



标准差准则下的最优再保险

宋立新^①, 黄玉洁^{②*}, 周娟^①

① 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024;

② 鞍山师范学院数学系, 鞍山 114005

E-mail: lxsong@dlut.edu.cn, huangyujie426@163.com, zhoujuan023411@163.com

收稿日期: 2010-06-07; 接受日期: 2011-03-02; * 通信作者

大连理工大学前沿交叉学科基金 (批准号: DUT10JS06) 和博士点基金 (批准号: 2010041110036) 资助项目

摘要 本文关注的是在标准差准则下如何进行再保险, 使得保险公司和再保险公司的风险波动达到最小. 在容许合约类范围内得到了建立最优再保险合约的充分条件. 如果再保险公司的风险小于一个给定阈值, 我们找到了使保险公司的风险最小的最优再保险合约. 在这里, 保险公司可以采取三种最一般且有效的风险措施.

关键词 再保险 标准差准则 总风险 上界 Lagrange 函数

MSC (2000) 主题分类 90B50, 90C27, 90C47, 91B06, 91B30

1 引言

再保险是直接的保险人作为客户将风险转移给第二个保险公司, 即再保险人承担风险. 这是分散风险的有效方法. 这里有一些涉及最优再保险问题的文献. Kaluszk^[1] 导出了均方差保费原则下的最优再保险策略. 对在 Wang 保费准则下导出的不同数学问题, Young^[2, 3] 研究了使保险公司的期望效用最大化的方案. 在 Gajek 和 Zagrodny 的论文 [4] 中, 对带有一些约束条件的合约容许类中任意风险的测量, 给出了最优再保险合约成立的充分条件. Kaluszk^[5] 研究的再保险问题是: 在优化准则为保险公司的自留风险在凸测度下最小或者使效用函数达到最大, 同时假设再保险公司就其承担的风险的保费的计算准则采用的是凸函数情况下的再保险问题. 我们注意到, 以上所有论文都只是关心保险人一方利益的最优策略. 本文的结论推广了文献 [4] 等仅考虑保险人单方风险的结果. 在标准差准则下, Cao 和 Zhang^[6] 研究了如何寻求再保险使得保险人和再保险人的加权总风险最优. 但是, 再保险人的风险是不能被具体限制的. 我们的研究结果在实践中更加有用, 因为再保险公司通常可以提供一个他可以容忍的风险上界.

令 Y 记给定时间段内的总索赔, P 是保险人准备付给再保险人的钱的数量. 假设 Y 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{S}, P_r)$ 上的非负随机变量, $F(y)$ 为 Y 的分布函数, 对任意 $y > 0$, $F(y) > 0$. 再保险合同依赖于 Y 的分配, 保险人承担 $\tilde{R}$, 其余的 R 由再保险人承担, 即

$$Y = \tilde{R} + R.$$

全文假设 R 是关于 Y 可测的函数, 记作 $R(Y)$, 保险人的风险由 $\tilde{R} = Y - R(Y)$ 确定. 显然, $0 \leq R(Y) \leq Y$, 同样, $0 \leq \tilde{R}(Y) \leq Y$, 记作 $R \in \mathfrak{R}(0, Y)$. 保险人付给再保险人的保费根据标准差准则计算

(安全负载参数 $\beta > 0$), 价格不能超过给定的极限价格 P , 且任意的 $R(Y)$ 满足

$$P \geqslant ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)},$$

且假设 $EY^2 < \infty$, 否则保费将趋于无穷大.

我们分别用 $\text{Var}R(Y)$ 和 $\text{Var}(Y - R(Y))$ 记相应的保险风险和再保险风险, 试图求解下面带约束的多目标优化问题:

$$\begin{cases} \min \text{Var}(Y - R(Y)), \\ \min \text{Var}R(Y), \\ \text{s.t.} \begin{cases} 0 \leqslant R(Y) \leqslant Y, \\ ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} \leqslant P. \end{cases} \end{cases} \quad (1.1)$$

通常情况下, 问题 (1.1) 是没有解的, 我们常常采用下面两种方法来处理这类问题, 即处理问题

$$\begin{aligned} & \min [\alpha \text{Var}(Y - R(Y)) + (1 - \alpha) \text{Var}R(Y)] \\ & \text{s.t.} \begin{cases} 0 \leqslant R(Y) \leqslant Y, \\ ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} \leqslant P, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $0 < \alpha < 1$, 或者

$$\begin{aligned} & \min \text{Var}(Y - R(Y)) \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \text{Var}R(Y) \leqslant L, \\ ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} \leqslant P, \\ 0 \leqslant R(Y) \leqslant Y. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

这里 L 可以认为是再保险风险的上界. Cao 和 Zhang 在 [6] 中已经研究了问题 (1.2), 他们是在一般混合风险测度下研究的保险和再保险的加权风险和达到最小的问题.

第 2 节是求解问题 (1.3), 首先, 证明它有以下形式的解 R_1^* ,

$$R_1^*(y) = (1 - r)(y - M)_+, \quad (1.4)$$

其中常数 $M > 0$ 且比例分保系数 $r \in [0, 1)$, 它们由系统方程 (2.5), (2.6) 和不等式 (2.7) 的解确定. 接着给出了在类 $\mathfrak{R}(0, Y)$ 中的最优合约的一个充分条件, 关于最优解的证明方法是对方差和约束函数的 Gâteaux 微分应用 Lagrange 乘数法. 最后给出了 $R_1^*(Y)$ 随 L 变化时的数值算例.

第 3 节研究了非对称风险测度, 因为如果 $Y - R(Y)$ 超出它的期望值时通常会更加危险, 所以用 $E[(Y - R(Y) - E(Y - R(Y)))_+]^2$ (其中 $x_+ = \max(0, x)$) 度量保险风险, 为了解决问题

$$\begin{aligned} & \min E[(Y - R(Y) - E(Y - R(Y)))_+]^2 \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \text{Var}R(Y) \leqslant L, \\ ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} \leqslant P, \\ 0 \leqslant R(Y) \leqslant Y, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

我们采用次梯度方法得到 (1.5) 的如下形式的解 R_2^* :

$$R_2^*(y) = (1-r)(y-M)_+, \quad (1.6)$$

其中变换损失点 $M \geq EY$ 和分保系数 $r \in (0,1)$ 由使 (3.5) 和 (3.6) 非负的系统方程 (2.5), (2.6) 的解确定.

第 4 节推导了绝对偏差风险测度 $\rho_1(R) = E|Y - R(Y) - E(Y - R(Y))|$ 下的最优再保险合同. 因为 $\rho_1(R) = 2\rho_1^+(R)$, 这种情况相应于非对称风险测度 $\rho_1^+(R)$, 由 $E[Y - R(Y) - E(Y - R(Y))]_+$ 定义. 因此上面的两种风险测度的最优合约相同, 具有形式

$$R_3^*(y) = (y \wedge M - m)_+, \quad (1.7)$$

其中 $0 < m < M$.

第 5 节, 我们得到 3 种风险测度的比较的结果和期望计算准则下的一些结论.

