(2\pi)$代数等价,记为 $V\sim v_m(2\pi)$. 对任意常数 $\lambda\neq 0$,用记号 $V\sim\lambda v_m(2\pi)$表示 $\lambda^{-1}V\sim v_m(2\pi)$.

由定理 1.1 得

定理 3.1　对系统(2.4)与(2.5),有 $v_2(2\pi)=0$,且对任意正整数 m, 有 $v_{2m}(2\pi)\sim 0$;而且当 $V\sim v_{2m+1}(2\pi)$时必存在诸 $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$的复系数多项式ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{m-1}, 使得

$$v_{2m+1}(2\pi)+\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k v_{2k+1}(2\pi)=V.$$

以下,对任意自然数 k, 用记号 $f_k(z,w)=\sum\limits_{\alpha+\beta=k}c_{\alpha,\beta}z^{\alpha}w^{\beta}$ 表示需要待定的关于 z, w 的齐 k 次多项式.

定理 3.2　对系统(3.1),可惟一地逐项确定一个广义形式级数

$$F(z,w)=zw\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+3)k}(z,w)}{(zw)^{k(n+1)}},\tag{3.4}$$

其中 $c_{0,0}=1$, $c_{k,k}=0$ $(k=1,2,\cdots)$,使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}\right|_{(3.1)}=(zw)^n\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m(zw)^{m+1},\tag{3.5}$$

且

$$\mu_m\sim\frac{1}{\mathrm{i}\pi}v_{2m+1}(2\pi),\ m=1,2,\cdots,\tag{3.6}$$

其中 $v_{2m+1}(2\pi)$是系统(2.4)原点的第 m 个焦点量.

定理 3.2′　对系统(3.2),可惟一地逐项确定一个广义形式级数

$$F(z,w)=\frac{1}{zw}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+1)k}(z,w)}{(zw)^{k(n+1)}},\tag{3.7}$$

$c_{0,0}=1$, $c_{k,k}=0$ $(k=1,2,\cdots)$,使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}\right|_{(3.2)}=(zw)^n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m}{(zw)^{m+1}},\tag{3.8}$$

且

$$\mu_m\sim\frac{1}{\mathrm{i}\pi}v_{2m+1}(2\pi),\ m=1,2,\cdots,\tag{3.9}$$

其中 $v_{2m+1}(2\pi)$是系统(2.5)无穷远点的第 m 个焦点量.

定义 3.2　对系统(3.1),称由(3.5)式确定的 μ_m 为原点的第 m 个奇点量;对系统(3.2),称由(3.9)式确定的 μ_m 为无穷远点的第 m 个奇点量; $m=1,2,\cdots$.

4　Lie-不变量与奇点量结构

系统(3.1)与(3.2)经变换

$$z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}\tilde{z},\quad w=\rho e^{-\mathrm{i}\theta}\tilde{w},\quad T=\rho^{-2n}\tilde{T}\tag{4.1}$$

分别化为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{T}}=\tilde{z}^{n+1}\tilde{w}^{n}+\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}\tilde{a}_{\alpha,\beta}\tilde{z}^{\alpha}\tilde{w}^{\beta},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tilde{T}}=-\tilde{w}^{n+1}\tilde{z}^{n}-\sum_{\alpha+\beta=2n+2}^{\infty}\tilde{b}_{\alpha,\beta}\tilde{w}^{\alpha}\tilde{z}^{\beta},\tag{4.2}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}\tilde{T}}=\tilde{z}^{n+1}\tilde{w}^{n}+\sum_{\alpha+\beta=0}^{2n}\tilde{a}_{\alpha,\beta}\tilde{z}^{\alpha}\tilde{w}^{\beta},\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\tilde{T}}=-\tilde{w}^{n+1}\tilde{z}^{n}-\sum_{\alpha+\beta=0}^{2n}\tilde{b}_{\alpha,\beta}\tilde{w}^{\alpha}\tilde{z}^{\beta},\tag{4.3}$$

其中 ρ, θ 为参数,$\tilde{z}$, $\tilde{w}$, $\tilde{T}$ 为新变量,且 $\forall\,\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ 有

$$\begin{cases}\tilde{a}_{\alpha,\beta}=a_{\alpha,\beta}\,\rho^{\alpha+\beta-1-2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\theta},\\ \tilde{b}_{\alpha,\beta}=b_{\alpha,\beta}\,\rho^{\alpha+\beta-1-2n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\theta}.\end{cases}\tag{4.4}$$