2 方差风险测度情形

设 $\mathfrak{R} = \{R(Y) : ER^2(Y) < +\infty\}$, 显然 $\mathfrak{R}$ 是 Hilbert 空间, 内积 $\langle R_1(Y), R_2(Y) \rangle = E[R_1(Y), R_2(Y)]$. 定义函数 $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $V : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$g(R) = ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} - P, \quad h(R) = \text{Var}R(Y) - L, \quad V(R) = \text{Var}(Y - R(Y)).$$

上述函数均为凸函数 (参见文献 [7]) 且 Gâteaux 可微 (参见文献 [8]). 对任意 $H \in \mathfrak{R}$, g, h, V 在 $R^* \in \mathfrak{R}$ 的 Gâteaux 微分为:

$$\nabla g(R^*)(H) = EH(Y) + \beta \frac{ER^*(Y)H(Y) - ER^*(Y)EH(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}}, \quad (2.1)$$

$$\nabla h(R^*)(H) = 2ER^*(Y)H(Y) - 2ER^*(Y)EH(Y), \quad (2.2)$$

$$\nabla V(R^*)(H) = -2E(Y - R^*(Y))H(Y) + 2E(Y - R^*(Y))EH(Y). \quad (2.3)$$

定义子集 $C \subseteq \mathfrak{R}$ 为

$$C = \{R(Y) \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq R(y) \leq y, \forall y \geq 0\}.$$

显然 C 是一个凸集 (参见文献 [8]). 我们的目的是在集合 $M_{\leq} = \{R \in \mathfrak{R} \mid g(R) \leq 0, h(R) \leq 0, R \in C\}$ 中将 $V(\cdot)$ 最小化, 这是一个非线性约束优化问题, 利用 Lagrange 函数

$$L_{\lambda}(R) = V(R) + \lambda g(R) + \mu h(R) + \Psi_c(R) \quad (2.4)$$

求解, 其中 λ, μ 是 Lagrange 乘子, $\Psi_c : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 为

$$\Psi_c(R) = \begin{cases} 0, & R \in C, \\ +\infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

下面的引理说明: 基于文献 [8] 的假设, 在集合 $M_{\leq}$ 上将 $V(\cdot)$ 最小化等价于 L_{λ} 关于参数 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 的不带约束的优化问题.

引理 1 令 $R^* \in C$, $\lambda \geq 0$ 和 $\mu \geq 0$ 使得

$$(i) \lambda g(R^*) = 0,$$

$$(ii) \mu h(R^*) = 0,$$

$$(iii) L_\lambda(R) \geq L_\lambda(R^*), \forall R \in \mathfrak{R}.$$

那么 R^* 使 $V(\cdot)$ 在集合 $M_{\leq} = \{R \in \mathfrak{R} \mid g(R) \leq 0, h(R) \leq 0, R \in C\}$ 上取最小值, 它也使 $V(\cdot)$ 在 $M_{=} = \{R \in \mathfrak{R} \mid g(R) = 0, h(R) = 0, R \in C\}$ 上取最小值.

证明 注意到对任意的 $R \in \mathfrak{R}$, 由 (i)–(iii) 知,

$$V(R^*) = L_\lambda(R^*) \leq L_\lambda(R).$$

如果 $R \in M_{\leq}$, 那么 $L_\lambda(R) \leq V(R)$, 因此 $V(R^*) \leq V(R)$, $R \in M_{\leq}$.

虽然引理 1 看起来非常简单, 难点是如何找到 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 使得 (iii) 成立. 为了证明 λ 和 μ 存在, 我们假设存在 $M \geq 0$, $r \in (0, 1)$ 使下面的条件成立:

$$(1-r)(E(Y-M)_+ + \beta\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}) = P, \quad (2.5)$$

$$(1-r)^2 \text{Var}(Y-M)_+ = L, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{1-r} \left[r - \frac{\beta E(M-Y)_+}{2\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}} \right] \geq 0, \quad (2.7)$$

其中 $E(Y-M)_+ = \int_{[M, \infty)} (y-M) dF$, $\text{Var}(Y-M)_+ = \int_{[M, \infty)} (y-M)^2 dF - (\int_{[M, \infty)} (y-M) dF)^2$, $E(M-Y)_+ = \int_{[0, M)} (M-y) dF$.

当方程 (2.5) 和 (2.6) 的解 (M, r) 存在时, 又产生了一个问题, 即 M 和 r 必须满足 (2.7). 下面的命题对解决这个问题非常有用.

假设 $\tau = \inf\{M : P_r(Y > M) = 0\}$. 易见函数 $\text{Var}(Y-M)_+$ 是连续可导的, 因此对 $M < \tau$ 有

$$\frac{d\text{Var}(Y-M)_+}{dM} = -2F(M)E(Y-M)_+ < 0,$$

这暗示着 $\text{Var}(Y-M)_+$ 是 M 的减函数, 并且 $\lim_{M \rightarrow \tau} \text{Var}(Y-M)_+ = 0$. 由于 $\text{Var}Y > L$, 那么存在唯一的实数 $M_0 \geq 0$ 使得 $\text{Var}(Y-M_0)_+ = L$. 注意到 (2.6) 暗含 $r < 1$, 且 $M = M_0$ 时 $r = 0$, 因此可得

$$r = r(M) = 1 - \sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y-M)_+}}, \quad M \in (0, M_0]. \quad (2.8)$$

由 (2.7) 和 (2.8) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-r} \left[1 - \frac{\sqrt{L} + \beta E(M-Y)_+}{\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}} \right] \\ &= \frac{1}{(1-r)\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}} [\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+} - \beta E(M-Y)_+ - \sqrt{L}]. \end{aligned}$$

记 $H(M) = \sqrt{\text{Var}(Y-M)_+} - \beta E(M-Y)_+ - \sqrt{L}$. 易知 $H(M)$ 是 M 的连续减函数. 因为 $H(0) = \sqrt{\text{Var}Y} - \sqrt{L} > 0$ 且 $\lim_{M \rightarrow \tau} H(M) < 0$, 我们得到唯一实数解 M_1 使得 $H(M_1) = 0$. 如果 $M < M_1$, 我们有 $H(M) > 0$, 这表明 (2.7) 成立. 注意到 (2.5), (2.6) 等价于

$$\frac{E(Y-M)_+ + \beta\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}}{\sqrt{\text{Var}(Y-M)_+}} = \frac{P}{\sqrt{L}}, \quad (2.9)$$

$$1 - r = \sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}}.$$

记 $\widetilde{M} = \min\{M_0, M_1\}$, 那么对任意的 $M < \widetilde{M}$, 有 $r > 0$ 且 (2.7) 成立. 如果 (2.9) 在 $(0, \widetilde{M})$ 内有一个解, 系统方程 (2.5) 和 (2.6) 在 $(0, \widetilde{M}) \times [0, 1)$ 内有一个解 (M, r) , 其中 r 对应式 (2.8) 的 M . 下面的命题可以证明这个事实.

命题 1 设 $P > 0$, $\text{Var}Y > L$, 且

$$\frac{P}{\sqrt{L}} < \frac{\text{E}Y + \beta\sqrt{\text{Var}Y}}{\sqrt{\text{Var}Y}}, \quad (2.10)$$

$$\frac{P}{\sqrt{L}} > \inf_{0 < M \leq \widetilde{M}} \left[\frac{\text{E}(Y - M)_+ + \beta\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}}{\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}} \right]. \quad (2.11)$$

那么存在实数 $M > 0$ 和 $r \in (0, 1)$ 满足 (2.5)–(2.7).