与文献[3]中定义的双参数变换群 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tilde{z}$, $w=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\tilde{w}$ 项比较,(4.1)式多了一个变换 $T=\rho^{-2n}\tilde{T}$,称 n 为变换(4.1)的时间指数. 记

$$\begin{cases}A=\{a_{\alpha,\beta}\,|\,\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0\},\quad B=\{b_{\alpha,\beta}\,|\,\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0\},\\ \tilde{A}=\{\tilde{a}_{\alpha,\beta}\,|\,\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0\},\quad \tilde{B}=\{\tilde{b}_{\alpha,\beta}\,|\,\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0\}.\end{cases}\tag{4.5}$$

定义 4.1 设 $f=f(A,B)$是诸 $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$的复系数多项式,记 $\tilde{f}=\tilde{f}(\tilde{A},\tilde{B})$, $f^{*}=f(B,A)$. 如果 $f=f^{*}$,则称 f 在变换(4.1)下是对称的;如果 $f=-f^{*}$,则称 f 在变换(4.1)下是反对称的;如果 $f(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$, 且存在常数 λ, σ,使得 $\tilde{f}=\rho^{\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\theta}f$, 则称 f 是变换(4.1)下的一个正规多项式,并依次称 λ, σ 为f 在变换(4.1)下的旋转指数和相似指数,记为 $I_r(f)=\lambda$, $I_s(f)=\sigma$;如果 f 是变换(4.1)下的一个正规多项式,且 $I_r(f)=0$,$I_s(f)=2k$, 则称 f 是广义 Lie-变换(4.1)下的一个 k 级旋转不变量,简称 k 级 Lie-不变量,其时间指数为 n; 如果f 是一个 Lie-不变量,且 f 是定义于P 中的单项式,则称 f 是一个单项式 Lie-不变量;如果 f 是一个单项式 Lie-不变量,且 f 不能表为两个单项式 Lie-不变量的乘积,则称 f 是一个基本 Lie-不变量.

显然,文献[3]中定义的 k 级多项式 Lie-不变量在本文中即为时间指数为 0 的 k 级 Lie-不变量. 由定义 4.1 与(4.4)式得

定理 4.1 设 $g=\prod_{j=1}^{p}a_{\alpha_j,\beta_j}\prod_{j=1}^{q}b_{u_j,v_j}$ 是一个定义于P 中的单项式,则

$$\begin{cases}I_r(g)=\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j-\beta_j-1)-\sum_{j=1}^{q}(u_j-v_j-1),\\ I_s(g)=-2n(p+q)+\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j+\beta_j-1)+\sum_{j=1}^{q}(u_j+v_j-1).\end{cases}\tag{4.6}$$

由定理 4.1, 如果 f 是一个 Lie-不变量,则 f^{*} 亦然.

引理 4.1 系统(3.1)原点的第 m 个奇点量 μ_m 是一个时间指数为 n 的 m 级 Lie-不变量,即在变换(4.1)下有 $\tilde{\mu}_m=\rho^{2m}\mu_m(m=1,2,\cdots)$.

证 记 $\tilde{F}=\rho^{-2}F(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tilde{z},\ \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tilde{w})$, 其中 $F(z,w)$由定理 3.1 给出,则由(3.5)式得 $\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{F}}{\mathrm{d}\tilde{T}}\right|_{(4.2)}=(\tilde{z}\,\tilde{w})^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{2m}\mu_m(\tilde{z}\,\tilde{w})^{m+1}$. 从而 $\tilde{\mu}_m=\rho^{2m}\mu_m(m=1,2,\cdots)$.

对系统(3.1)作变换 $z^{*}=w$, $w^{*}=z$, $T^{*}=-T$,并仿照引理 4.1 的证明得

引理 4.2　系统(3.1)原点的第 m 个奇点量具有反对称性，即 $\mu_m^* = -\mu_m(m=1, 2, \cdots)$.

由引理 4.1 和 4.2 得

定理 4.2　(高次奇点的奇点量结构定理)　对任意正整数 m，系统(3.1)原点的第 m 个奇点量 μ_m 是 m 级单项式 Lie-不变量的有理系数反对称线性组合，其时间指数为 n. 即 μ_m 具有下列代数结构：

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{s(m)} \gamma_{m,k}(g_{m,k} - g_{m,k}^*), \tag{4.7}$$

其中 $s(m)$ 为一个与 m 有关的正整数，$\gamma_{m,k}$ 为有理数，$g_{m,k}$ 与 $g_{m,k}^*$ 为变换(4.1)下的 m 级 Lie-不变量($k=1, 2, \cdots, s(m)$).

仿定理 1.3 可证

定理 4.2′(无穷远点的奇点量结构定理)　对任意正整数 m，系统(3.2)无穷远点的第 m 个奇点量 μ_m 是“$-m$”级单项式 Lie-不变量的有理系数反对称线性组合，其时间指数为 n. 即 μ_m 具有下列代数结构：

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{s(m)} \gamma_{m,k}(g_{m,k} - g_{m,k}^*), \tag{4.8}$$

其中 $s(m)$ 为一个与 m 有关的正整数，$\gamma_{m,k}$ 为有理数，$g_{m,k}$ 与 $g_{m,k}^*$ 为变换(4.1)下的“$-m$”级 Lie-不变量($k=1, 2, \cdots, s(m)$).

由定理 4.2 与 4.2′ 得

定理 4.3 (广义对称原理)　对系统(3.1)，如果在变换(4.1)下所有的基本 Lie-不变量 g 都满足 $g=g^*$，则原点所有的奇点量全部为零；对系统(3.2)，在相同的条件下无穷远点所有的奇点量全部为零.

5　计算奇点量的几种方法

记 $\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T}$, $\dot{w} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}$.

定理 5.1　$\forall s \neq 0, \gamma \neq 0$，可逐项确定广义形式级数

$$F(z, w) = (zw)^s \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{(2n+3)k}(z, w)}{(zw)^{k(n+1)}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{5.1}$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}\right|_{(3.1)} = \frac{1}{\gamma}(zw)^{n+s} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{(2n+3)k}(z, w)}{(zw)^{k(n+1)}} \right]^{\frac{1}{\gamma}-1} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (zw)^m, \tag{5.2}$$

且

$$\lambda_m \sim s\gamma\mu_m, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{5.3}$$

其中 μ_m 是系统(3.1)原点的第 m 个奇点量；$c_{0,0}=1$，$c_{(2n+3)k,(2n+3)k}$ 任取($k=1, 2, \cdots$).

定理 5.1′　$\forall s \neq 0, \gamma \neq 0$，可逐项确定广义形式级数

$$F(z, w) = (zw)^s \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{(2n+1)k}(z, w)}{(zw)^{k(n+1)}} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{5.4}$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}\right|_{(3.2)} = \frac{1}{\gamma}(zw)^{n+s}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+1)k}(z,\ w)}{(zw)^{k(n+1)}}\right]^{\frac{1}{\gamma}-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{(zw)^m}, \tag{5.5}$$

且对任意正整数 m,

$$\lambda_m \sim -s\gamma\mu_m,\quad m = 1, 2, \cdots. \tag{5.6}$$

其中 μ_m 是系统(3.2)无穷远点的第 m 个奇点量;$c_{0,0}=1$, $c_{(2n+1)k,(2n+1)k}$任取($k=1, 2, \cdots$).

定理 5.2 设 s, γ 是两个常数,如果对任意正整数 m, $\gamma(s+n+m+1)\neq 0$,则可逐项确定广义形式级数

$$F(z,\ w) = (zw)^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+3)k}(z,\ w)}{(zw)^{k(n+1)}}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{5.7}$$

使得对系统(3.1)有

$$\frac{\partial(F\dot{z})}{\partial z} + \frac{\partial(F\dot{w})}{\partial w} = \frac{1}{\gamma}(zw)^{n+s}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+3)k}(z,\ w)}{(zw)^{k(n+1)}}\right]^{\frac{1}{\gamma}-1}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(zw)^m, \tag{5.8}$$

且对任意正整数 m 有

$$\lambda_m \sim \gamma(s+n+1+m)\mu_m,\quad m = 1, 2, \cdots. \tag{5.9}$$

其中 μ_m 是系统(3.1)原点的第 m 个奇点量;$c_{0,0}=1$, $c_{(2n+3)k,(2n+3)k}$任取($k=1, 2, \cdots$).