证明 注意到 (2.9) 等价于

$$K(M) \triangleq \sqrt{L}\text{E}(Y - M)_+ + (\beta\sqrt{L} - P)\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+} = 0, \quad (2.12)$$

由 (2.10) 我们有 $K(0) = \sqrt{L}\text{E}Y + (\beta\sqrt{L} - P)\sqrt{\text{Var}Y} > 0$, 并且由 (2.11) 有 $\inf_{0 \leq M \leq \widetilde{M}} \sqrt{L}\text{E}(Y - M)_+ + (\beta\sqrt{L} - P)\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+} < 0$. 由于 $K(M)$ 是连续的, 那么存在 $M \in (0, \widetilde{M})$ 使得 $K(M) = 0$, 即 (2.9) 有解 M 使 $M \in (0, \widetilde{M})$. 证毕.

注 1 (2.10) 暗示 $\text{E}Y + \beta\sqrt{\text{Var}Y} > \sqrt{\text{Var}Y} \cdot \frac{P}{\sqrt{L}} > \sqrt{L} \cdot \frac{P}{\sqrt{L}} = P$, 即保险人付给再保险人的钱要少于他收取的保费, 这是合情合理的. 至于 (2.11), 通常 $F(0)(\frac{\text{E}Y}{\sqrt{\text{Var}Y}})^2 < 1 - F(0)$ 成立, 例如 $F(0) = 0$, 因此 (2.11) 合理.

定理 1 假设 $P > 0$, $\text{Var}Y > L > 0$, 并且存在 $M > 0$, $r \in [0, 1)$ 满足 (2.5)–(2.7), 那么由 (1.4) 定义的 $R_1^*(y)$ 是问题 (1.3) 的解 (即它是在约束 $\text{Var}R(Y) \leq L$, $\text{E}R(Y) + \beta\text{D}R(Y) \leq P$ 和 $0 \leq R(Y) \leq Y$ 下保险人的最优再保险安排).

证明 首先, 观察到 $P_r(Y > M) > 0$, 否则, (2.5) 导致矛盾. 根据 (2.7) 和 $\text{Var}(Y - M)_+ > 0$, 定义

$$\lambda = 2\text{E}(M - Y)_+ \geq 0, \quad (2.13)$$

$$\mu = \frac{1}{1 - r} \left[r - \frac{\beta\text{E}(M - Y)_+}{\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}} \right] \geq 0. \quad (2.14)$$

我们验证引理 1 成立的条件 (i) 和 (ii). 由 (2.5) 和 (2.6),

$$g(R_1^*) = (1 - r)[\text{E}(Y - M)_+ + \beta\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}] - P = 0,$$

$$h(R_1^*) = (1 - r)^2\text{Var}(Y - M)_+ - L = 0,$$

因此 $\lambda g(R_1^*) = 0$, $\mu h(R_1^*) = 0$. 为了检验条件 (iii) 是否成立, 我们只需考虑 $R \in C$, 否则 $\Psi_c(R) = +\infty$, (iii) 显然成立. 由 R_1^* 的定义,

$$R(y) - R_1^*(y) \geq 0 \quad \text{对任意的 } 0 \leq y \leq M. \quad (2.15)$$

由于 $R_1^* \in C$ 和 $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, 对于任何点 $R \in C$ 的方向, L_λ 在 R_1^* 处可导, 方向导数等于 $[\nabla V(R_1^*) + \lambda \nabla g(R_1^*) + \mu \nabla h(R_1^*)](R - R_1^*)$. 作为三个凸函数的和, L_λ 在 C 上也是凸的. 因此, 对任意的 $R \in C$,

我们有

$$\begin{aligned}
 & L_{\lambda}(R) - L_{\lambda}(R_1^*) \\
 & \geq \nabla V(R_1^*)(R - R_1^*) + \lambda \nabla g(R_1^*)(R - R_1^*) + \mu \nabla h(R_1^*)(R - R_1^*) \\
 & = -2E(Y - R_1^*(Y))(R(Y) - R_1^*(Y)) + 2E(Y - R_1^*(Y))E(R(Y) - R_1^*(Y)) \\
 & \quad + \lambda E(R(Y) - R_1^*(Y)) + \lambda \beta \frac{ER_1^*(Y)(R(Y) - R_1^*(Y)) - ER_1^*(Y)E(R(Y) - R_1^*(Y))}{\sqrt{\text{Var}R_1^*(Y)}} \\
 & \quad + \mu[2ER_1^*(Y)(R(Y) - R_1^*(Y)) - 2ER_1^*(Y)E(R(Y) - R_1^*(Y))] \\
 & = -2 \left\{ \int_{[0,\infty)} [y - R_1^*(y)][R(y) - R_1^*(y)]dF - \int_{[0,\infty)} [y - R_1^*(y)]dF \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \right\} \\
 & \quad + \lambda \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \\
 & \quad + \lambda \beta \frac{\int_{[0,\infty)} R_1^*(y)[R(y) - R_1^*(y)]dF - \int_{[0,\infty)} R_1^*(y)dF \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF}{\sqrt{\int_{[0,\infty)} (R_1^*(y))^2 dF - (\int_{[0,\infty)} R_1^*(y)dF)^2}} \\
 & \quad + 2\mu \left\{ \int_{[0,\infty)} R_1^*(y)[R(y) - R_1^*(y)]dF - \int_{[0,\infty)} R_1^*(y)dF \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \right\} \\
 & = -2 \int_{[0,M)} y[R(y) - R_1^*(y)]dF - 2 \int_{[M,\infty)} [y - (1-r)(y-M)][R(y) - R_1^*(y)]dF \\
 & \quad + 2 \left\{ \int_{[0,M)} ydF + \int_{[M,\infty)} [y - (1-r)(y-M)]dF \right\} \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \\
 & \quad + \lambda \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF + \lambda \beta \frac{\int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)[R(y) - R_1^*(y)]dF}{(1-r)\sqrt{\int_{[M,\infty)} (y-M)^2 dF - (\int_{[M,\infty)} (y-M)dF)^2}} \\
 & \quad - \lambda \beta \frac{\int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)dF \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF}{(1-r)\sqrt{\int_{[M,\infty)} (y-M)^2 dF - (\int_{[M,\infty)} (y-M)dF)^2}} \\
 & \quad + 2\mu \left\{ \int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)[R(y) - R_1^*(y)]dF \right. \\
 & \quad \left. - \int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)dF \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \right\} \\
 & = 2 \int_{[0,M)} (M-y)[R(y) - R_1^*(y)]dF + \left\{ 2 \left[-M + \int_{[0,M)} ydF \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_{[M,\infty)} [y - (1-r)(y-M)]dF - \mu \int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)dF \right] \right. \\
 & \quad \left. - \lambda \beta \frac{\int_{[M,\infty)} (1-r)(y-M)dF}{(1-r)\sqrt{\int_{[M,\infty)} (y-M)^2 dF - (\int_{[M,\infty)} (y-M)dF)^2}} + \lambda \right\} \cdot \int_{[0,\infty)} [R(y) - R_1^*(y)]dF \\
 & \quad + \int_{[M,\infty)} \left\{ 2[M-y + (1-r)(y-M) + \mu(1-r)(y-M)] \right. \\
 & \quad \left. + \lambda \beta \frac{(1-r)(y-M)}{(1-r)\sqrt{\int_{[M,\infty)} (y-M)^2 dF - (\int_{[M,\infty)} (y-M)dF)^2}} \right\} \cdot [R(y) - R_1^*(y)]dF \\
 & = 2 \int_{[0,M)} (M-y)[R(y) - R_1^*(y)]dF,
 \end{aligned}$$

表 1 约束优化问题 (1.3)

L	$M (\times 10^8 \text{ USD})$	r	$R_2(Y) (\times 10^8 \text{ USD})$
1.0	0.58389501	0.6453	$0.3547(Y - 0.58389501)_+$
1.5	1.49583700	0.5505	$0.4495(Y - 1.49583700)_+$
2.0	2.19884220	0.4520	$0.5480(Y - 2.19884220)_+$
2.5	2.78647780	0.3483	$0.6517(Y - 2.78647780)_+$
3.0	3.29693488	0.2392	$0.7608(Y - 3.29693488)_+$
3.5	3.75104682	0.1246	$0.8754(Y - 3.75104682)_+$

由式 (2.1)–(2.3) 知第一个方程成立, 鉴于式 (2.13) 和 (2.14), 最后一个方程成立. 现在由 (2.15), 我们最终得到 $L_\lambda(R) - L_\lambda(R_1^*) \geq 0, \forall R \in \mathfrak{R}$, 因此引理 1 的条件 (iii) 满足. 证毕.

由类似的方法可以得到 $R_1^*(y) = \alpha y$ 是下述问题的解:

$$\begin{aligned} \min & \text{Var}(Y - R(Y)) \\ \text{s.t. } & \text{Var}R(Y) \leq L, \end{aligned}$$

这是对应的比例再保险 (参见文献 [9]).

例 1 假设 Y 服从参数为 $\alpha_1 = 2, \lambda_1 = \frac{1}{2}$ 的 Γ 分布, 即 Y 的概率密度函数是 $f_Y(y) = \frac{1}{4}ye^{-\frac{1}{2}y}, y > 0$, 那么有 $F(0) = 0, EY = 4 \times 10^8 \text{ USD}, \text{Var}(Y) = 8 \times 10^8 \text{ USD}$, 令 $\beta = 0.2, P = \sqrt{2} \times 10^8 \text{ USD}$, 我们下面的数值解 (见表 1).

3 半方差风险测度情形

由于 $E[(Y - R(Y) - E(Y - R(Y)))_+]^2$ 不光滑, 这就不能计算它的 Gâteaux 微分. 为了解这个问题, 我们借助于次梯度. 我们定义 $R: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ 满足对任意的 $y \geq 0$ 使不等式 $R_1(y) \leq R(y) \leq R_2(y)$ 成立的所有可测函数 R 的类为 $\mathfrak{R}(R_1, R_2)$, 且 $\mathfrak{R}_0$ 由边界函数 $R_1(y) \equiv 0$ 和 $R_2(y) \equiv y$ 定义. 集 R 是 $\mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 上的可测合约函数. 令 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为可测损害函数. 选择了 φ , 我们定义风险测度 $\rho(R)$ 作为期望损害, 即 $\rho(R) = E\varphi(Y - R(Y) - E(Y - R(Y)))$. 同时, 我们作如下假设:

(A) $EY < \infty$, (B) $ER_1^2 < \infty$ 且 $ER_2^2 < \infty$, (C) $E\varphi[Y - R(Y) - E(Y - R(Y))] < \infty, \forall R \in \mathfrak{R}(R_1, R_2)$. $s(\cdot)$ 记来自 $\partial\varphi(t)$ 的次梯度且 $s(\cdot) = s_\varphi(y - R^*(y) - E(Y - R^*(Y)))$. 设

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \infty)} [\varphi(y - R(y) - E(Y - R(Y))) - \varphi(y - R^*(y) - E(Y - R^*(Y)))] dF(y) \\ & \geq \int_{[0, \infty)} s^*(y) [-(R(y) - R^*(y)) + E(R(Y) - R^*(Y))] dF(y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

(参见文献 [4]). 现在我们给出 φ 满足 (3.1) 而不满足凸时的一般结果.

定理 2 设 $s^*(y)$ 在 $R^* \in \mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 满足 (3.1), 使得 $\sqrt{\text{Var}R^*(Y)} > 0$. 如果 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, s^*(y)$ 和 $R^*: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ 满足

(i) 对任意的 $y \geq 0, R^*(y) = R_1(y)$,

$$\lambda - s^*(y) + Es^*(Y) - \lambda\beta \frac{ER^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_1(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} - 2\mu ER^*(Y) + 2\mu R_1(y) \geq 0;$$

(ii) 对任意的 $y \geq 0$, $R^*(y) = R_2(y)$,

$$\lambda - s^*(y) + \mathbb{E}s^*(Y) - \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_2(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} - 2\mu\mathbb{E}R^*(Y) + 2\mu R_2(y) \leq 0;$$

(iii) 对任意的 $y \geq 0$, $R_1(y) < R^*(y) < R_2(y)$,

$$\lambda - s^*(y) + \mathbb{E}s^*(Y) - \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R^*(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} - 2\mu\mathbb{E}R^*(Y) + 2\mu R^*(y) = 0;$$

(iv) $g(R^*) = \mathbb{E}R^* + \beta\sqrt{\text{Var}R^*} - P \leq 0$, $\lambda g(R^*) = 0$, $h(R^*) = \text{Var}R^* - L \leq 0$, $\mu h(R^*) = 0$.

那么, 在约束 $\mathbb{E}R + \beta\sqrt{\text{Var}R} \leq P$ 和 $\text{Var}R \leq L$ 下, R^* 在容许类 $\mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 中使 $\rho(R) = \mathbb{E}\varphi[Y - R(Y) - \mathbb{E}(Y - R(Y))]$ 取最小值.

证明 对固定的 $\lambda \geq 0$ 和 $\mu \geq 0$, 考虑 Lagrange 函数

$$L_\lambda(R) = \rho(R) + \lambda g(R) + \mu h(R). \quad (3.2)$$

由引理 1 易见, 当 $R^* \in \mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 使 $L_\lambda(R)$ 在类 $\mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 中最小时, $R^* \in \mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 使 $\rho(R)$ 在类 $\mathfrak{R}(R_1, R_2)$ 中最小.