定理 5.2′ 设 s, γ 是两个常数,如果对任意正整数 m, $\gamma(s+n-m+1)\neq 0$,则可逐项确定广义形式级数

$$F(z,\ w) = (zw)^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+1)k}(z,\ w)}{(zw)^{k(n+1)}}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{5.10}$$

使得对系统(3.2)有

$$\frac{\partial(F\dot{z})}{\partial z} + \frac{\partial(F\dot{w})}{\partial w} = \frac{1}{\gamma}(zw)^{n+s}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{(2n+1)k}(z,\ w)}{(zw)^{k(n+1)}}\right]^{\frac{1}{\gamma}-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{(zw)^m}, \tag{5.11}$$

且对任意正整数 m 有

$$\lambda_m \sim -\gamma(s+n+1-m)\mu_m,\quad m = 1, 2, \cdots. \tag{5.12}$$

其中 μ_m 是系统(3.2)无穷远点的第 m 个奇点量;$c_{0,0}=1$, $c_{(2n+1)k,(2n+1)k}$任取($k=1, 2, \cdots$).

6 后继函数与分支问题

本节讨论系统(1.1)与(1.2)含小参数 ε 的情形,即讨论实平面微分自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=2n+1}^{\infty}X_k(x,\ y,\ \varepsilon) = X(x,\ y,\ \varepsilon),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=2n+1}^{\infty}Y_k(x,\ y,\ \varepsilon) = Y(x,\ y,\ \varepsilon), \tag{6.1}$$

以及实平面 $2n+1$ 次微分自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{2n+1}X_k(x,\ y,\ \varepsilon),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{2n+1}Y_k(x,\ y,\ \varepsilon), \tag{6.2}$$

其中 n 为自然数,诸 $X_k(x,\ y,\ \varepsilon)$, $Y_k(x,\ y,\ \varepsilon)$为关于 x 与 y 的齐 k 次多项式,其系数均为关

于 ε 的具有非零收敛半径的幂级数,且存在正数 x_0, y_0, ε_0, 使得 $X(x, y, \varepsilon)$与 $Y(x, y, \varepsilon)$在域 $|x| < x_0$, $|y| < y_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 内解析,特别,存在正数 $\sigma > 0$,使得

$$xY_{2n+1}(x, y, 0) - yX_{2n+1}(x, y, 0) \geqslant \sigma(x^2 + y^2)^{n+1}. \tag{6.3}$$

系统(6.1)在坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下与系统(6.2)在坐标 $x = \cos\theta/r$, $y = \sin\theta/r$ 下适合初值条件 $r|_{\theta=0} = h$ 的解与 Poincaré 后继函数统一记为

$$r = r(\theta, h, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(\theta, \varepsilon)h^m, \quad \Delta(h, \varepsilon) = r(2\pi, h, \varepsilon) - h. \tag{6.4}$$

由微分方程的解析理论[4],存在正数 h_0, 使得 $r(\theta, h, \varepsilon)$在某域 $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$, $|h| < h_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$内解析. 由(1.13)式得

引理 6.1　对充分小的 h, ε,如果 $h = h(\varepsilon)$是 $\Delta(h, \varepsilon)$的一个零点(实的或复的),则 $h = -r(\pi, h(\varepsilon), \varepsilon)$亦然. 从而在实域中 $\Delta(h, \varepsilon)$的正、负零点成对出现.

以下假定当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时 $\Delta(h, \varepsilon)$不恒为零,从而存在自然数 N, 使得 $\Delta(h, \varepsilon) = \varepsilon^N h\tilde{\Delta}(h, \varepsilon)$, $\tilde{\Delta}(h, 0)$不恒为零. 当 $N = 0$ 时本文视 $\varepsilon^N \equiv 1$. 由定理 1.1, 系统(6.1)与(6.2)满足

基本条件 6.1　存在自然数 N, m 和一串与 ε 无关的量 λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_m, 使得

$$\begin{cases} v_1(2\pi, \varepsilon) - 1 = \lambda_0\varepsilon^{l_0+N} + o(\varepsilon^{l_0+N}), \\ v_{2k+1}(2\pi, \varepsilon) = \lambda_k\varepsilon^{l_k+N} + o(\varepsilon^{l_k+N}), \quad k = 1, 2, \cdots, m, \end{cases} \tag{6.5}$$