由于 $g(R)$ 和 $h(R)$ 是凸光滑的, 由 (2.1), (2.2), (3.1) 和 (3.2) 我们得到

$$\begin{aligned} & L_\lambda(R) - L_\lambda(R^*) \\ & \geq \int_{[0, \infty)} [\varphi(y - R(y) - \mathbb{E}(Y - R(Y))) - \varphi(y - R^*(y) - \mathbb{E}(Y - R^*(Y)))] dF(y) \\ & \quad + \lambda \nabla g(R^*)(R - R^*) + \mu \nabla h(R^*)(R - R^*) \\ & \geq \int_{[0, \infty)} s^*(y) [-(R(y) - R^*(y)) + \mathbb{E}(R(Y) - R^*(Y))] dF \\ & \quad + \lambda \mathbb{E}(R(Y) - R^*(Y)) + \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)(R(Y) - R^*(Y)) - \mathbb{E}R^*(Y)\mathbb{E}(R(Y) - R^*(Y))}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} \\ & \quad + 2\mu [\mathbb{E}R^*(Y)(R(Y) - R^*(Y)) - \mathbb{E}R^*(Y)\mathbb{E}(R(Y) - R^*(Y))] \\ & = \int_{[0, \infty)} s^*(y) [-(R(y) - R^*(y)) + \mathbb{E}(R(Y) - R^*(Y))] dF \\ & \quad + \lambda \mathbb{E}[R(Y) - R^*(Y)] + \frac{\lambda\beta}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} \int_{[0, \infty)} (R^*(y) - \mathbb{E}R^*(Y))(R(y) - R^*(y)) dF \\ & \quad + 2\mu \int_{[0, \infty)} (R^*(y) - \mathbb{E}R^*(Y))(R(y) - R^*(y)) dF \\ & = \int_{\{y \geq 0 | R^*(y) = R_1(y)\}} \left[\lambda - s^*(y) + \mathbb{E}s^*(Y) - \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_1(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} \right. \\ & \quad \left. - 2\mu\mathbb{E}R^*(Y) + 2\mu R_1(y) \right] [R(y) - R_1(y)] dF \\ & \quad + \int_{\{y \geq 0 | R_1(y) < R^*(y) < R_2(y)\}} \left[\lambda - s^*(y) + \mathbb{E}s^*(Y) - \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R^*(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} \right. \\ & \quad \left. - 2\mu\mathbb{E}R^*(Y) + 2\mu R^*(y) \right] [R(y) - R^*(y)] dF \\ & \quad + \int_{\{y \geq 0 | R^*(y) = R_2(y), R_1(y) < R_2(y)\}} \left[\lambda - s^*(y) + \mathbb{E}s^*(Y) - \lambda\beta \frac{\mathbb{E}R^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_2(y)}{\sqrt{\text{Var}R^*(Y)}} \right. \end{aligned}$$

$$-2\mu ER^*(Y) + 2\mu R_2(y) \Big] [R(y) - R_2(y)] dF.$$

易见第一个积分是非负的, 因为 (i) 和 $R(y) \geq R_1(y)$ 都成立, $y \in \{y \geq 0 \mid R^*(y) = R_1(y)\}$; 最后一个积分是非负的, 由于 (ii) 和 $R(y) \leq R_2(y)$ 成立, $y \in \{y \geq 0 \mid R^*(y) = R_2(y), R_1(y) < R_2(y)\}$; 第二个积分等于 0 是因为 (iii) 成立, $y \in \{y \geq 0 \mid R_1(y) < R^*(y) < R_2(y)\}$. 从而 $L_\lambda(R) - L_\lambda(R^*) \geq 0$ 且 R^* 是 $L_\lambda(\cdot)$ 在 $\Re(R_1, R_2)$ 中的最小值点. 证毕.

当损害函数 $\varphi(t) = (t_+)^2$, $\rho(R) = E[Y - R(Y) - E(Y - R(Y))]_+^2$ 时, 我们将证明 (1.6) 中定义的变换损失合约 R_2^* 是 $\Re(0, y)$ 上半方差风险测度下的最优解.

定理 3 假设 $P, L, \beta > 0$, $\text{Var}Y > L$, 系统方程 (12) 和 (13) 有解 (M, r) , 且

$$\frac{P}{\sqrt{L}} < \frac{E(Y - EY)_+ + \beta\sqrt{\text{Var}(Y - EY)_+}}{\sqrt{\text{Var}(Y - EY)_+}}, \quad (3.3)$$

$$E(Y - M)_- - E(Y - EY)_+ + 2(1 - r) \leq \frac{r\sqrt{L}}{\beta(1 - r)}. \quad (3.4)$$

那么由 (1.6) 中定义的变换损失合约 R_2^* 是 $\Re(0, y)$ 上半方差风险测度下的最优解 (即 R_2^* 是问题 (1.5) 的解).

证明 根据命题 1 的证明, 我们知道系统方程 (2.5) 和 (2.6) 有解 (M, r) , 在 (3.3) 的条件下易推出 $M \geq EY$, 由 (2.12) 知 $K(EY) > 0$.

定义函数 $Q: [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 和 λ, μ 如下:

$$Q(r, M) = E(Y - R^*(Y)) = \int_{[0, M]} (y - M) dF + r \int_{(M, \infty)} (y - M) dF + M, \\ \lambda = 2[E(Y - M)_+ - E(Y - Q(r, M))_+ + M - Q(r, M)], \quad (3.5)$$

$$\mu = \frac{1}{1 - r} \left[r - \frac{\beta\lambda}{2\sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}} \right]. \quad (3.6)$$

现在我们在 (3.4) 条件下来证明 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$. 由

$$E(Y - Q(r, M))_+ = E \left[Y - EY + \sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} E(Y - M)_+ \right]_+ \\ \in \left[E(Y - EY)_+ - \sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} E(Y - M)_+, \right. \\ \left. E(Y - EY)_+ + \sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} E(Y - M)_+ \right],$$

有

$$\lambda = 2 \left[\sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} E(Y - M)_+ + E(Y - M)_- - E(Y - Q(r, M))_+ \right] \\ \in \left[2(E(Y - M)_- - E(Y - EY)_+), 2 \left(E(Y - M)_- - E(Y - EY)_+ + 2\sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} \right) \right]. \quad (3.7)$$

一方面, 由于 $M \geq EY$, $E(Y - EY)_+ = E(Y - EY)_-$ 且 $E(Y - M)_-$ 是 M 的非降函数, 我们得到

$\lambda \geq 0$. 另一方面, 根据 (2.6) 和 (3.4), 有

$$E(Y - M)_- - E(Y - EY)_+ + 2\sqrt{\frac{L}{\text{Var}(Y - M)_+}} \leq \frac{r}{\beta} \sqrt{\text{Var}(Y - M)_+}.$$

由 (3.5), 我们最终得到

$$\lambda \leq \frac{2r}{\beta} \sqrt{\text{Var}(Y - M)_+},$$

这表明 $\mu \geq 0$. 所以定理 2 的假设 (iv) 满足.

现在我们验证定理 2 成立的条件 (i) 和 (iii) (由于任意的 $y \geq 0$, $R_2(y) \neq y$ 成立, (ii) 不必再证了). 定义

$$s_1^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq E(Y - R_2^*(Y)), \\ 2[y - R_2^*(y) - E(Y - R_2^*(Y))], & y > E(Y - R_2^*(Y)), \end{cases}$$

且 $s_1^*(y)$ 满足 (3.1) (参见文献 [4]). 于是

$$\begin{aligned} Es_1^*(Y) &= 2 \int_{(Q(r, M), \infty)} (y - Q(r, M)) dF + 2 \int_{[M, \infty)} (y - (1 - r)(y - M) - Q(r, M)) dF \\ &= 2 \left[\int_{(Q(r, M), \infty)} (y - Q(r, M)) dF - ER_2^*(Y) \right]. \end{aligned}$$

因此, 对于 $y > M$, 由 (3.5) 和 (3.6),

$$\begin{aligned} \lambda - s_1^*(y) + Es_1^*(Y) - \lambda\beta \frac{ER_2^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R_2^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_2^*(y)}{\sqrt{\text{Var}R_2^*(Y)}} - 2\mu ER_2^*(Y) + 2\mu R_2^*(y) \\ = \lambda - 2[y - R_2^*(y) - Q(r, M)] + 2 \left[\int_{(Q(r, M), \infty)} (y - Q(r, M)) dF - ER_2^*(Y) \right] \\ - \lambda\beta \frac{ER_2^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R_2^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_2^*(y)}{\sqrt{\text{Var}R_2^*(Y)}} - 2\mu ER_2^*(Y) + 2\mu R_2^*(y) \\ = \lambda - 2y + 2(1 - r)(y - M) + 2Q(r, M) \\ + 2 \int_{(Q(r, M), \infty)} (y - Q(r, M)) dF - 2(1 - r) \int_{[M, \infty)} (y - M) dF \\ - \lambda\beta \frac{\int_{[M, \infty)} (y - M) dF}{\sqrt{\int_{[M, \infty)} (y - M)^2 dF - (\int_{[M, \infty)} (y - M) dF)^2}} \\ + \lambda\beta \frac{y - M}{\sqrt{\int_{[M, \infty)} (y - M)^2 dF - (\int_{[M, \infty)} (y - M) dF)^2}} \\ - 2\mu(1 - r) \int_{[M, \infty)} (y - M) dF + 2\mu(1 - r)(y - M) \\ = 0. \end{aligned}$$

所以 (iii) 满足. 又由于 $y \geq M$, $s_1^*(M) \leq s_1^*(y)$ 成立, 所以假设 (i) 也满足. 因此定理 3 的证明完成.

注 2 条件 (3.4) 是充分非必要条件 (参见例 2). (3.4) 在一些可行性假设下成立. 一般说来, (3.4) 在 β 不太大时成立, 这样可使 M 不太大, r 不太小.

用类似的方法, 我们可以证明 $R_2^*(y)$ 也是下述问题的解:

$$\begin{aligned} & \min E[(Y - R(Y) - E(Y - R(Y)))_+]^2 \\ & \text{s.t. } \text{Var}R(Y) \leq L. \end{aligned}$$

例 2 设 Y 与例 1 有相同的分布, 令 $\beta = 0.5$, $P = L = 1.0 \times 10^8$ USD, 得 $M = 4.2255 > 4 = EY$, $r = 0.4972$ 确定唯一的最优变换损失合约 $R_2^*(y)$. 这里还得到 $\lambda = 0.1382 > 0$, $\mu = 0.9545 > 0$. 令 $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P = 2.0 \times 10^8$ USD, $L = 3.0 \times 10^8$ USD, 有 $M = 4.7287$, $r = 0.0552$, $\lambda = 0.0549$, $\mu = 0.0473$, 这里 M , r 也确定了唯一的最优变换损失合约 $R_2^*(y)$. 注意到前面的例子满足条件 (3.4), 但后者不满足. 因此我们知道条件 (3.4) 是充分非必要的.

4 L_1 风险测度情形

本节将推导保险人在风险测度

$$\rho_1 \triangleq E|Y - R(Y) - E(Y - R(Y))|$$

下最优合约的显式表达式, 也是非对称风险测度

$$\rho_1^+ \triangleq E[Y - R(Y) - E(Y - R(Y))]_+$$

下的最优合约的显示表达式, 因为 $\rho_1^+ = \frac{1}{2}\rho_1$. 进而, 我们将证明由 (1.7) 定义的最优解 $R_3^*(y)$ 总成立.

设 $F(y)$ 是 $[0, \tau]$ 上的严格增函数. 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(m, M) : 0 < m < M < \tau < \infty\}, \\ \mathcal{D} &= \{(P, L) : P = ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}, L = \text{Var}R_3^*(Y); 0 < m < M < \tau < \infty\}. \end{aligned}$$

那么 $(ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}, \text{Var}R_3^*(Y))$ 可以看作从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{D}$ 的映射. 由方差的定义,

$$(ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}, \text{Var}R_3^*(Y))$$

是到 $(ER_3^*(Y), E(R_3^*(Y))^2)$ 的一一映射. 如果向量值函数 $(ER_3^*(Y), E(R_3^*(Y))^2)$ 是 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 之间的一一映射, 那么存在 $M > m > 0$ 使得 $ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)} = P$, $\text{Var}R_3^*(Y) = L$.

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial ER_3^*(Y)}{\partial M} &= \frac{\partial E(Y \wedge M - m)_+}{\partial M} = P_r(Y > M), & \frac{\partial ER_3^*(Y)}{\partial m} &= -P_r(Y > m), \\ \frac{\partial (ER_3^*(Y))^2}{\partial M} &= 2(M - m)P_r(Y > M), & \frac{\partial (ER_3^*(Y))^2}{\partial m} &= -2E(Y \wedge M - m)_+, \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} P_r(Y > M) & -P_r(Y > m) \\ 2(M - m)P_r(Y > M) & -2E(Y \wedge M - m)_+ \end{vmatrix} \\ &= 2P_r(Y > M)[P_r(Y > M)(M - m) - E(Y \wedge M - m)_+] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2P_r(Y > M)[P_r(Y > M)(M - m) + P_r(m < Y \leq M)(M - m) - E(Y \wedge M - m)_+] \\
 &= 2P_r(Y > M) \left[P_r(m < Y \leq M)(M - m) - \int_{(m, M]} (y - m) dF \right].
 \end{aligned}$$

由于 $(m, M) \in \mathcal{B}$, 易知 $J > 0$. 注意到 $\mathcal{B}$ 是开的凸集, 所以向量值函数 $(ER_3^*(Y), E(R_3^*(Y))^2)' = (E((Y \wedge M - m)_+), E((Y \wedge M - m)_+)^2)'$ 是一一映射. 从而向量值函数

$$\begin{aligned}
 H(m, M) &= (H_1(m, M), H_2(m, M))' \\
 &= (E((Y \wedge M - m)_+) + \beta \sqrt{\text{Var}((Y \wedge M - m)_+)}, \text{Var}((Y \wedge M - m)_+))'
 \end{aligned}$$

是对应 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 之间的一一映射, 进而, $H(m, M)$ 有反函数的导数.