其中 l_0, l_1, $\cdots$, l_{m-1}是正整数, $l_m = 0$, $\lambda_m \neq 0$,且 $v_{2m+2k+1}(2\pi, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

在基本条件 6.1 中:如果 $v_1(2\pi, \varepsilon) - 1 \equiv 0$,则视 $\lambda_0 = 0$, l_0 充分大;如果对某个正整数 $k < m$ 有 $v_{2k+1}(2\pi, \varepsilon) \equiv 0$, 则视 $\lambda_k = 0$, l_k 充分大;如果 $N = 0$,则坐标原点或无穷远点是系统$(6.1)_{\varepsilon=0}$或$(6.2)_{\varepsilon=0}$的 m 阶细焦点;如果 $N > 0$,则坐标原点或无穷远点是系统$(6.1)_{\varepsilon=0}$或$(6.2)_{\varepsilon=0}$的中心点. 此外,如果 $m = 0$, 则基本条件 6.1 退化为

$$\begin{cases} v_1(2\pi, \varepsilon) - 1 = \lambda_0\varepsilon^N + o(\varepsilon^N), \\ v_{2k+1}(2\pi, \varepsilon) = o(\varepsilon^N), \quad k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{6.6}$$

以下对 $N = 0$ 和 $N > 0$ 这两种情况统一研究由焦点和中心点所产生的极限环分支. 由解析函数论中的 Weierstrass 预备定理[5]得

引理 6.2　如果基本条件 6.1 成立,$\Delta(h, \varepsilon)$可表为下列形式:

$$\Delta(h, \varepsilon) = \varepsilon^N hW(h, \varepsilon)U(h, \varepsilon), \tag{6.7}$$

其中,$W(h, \varepsilon)$与 $U(h, \varepsilon)$在点 $h = \varepsilon = 0$ 附近解析,$U(0, 0) = 1$,

$$W(h, \varepsilon) = \omega_0(\varepsilon) + \cdots + \omega_k(\varepsilon)h^k + \cdots + \omega_{2m}(\varepsilon)h^{2m}, \tag{6.8}$$

是关于 h 的 $2m$ 次多项式,且

$$\omega_0(0) = \omega_1(0) = \cdots = \omega_{2m-1}(0) = 0, \qquad \omega_{2m}(0) = \lambda_m. \tag{6.9}$$

引理 6.3　如果基本条件 6.1 成立,则存在正数 r_0 与 ε'_0, 使得当$|\varepsilon| < \varepsilon'_0$时 $W(h, \varepsilon)$在圆盘$|h| < r_0$ 内恰有 $2m$ 个复零点(多重零点按重次计数)$h = h_k(\varepsilon)$, 其中 $h_k(\varepsilon)$为关于 ε 的代数体函数,且 $h_k(0) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, 2m)$.

由引理 6.1 与 6.3 得

定理 6.1　如果基本条件 6.1 成立,则系统(6.1)(或(6.2))当 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 时在原点(或无

穷远点)充分小的邻域内至多可以由焦点或中心点扰动出 m 个极限环.

对于 $m=0$ 的情形,可由定理 6.1 得到几个简单的推论如下:

推论 6.1 如果原点(或无穷远点)是系统 $(6.1)_{\varepsilon=0}$(或 $(6.2)_{\varepsilon=0}$)的粗焦点,则当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时系统(6.1)在原点(或系统(6.2)在无穷远点)充分小的邻域内没有极限环.

推论 6.2 如果原点(或无穷远点)是系统 $(6.1)_{\varepsilon=0}$(或 $(6.2)_{\varepsilon=0}$)的中心点,且 $v_1(2\pi, \varepsilon)-1=\lambda_0\varepsilon+o(\varepsilon)$, $\lambda_0\neq 0$, 则当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时系统(6.1)在原点(或系统(6.2)在无穷远点)充分小的邻域内没有极限环.

定义 6.1 称 $L(h, \varepsilon)$ 为系统(6.1)(或(6.2))的分支函数,其中

$$L(h, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k \varepsilon^{l_k}h^{2k}. \tag{6.10}$$

设 $h=h(\varepsilon)$ 是 $W(h, \varepsilon)$ 或 $L(h, \varepsilon)$ 的一个零点:如果 $h(\varepsilon)\equiv 0$, 则称 $h(\varepsilon)$ 的首次项为零;如果 $h(\varepsilon)$ 不恒为零,则由引理 6.3, 存在正整数 p, q, 使得

$$h(\varepsilon) = \eta\varepsilon^{p/q} + \varepsilon^{p/q}\zeta(\varepsilon^{1/q}), \quad \eta\neq 0, \tag{6.11}$$

其中 $\zeta(\sigma)$ 为具有非零收敛半径的幂级数, $\zeta(0)=0$. 称 $\eta\varepsilon^{p/q}$ 为 $h(\varepsilon)$ 的首次项.

由定理 1.1 及隐函数存在定理可证

定理 6.2 适当排列 $W(h, \varepsilon)$ 的零点 $h=h_k(\varepsilon)$ 与 $L(h, \varepsilon)$ 的零点 $h=\tilde{h}_k(\varepsilon)$,可使得 $h_k(\varepsilon)$ 与 $\tilde{h}_k(\varepsilon)$ 具有相同的首次项($k=1, 2, \cdots, 2m$).

定理 6.3 如果当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时在 $L(h, \varepsilon)$ 的 $2m$ 个零点中恰有 s 个具有正的首次项,且这 s 个正的首次项互不相同,则当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时 $W(h, \varepsilon)$ 恰有 s 个正零点.

显然, $L(h, \varepsilon)$ 是 h^2 的 m 次多项式,可通过焦点量的计算完全确定,其零点的首次项则可用代数方程求根的方法确定. 在代数函数论中还有一些其他的方法(例如 Newton 图式法[6])可以较为方便地确定零点的首次项.

定理 6.4 设原点是系统 $(6.1)_{\varepsilon=0}$ 的 m 阶细焦点, $v_1(2\pi, \varepsilon)-1=\lambda_0\varepsilon+o(\varepsilon)$, $v_{2m+1}(2\pi, 0)=\lambda_m$, $\lambda_0\lambda_m\neq 0$, 则当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时,在原点充分小的邻域内,系统(6.1)当 $\lambda_0\lambda_m>0$ 时无环,而当 $\lambda_0\lambda_m<0$ 时恰有一个极限环,其位置在圆 $x^2+y^2=(-\lambda_0\varepsilon/\lambda_m)^{1/m}$ 附近. 系统(6.2)在相同的条件下有对应的结论.

定理 6.5 如果基本条件 6.1 成立,且存在一个正数 d, 使得在(6.5)式中有 $l_k=(m-k)d$ ($k=0, 1, \cdots, m$), 而 $\sum_{k=0}^{m}\lambda_k\eta^{2k}$ 又有 m 个相异的正零点 $\eta=\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$,则当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时, $L(h, \varepsilon)$ 恰有 m 个正零点 $h_k(\varepsilon)=\eta_k\varepsilon^{d/2}+o(\varepsilon^{d/2})$. 相应地,系统(6.1)在原点充分小的邻域内恰有 m 个极限环,其位置分别在圆 $x^2+y^2=\eta_k^2\varepsilon^d$ 附近;系统(6.2)在相同的条件下,在无穷远点充分小的邻域内恰有 m 个极限环,其位置分别在圆 $(x^2+y^2)^{-1}=\eta_k^2\varepsilon^d$ 附近 ($k=1, 2, \cdots, m$).

定理 6.6 如果基本条件 6.1 成立,且在(6.5)式中有 $\lambda_{k-1}\lambda_k<0$ ($k=1, 2, \cdots, m$)以及 $l_{k-1}-l_k>l_k-l_{k+1}$($k=1, 2, \cdots, m-1$),则当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时 $L(h, \varepsilon)$ 恰有 m 个正零点 $h_k(\varepsilon)=\sqrt{(-\lambda_{k-1}/\lambda_k)\varepsilon^{l_{k-1}-l_k}}+o(\varepsilon^{(l_{k-1}-l_k)/2})$. 相应地,系统(6.1)在原点充分小的邻域内恰有 m 个极限环,其位置分别在圆 $x^2+y^2=(-\lambda_{k-1}/\lambda_k)\varepsilon^{l_{k-1}-l_k}$ 附近;系统(6.2)在相同的条件下,在无

穷远点充分小的邻域内恰有 m 个极限环,其位置分别在圆$(x^2+y^2)^{-1}=(-\lambda_{k-1}/\lambda_k)\varepsilon^{l_{k-1}-l_k}$附近 ($k=1, 2,\cdots, m$).