显然, $\mathcal{D}$ 是有界集合. 现在我们来讨论 $\mathcal{D}$ 的边界. 设 $B_1 = \overline{\mathcal{B}} \cap \{M = m\}$, $B_2 = \overline{\mathcal{B}} \cap \{m = 0\}$, $B_3 = \overline{\mathcal{B}} \cap \{M = \tau\}$, 于是我们有 $H(B_1) = \{(0, 0)\}$, $H(0, \tau) = (EY + \beta \sqrt{\text{Var}Y}, \text{Var}Y) \triangleq (\tilde{P}, \tilde{L})$. 假设 $H(m, M) : B_2 \rightarrow \varphi_1(L)$, 其中 $\varphi_1(L)$ 是 $\mathcal{D}$ 的边界曲线. 通过下面的分析可知 $\varphi_1(L)$ 是增函数. 注意到当 $(m, M) \in B_2$ 时 $(y \wedge M - m)_+ = y \wedge M$, 记 $\varphi_1^*(M) \triangleq \text{Var}(Y \wedge M)$. 由 $\frac{d\text{Var}(Y \wedge M)}{dM} = 2F(M) \cdot E(Y \wedge M) > 0$ 和 $\varphi_1^*(M)$ 是 M 的增函数知, $\varphi_1^{*-1}(M)$ 是 L 的增函数. 进一步有 $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(\tilde{L}) = \tilde{P}$. 同样, 假设 $H(m, M) : B_3 \rightarrow \varphi_2(L)$, 其中 $\varphi_2(L)$ 是 $\mathcal{D}$ 其他的边界曲线, 我们有 $\varphi_2(L)$ 是 L 的增函数, 因为

$$\begin{aligned}
 P &= E((Y - m)_+) + \beta \sqrt{\text{Var}((Y - m)_+)} \triangleq \tilde{\varphi}_2(m) \\
 &= \tilde{\varphi}_2(\varphi_2^{*-1}(\text{Var}((Y - m)_+))) = \varphi_2(\text{Var}((Y - m)_+)) = \varphi_2(L),
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\varphi}_2, \varphi_2^{*-1}$ 是减函数. 与此同时, 我们有 $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(\tilde{L}) = \tilde{P}$.

现在我们来考虑 $\varphi_1(L)$ 和 $\varphi_2(L)$ 之间的联系. 下面的命题说明在约束 $\text{Var}R_3^*(Y) = L$ 下 $\varphi_1(L) > \varphi_2(L)$.

命题 2 $R(y) = y \wedge M$ 是下述问题的最优解:

$$\begin{aligned}
 &\max ER(Y) \\
 &\text{s.t. } \text{Var}R(Y) = L,
 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq R(Y) \leq Y$.

注 3 命题 2 可由这样的事实来导出: $I(y) = (y - d)_+$ 是下述问题的最优再保险安排,

$$\begin{aligned}
 &\min EI(Y) \\
 &\text{s.t. } \text{Var}(Y - I(Y)) = L,
 \end{aligned}$$

这已由 [9] 得到.

到目前为止, 我们已经讨论了 $\mathcal{D}$ 的形状并且得到结论: $\mathcal{D}$ 是一个由 $\varphi_1(L)$ 和 $\varphi_2(L)$ 围成的单连通区域, $\varphi_1(L)$ 和 $\varphi_2(L)$ 的交点是 $(0, 0)$ 和 $(\tilde{P}, \tilde{L})$. 现在给出一个重要定理.

定理 4 假设 $\beta > 0$, $(P, L) \in \mathcal{D}$, 那么由 (1.7) 定义的 $R_3^*(y)$ 是下述问题的最优解:

$$\begin{aligned}
 &\min E|Y - R(Y) - E(Y - R(Y))| \\
 &\text{s.t. } \begin{cases} \text{Var}R(Y) \leq L, \\ ER(Y) + \beta \sqrt{\text{Var}R(Y)} \leq P, \\ 0 \leq R(Y) \leq Y, \end{cases} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

其中在 $R_3^*(y)$ 中的 (m, M) 是对应 (P, L) 在 $\mathcal{B}$ 中的元素.

证明 由于 $(P, L) \in \mathcal{D}$, 容易知道定理 2 的假设条件 (iv) 满足.

定义

$$s_2^*(y) = \begin{cases} -1, & y \leq m, \\ \alpha(y - m) - a, & m < y \leq M, \\ 1, & y > M, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $a \in [-1, 1]$ 为满足方程 $\alpha(M - m) - a = 1$ 的实数. 易见 $s_2^*(y)$ 是满足 (3.1) 的非降函数.

定义

$$\lambda = (1 - a)P_r(Y \leq m), \quad \mu = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + a}{M - m} - \frac{\lambda\beta}{\sqrt{L}} \right].$$

显然, $\lambda \geq 0$, 由于 $a \in [-1, 1]$. 对任意的 a , 由于 $\frac{1-a}{1+a} \leq \frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{L}}{M-m}$ 与 1 足够接近, 可得到 $\mu \geq 0$.

现在我们来证明定理 2 的条件 (i) 和 (iii) 满足. 因为 $m > 0$, (ii) 不必再证明. 事实上, 将 $\lambda, \mu, s_2^*(y), R_3^*(y)$ 代入 (iii), 对任意的 $y > m$, 我们得到

$$\lambda - s_2^*(y) + \mathbb{E}s_2^*(Y) - \lambda\beta \frac{ER_3^*(Y)}{\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}} + \lambda\beta \frac{R_3^*(y)}{\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}} - 2\mu ER_3^*(Y) + 2\mu R_3^*(y) = 0. \quad (4.2)$$

因此 (iii) 满足.

验证 (i), 对任意的 $0 \leq y \leq m$, 足可以表明

$$\lambda + 1 + \mathbb{E}s_2^*(Y) - \frac{1 + a}{M - m} ER_3^*(Y) \geq 0. \quad (4.3)$$

不难看出 (4.3) 成立, 因为我们可以从 (4.2) 得出 $\lambda + a + \mathbb{E}s_2^*(Y) - \frac{1+a}{M-m} ER_3^*(Y) = 0$ (这里 $a \in [-1, 1]$).

最后, 注意到在 ρ_1 下, 由于 $\rho_1^+ \equiv \frac{1}{2}\rho_1$, 所以 R_3^* 是最优的.

类似于 [4] 的定理 3.1, 我们可以证明下面的定理:

定理 5 假设 $\text{Var}Y > L > 0$, 那么存在常数 m 和 M 使得由 (1.7) 定义的 $0 < m < M < \infty$ 和 $R_3^*(y)$ 是下述问题的最优解:

$$\begin{aligned} & \min \mathbb{E}|Y - R(Y)| - \mathbb{E}(Y - R(Y)) \\ & \text{s.t. } \text{Var}R(Y) \leq L. \end{aligned}$$

常数由下述方程定义:

$$\begin{aligned} & \int_{[0, m]} (m - y) dF(y) = \int_{(M, \infty)} (y - M) dF(y), \\ & L = (\mathbb{E}Y - m)^2 P_r(Y \leq m) + (M - \mathbb{E}Y)^2 P_r(Y > M) + \int_{(m, M]} (y - \mathbb{E}Y)^2 dF(y). \end{aligned}$$

根据上面对 $\mathcal{D}$ 的讨论, 我们可以定义

$$\overline{\mathcal{D}} = \{(P, L) : \varphi_2(L) \leq P \leq \varphi_1(L), 0 \leq L \leq \tilde{L}\},$$

或者等价的定义

$$\overline{\mathcal{D}} = \{(P, L) : \psi_2(P) \leq L \leq \psi_1(P), 0 \leq P \leq \tilde{P}\}.$$

表 2 3 种风险测度的数值比较

ρ_{1i}	ρ_{2i}	ρ_{3i}	相对误差 ₁	相对误差 ₂
2.1040	1.2560	1.1024	$ \rho_{2i} - \rho_{1i} /\rho_{1i} = 0.4030$	$ \rho_{3i} - \rho_{1i} /\rho_{1i} = 0.4760$
3.8217	2.1550	1.6066	$ \rho_{1i} - \rho_{2i} /\rho_{2i} = 0.7964$	$ \rho_{3i} - \rho_{2i} /\rho_{2i} = 0.2545$
4.1437	2.3737	1.6857	$ \rho_{1i} - \rho_{3i} /\rho_{3i} = 1.4581$	$ \rho_{2i} - \rho_{3i} /\rho_{3i} = 0.4081$

那么提出一个重要的问题. 当 $(P, L) \notin \overline{\mathcal{D}}$ 时, $R_3^*(y)$ 是 (4.1) 的最优解吗? 有几种情况应该考虑到.