7　一类三次系统的赤道极限环分支

考虑实平面三次系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(-y+\delta x)(x^2+y^2)+X_2(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt}=(x+\delta y)(x^2+y^2)+Y_2(x, y), \end{cases} \tag{7.1}$$

其中 $X_2(x, y)$与 $Y_2(x, y)$为关于 x, y 的齐 2 次多项式. 系统(7.1)经变换 $x=\cos\theta/r$, $y=\sin\theta/r$ 化为

$$\frac{dr}{d\theta}=-r\frac{\delta+r[\cos\theta X_2(\cos\theta, \sin\theta)+\sin\theta Y_2(\cos\theta, \sin\theta)]}{1+r[\cos\theta Y_2(\cos\theta, \sin\theta)-\sin\theta X_2(\cos\theta, \sin\theta)]}. \tag{7.2}$$

实平面二次系统 $\dot{x}=-y+\delta x+X_2(x, y)$, $\dot{y}=x+\delta y+Y_2(x, y)$在极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下其右端函数与(7.2)式仅差一个负号,故本文结论可以与二次系统的有关结论相对照.

系统(7.1)经变换 $z=x+iy$, $w=x-iy$, $dT=idt$, $i=\sqrt{-1}$化为

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT}=(1-i\delta)z^2w+a_{20}z^2+a_{11}zw+a_{02}w^2, \\ \dfrac{dw}{dT}=-(1+i\delta w)w^2z-b_{20}w^2-b_{11}wz-b_{02}z^2, \end{cases} \tag{7.3}$$

其中

$$a_{kl}=A_{kl}+iB_{kl}, \quad b_{kl}=A_{kl}-iB_{kl}. \tag{7.4}$$

相应地,

$$\begin{cases} X_2(x, y)=-(B_{20}+B_{11}+B_{02})x^2-2(A_{20}-A_{02})xy+(B_{20}-B_{11}+B_{02})y^2, \\ Y_2(x, y)=(A_{20}+A_{11}+A_{02})x^2-2(B_{20}-B_{02})xy-(A_{20}-A_{11}+A_{02})y^2. \end{cases} \tag{7.5}$$

引理 7.1　系统$(7.3)_{\delta=0}$恰有下列 13 个基本 Lie-不变量:

$$\begin{cases} a_{20}b_{20}, \ a_{11}b_{11}, \ a_{02}b_{02}, \ a_{20}a_{11}, \ b_{20}b_{11}, \\ a_{20}^3a_{02}, \ a_{20}^2b_{11}a_{02}, \ a_{20}b_{11}^2a_{02}, \ b_{11}^3a_{02}, \\ b_{20}^3b_{02}, \ b_{20}^2a_{11}b_{02}, \ b_{20}a_{11}^2b_{02}, \ a_{11}^3b_{02}. \end{cases} \tag{7.6}$$

在个人计算机上进行奇点量的公式推导和化简,得

定理 7.1　当 $\delta=0$ 时系统(7.3)无穷远点的前 4 个奇点量公式如下:

$$\begin{cases} \mu_1\sim a_{20}a_{11}-b_{20}b_{11}, \\ \mu_2\sim \dfrac{1}{3}(4I_0-I_2), \\ \mu_3\sim \dfrac{1}{48}(2a_{02}b_{02}-3a_{20}b_{20})(-14I_1+5I_2+I_3), \\ \mu_4\sim \dfrac{1}{1800}a_{02}^2b_{02}^2(-364I_1+220I_2-19I_3), \end{cases} \tag{7.7}$$

其中

$$\begin{cases} I_0 = a_{20}^3 a_{02} - b_{20}^3 b_{02}, \quad I_1 = a_{20}^2 b_{11} a_{02} - b_{20}^2 a_{11} b_{02}, \\ I_2 = a_{20} b_{11}^2 a_{02} - b_{20} a_{11}^2 b_{02}, \quad I_3 = b_{11}^3 a_{02} - a_{11}^3 b_{02}. \end{cases} \tag{7.8}$$