1. 当 $L > \psi_1(P)$, $0 \leq P \leq \tilde{P}$ 时, 我们知道 $R_3^*(y)$ 是下述问题的最优解:

$$\begin{aligned} & \min E|Y - R(Y) - E(Y - R(Y))| \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \text{Var}R(Y) \leq L, \\ ER(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R(Y)} \leq P, \\ 0 \leq R(Y) \leq Y \end{cases} \end{aligned}$$

(参见文献 [4]), 并且 $\overline{\mathcal{D}}$ 的定义说明 $(P, \text{Var}R_3^*(Y)) \in \overline{\mathcal{D}}$ 暗示着 $\text{Var}R_3^*(Y) \leq \psi_1(P) < L$, 因此 $R_3^*(y)$ 是 (4.1) 的最优解.

2. 当 $P > \varphi_1(L)$, $0 \leq L \leq \tilde{L}$ 时, 由定理 4 和定义 $\overline{\mathcal{D}}$ 易见 $(ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)}, L) \in \overline{\mathcal{D}}$, 于是我们有 $ER_3^*(Y) + \beta\sqrt{\text{Var}R_3^*(Y)} \leq \varphi_1(L) < P$, 这暗示着 $R_3^*(y)$ 是 (4.1) 的最优解.

3. 当 $L > \psi_1(P)$, $P > \varphi_1(L)$ 时, 可以看做是在没有约束情况下将 $E|Y - R(Y) - E(Y - R(Y))|$ 最小化; 当 $P = 0$, $L = 0$ 时有 $R(y) = 0$, 这可以认为是 $M \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ 时 $R_3^*(y)$ 的极限; 当 $P \neq 0$, $L \neq 0$ 时, 有 $R(y) = y$, 这可以认为是当 $M \rightarrow \infty$, $m \rightarrow 0$ 时 $R_3^*(y)$ 的极限.

注 4 到现在为止我们证明了不论 P , L 取什么非负值, $R_3^*(y)$ 是最优解总成立, 即对任意的 P 和 L , $R_3^*(y) = (y \wedge M - m)_+$, 其中 $0 \leq m \leq M \leq \tau$, 是问题 (4.1) 的最优再保险安排. 这个事实在实践中有重要意义, 而当 P 和 L 没有正确选择时则不必关心这个问题.

例 3 假设 Y 的分布与例 1 相同. 取 $\beta = 0.5$, $P = L = 1.0 \times 10^8$ USD, 于是得到 $R_3^*(y) = (y \wedge 9.9938 - 5.8297)_+$ 是 (4.1) 的最优再保险安排.

5 结论

至此我们已经获得了保险人在 3 种风险测度下的最优再保险安排, 记 $\rho_{1i} = \text{Var}(Y - R_i^*(Y))$, $\rho_{2i} = E|Y - R_i^*(Y) - E(Y - R_i^*(Y))|_+^2$, $\rho_{3i} = E|Y - R_i^*(Y) - E(Y - R_i^*(Y))|$, 其中 $R_1^*(y) = 0.5480(y - 2.1988)_+$, $R_2^*(y) = 0.5028(y - 4.2255)_+$, $R_3^*(y) = (y \wedge 9.9938 - 5.8297)_+$, 我们可以由表 2 比较它们的最优情况.

一般来讲, 我们用相对误差值比较一个风险度量与另一个的最优性. 我们首先在风险测度下选择一个最优安排, 将其放入另一个风险测度中, 如果相对误差值不太大, 我们可以认为另一个风险的措施是可取的. 通常, 我们将一个标准强加给此值. 例如, 若把 0.5 作为标准, 从表 2 我们可以看到, 与半方差风险测度或 L_1 风险测度相比, 方差风险测度不可用.

应该指出, 在集 $M_- = \{R \in \mathfrak{R} \mid g(R) = 0, h(R) = 0 \text{ 和 } R \in C\}$ 上我们可以得出相同的结果.

用类似的方法, 在期望准则下我们可以得出相同的结果. 即, 当 $\varphi(t) = t^2$ 或 t_+^2 时, 变换损失再保

险是下面问题的解:

$$\begin{aligned} \min \quad & E\varphi(Y - R(Y) - E(Y - R(Y))) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \text{Var}R(Y) \leq L, \\ (1 + \beta)ER(Y) \leq P, \\ 0 \leq R(Y) \leq Y. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

当 $\varphi(t) = |t|$ 时, $R_3^*(y)$ 是 (5.1) 的解.

到现在为止, 还有一系列问题, 如再保险公司采取任意风险测度时的再保险问题等还没有解决. 由于这些问题更加复杂, 有待于将来解决.

参考文献

- 1 Kaluszka M. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance Math Econom*, 2001, 28: 61–67
- 2 Young V R. Optimal insurance under Wang's premium principle. *Insurance Math Econom*, 1999, 25: 109–122
- 3 Young V R. Discussion of Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle. *Astin Bull*, 1999, 29: 191–195
- 4 Gajek L, Zagrodny D. Optimal reinsurance under general risk measures. *Insurance Math Econom*, 2004, 34: 227–240
- 5 Kaluszka M. An extension of arrow's result on optimality of a stop loss contract. *Insurance Math Econom*, 2004, 35: 527–536
- 6 Cao Y S, Zhang Y. Optimal reinsurance under the general mixture risk measures. *Appl Math Comput*, 2007, 185: 229–239
- 7 Deprez O, Gerber H. On convex principles of premium calculation. *Insurance Math Econom*, 1985, 4: 179–189
- 8 Gajek L, Zagrodny D. Insurer's optimal reinsurance strategies. *Insurance Math Econom*, 2000, 27: 105–122
- 9 Kaas R, Goovaerts M J, Dhaene J, et al. *Modern Actuarial Risk Theory*. Dordrecht: Kluwer, 2001

Optimal reinsurance under the standard deviation principle

SONG LiXin, HUANG YuJie & ZHOU Juan

Abstract This paper concerns how to purchase the reinsurance to minimize both the insurer and the reinsurer's risk fluctuation under the standard deviation principle. Sufficient conditions for the optimal reinsurance contract are obtained in the restricted class of admissible contracts. Assume that the reinsurer's risk is less than a threshold, and then we find out the optimal reinsurance contract that minimizes the insurer's risk. Here the insurer company can take three general and useful risk measures.

Keywords: reinsurance, standard deviation principle, total risk, upper bound, Lagrangian function

MSC(2000): 90B50, 90C27, 90C47, 91B06, 91B30

doi: 10.1360/012010-422