定理 7.2 当 $\delta=0$ 时系统(7.3)无穷远点的前4个奇点量公式均为零,当且仅当下列两组条件之一成立:

$$\begin{cases} a_{20}a_{11} = b_{20}b_{11}, \quad a_{20}^3 a_{02} = b_{20}^3 b_{02}, \quad b_{11}^3 a_{02} = a_{11}^3 b_{02}, \\ a_{20}^2 b_{11} a_{02} = b_{20}^2 a_{11} b_{02}, \quad a_{20} b_{11}^2 a_{02} = b_{20} a_{11}^2 b_{02}. \end{cases} \tag{7.9}$$

$$b_{11} = 2a_{20}, \quad a_{11} = 2b_{20}. \tag{7.10}$$

定理 7.3 当 $\delta=0$ 时,如果(7.9)式成立,则系统(7.3)的右端系数满足广义对称原理的条件,相应地,系统(7.1)的向量场具有过原点的对称轴;如果(7.10)式成立,则系统(7.3)和系统(7.1)均为 Hamilton 系统.

由定理 7.1~7.3 得

定理 7.4 系统(7.1)无穷远点为中心的充分必要条件是 $\delta=\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$.

定理 7.5 如果系统(7.1)右端系数满足条件

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{-1}{2}\varepsilon^{10+N}, \ B_{20} = \dfrac{-1}{4}\varepsilon^{6+N}, \ B_{11} = 0, \ B_{02} = \dfrac{-5}{22}\varepsilon^{N}, \\ A_{20} = -1 - \dfrac{33}{40}\varepsilon^3, \ A_{11} = 2, \ A_{02} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{11\sqrt{6}}{50}\varepsilon, \end{cases} \tag{7.11}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,如果 $N=0$,则无穷远点为4阶细焦点;如果 $N>0$,则无穷远点为中心. 此外,当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时,系统(7.1)在无穷远点充分小的邻域内恰有4个极限环,其位置分别在圆 $x^2+y^2=\varepsilon^{-k}$ 附近($k=1, 2, 3, 4$).

证 由定理 3.2 和 7.1 及(7.11)式得

$$\begin{cases} v_1(2\pi, \varepsilon) - 1 = -\pi\varepsilon^{10+N} + o(\varepsilon^{10+N}), \\ v_3(2\pi, \varepsilon) = \pi\varepsilon^{6+N} + o(\varepsilon^{6+N}), \quad v_5(2\pi, \varepsilon) = -\pi\varepsilon^{3+N} + o(\varepsilon^{3+N}), \\ v_7(2\pi, \varepsilon) = \pi\varepsilon^{1+N} + o(\varepsilon^{1+N}), \quad v_9(2\pi, \varepsilon) = -\pi\varepsilon^{N} + o(\varepsilon^{N}). \end{cases} \tag{7.12}$$

并且

$$a_{20}a_{11} - b_{20}b_{11} = O(\varepsilon^N), \ I_k = O(\varepsilon^N), \ k = 0, 1, 2, 3. \tag{7.13}$$

由(7.13)式与定理 4.3,当 $k>4$ 时有 $\nu_{2k+1}(2\pi, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$,由此得到分支函数

$$L(h, \varepsilon) = \pi(-\varepsilon^{10} + \varepsilon^6 h^2 - \varepsilon^3 h^4 + \varepsilon h^6 - h^8). \tag{7.14}$$

由(7.14)式及定理 6.6 即得结论.

参 考 文 献

1 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论. 上海: 上海科技出版社, 1995

2 安德罗诺夫 A A. 振动理论. 北京: 科学出版社, 1973

3 刘一戎, 李继彬. 论复自治微分系统的奇点量. 中国科学, A辑, 1989(3): 245~255

4 戈鲁别夫 B B. 微分方程解析理论讲义. 北京: 高等教育出版社, 1956

5 格列菲斯 P. 代数曲线. 北京: 北京大学出版社, 1985. 70~83

6 捷波塔辽夫 Н Г 著. 代数函数论. 夏定中, 戴执中译. 北京: 高等教育出版社, 1956. 257~267