高维 Wiener sausage 的强逼近

王艳清

中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073
E-mail: yanqingwang102@163.com

收稿日期: 2010-11-4; 接受日期: 2011-07-25

国家自然科学基金 (批准号: 10871153) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2011084、2010014) 资助项目

摘要 本文研究了四维及四维以上的 Wiener sausage 的体积, 得到它们可以由一维 Brown 运动强逼近. 作为应用, 推出了弱收敛和重对数率.

关键词 Wiener sausage 强逼近 Skorohod 嵌入定理

MSC (2000) 主题分类 60F15, 60F05

1 引言

设 $\beta(s)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 空间中从原点出发的 Brown 运动. 由 $\{\beta(s), s \geq 0\}$ 产生的观察至时间 t 且以 r 为半径的 Wiener sausage 的体积定义为:

$$W_r(t) = \bigcup_{0 \leq s \leq t} B_r(\beta(s)), \quad t \geq 0,$$

其中 $B_r(x)$ 是以 $x \in \mathbb{R}^d$ 为中心, 半径为 $r > 0$ 的开球. 我们记集合 A 的 Lebesgue 测度为 $|A|$. 一般地, 对于 $\Delta \subset \mathbb{R}$, 我们记 $W_r(\Delta) = \bigcup_{s \in \Delta} B_r(\beta(s))$.

Wiener sausage 的体积 $|W_r(t)|$ 是一个相当丰富的研究课题. 20 世纪 60 年代以来, 众多学者研究了它的各种极限行为. 例如, Wiener sausage 的大数定律^[1]、中心极限定理^[2]、三维 Wiener sausage 的强逼近^[3] 以及大偏差性质^[4,5] 等等. 本文的研究对象是四维以及四维以上的 Wiener sausage. 我们研究了它们的强逼近, 利用强逼近的结论, 我们推出了相应的弱收敛和重对数率. 主要结果是下面的定理.

定理 1.1 设 $d \geq 4$, $\sigma(r, d)$ 是一个仅依赖于 d 和 r 的常数. 在不改变 $|W_r(t)|$ 的分布的情况下, 我们可以将其重新定义在一个更广的概率空间上, 其记号保持不变, $\{\tilde{\beta}(t), t \geq 0\}$ 是该空间上的一个一维标准 Brown 运动, 使得对于任意给定的 $\gamma > 0$,

$$|W_r(t)| = c(r, d)t + \sigma(r, d)\tilde{\beta}(t) + O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.}, \quad (1.1)$$

其中 $c(r, d) = 2\pi^{d/2}r^{d-2}/\gamma(\frac{d}{2} - 1)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 $B_r(0)$ 的 Newton 密度.

注 1.1 $\sigma(r, d)$ 是 Le Gall 在文献 [2] 中定义的一个量, 我们简单介绍它的表示形式. 设 $\beta'(s)$ 是一个与 $\beta(s)$ 相互独立且同分布的 Brown 运动. 对任意的 $t < 0$, 定义 $\beta(t) = \beta'(-t)$, 由此将 $\beta(t)$ 扩充到对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义. $\mathcal{F}_t$ 表示由 $(\beta(s); -\infty < s \leq t)$ 产生的 σ -代数. 记 c_d 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的

体积且 $\mathbf{e}_r$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中 $B_r(0)$ 上的平衡测度. 假设 A, B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的两个集合, 记 $A \setminus B = A \cap B^c$. Le Gall 在文献 [2] 中得到

$$\sigma^2(r, d) = \mathbb{E}\xi^2, \quad (1.2)$$

当 $d = 4$ 时,

$$\begin{aligned} \xi = & \mathbb{E}[|W_r([0, 1]) \setminus W_r([1, \infty))||\mathcal{F}_1] - \mathbb{E}[|W_r([0, 1]) \setminus W_r([1, \infty))|] \\ & - \mathbb{E}[|(W_r([0, 1]) \setminus W_r([1, \infty))) \cap W_r((-\infty, 0])||\mathcal{F}_1] + \int dy I_{W_r((-\infty, 0])}(y)(g(y) - g(y - \beta(1))), \end{aligned}$$

且

$$g(y) = c_d \int \mathbf{e}_r(dw) |y - w|^{2-d},$$

当 $d \geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} \xi = & \mathbb{E}[|W_r((-\infty, 0]) \cap W_r([0, \infty))||\mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[|W_r((-\infty, 0]) \cap W_r([0, \infty))||\mathcal{F}_1] \\ & + \mathbb{E}[|W_r([0, 1]) \setminus W_r([1, \infty))||\mathcal{F}_1] - \mathbb{E}[|W_r([0, 1]) \setminus W_r([1, \infty))|]. \end{aligned}$$

定理 1.1 意味着标准化的 Wiener sausage 体积收敛到 Brown 运动. 由于误差项充分小, 我们很容易得到下面的推论.

推论 1.1 设

$$M_t(x) = \frac{|W_r(tx)| - \mathbb{E}|W_r(tx)|}{\sigma(r, d)\sqrt{t}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(M_t(\cdot)) & \xrightarrow{w} \mathcal{L}(\tilde{\beta}), \quad t \rightarrow \infty, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2t \log \log t}} (|W_r(t)| - \mathbb{E}|W_r(t)|) & = \sigma(r, d), \quad \text{a.s.}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \log t}{t} \right)^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq t} [|W_r(s)| - \mathbb{E}|W_r(s)|] & = \frac{\pi \sigma(r, d)}{\sqrt{8}}, \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

这里 $\xrightarrow{w}$ 表示 $C[0, 1]$ 中的弱收敛, $\mathcal{L}(\cdot)$ 表示括号中随机过程的分布.

注 1.2 这里的重对数率是文献 [6] 的结论, 本文则进行了一些泛函形式的拓展.

2 一些矩估计

在这部分, 我们将约定一些记号并给出一些对证明有用的引理.

若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则我们用 $f(t) = o(g(t))$ 表示当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t)/g(t) \rightarrow 0$; 用 $f(t) = O(g(t))$ 表示当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t)/g(t)$ 有界. 令 $\{\beta'(s), s \geq 0\}$ 与 $\{\beta(s), s \geq 0\}$ 独立同分布, $W'_r(t)$ 是由 $\{\beta'(s), s \geq 0\}$ 产生的观察到时刻 t 的 Wiener sausage. $V_r(t)$ 表示 $W_r(t)$ 和 $W'_r(t)$ 相交部分的体积, 即 $V_r(t) = |W_r(t) \cap W'_r(t)|$. 一般地, 对于任意的 $\mathbb{R}$ 的一个子集 Δ , 定义 $V_r(\Delta) = |W_r(\Delta) \cap W'_r(\Delta)|$.

关于 Wiener sausage 体积的渐进性质, Kesten, Spitzer 以及 Whitman^[1], Spitzer^[7] 和 Le Gall^[2] 分别证明了下面的一些结论:

引理 2.1 设 $d \geq 4$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{|W_r(t)|}{t} \rightarrow c(r, d), \quad \text{a.s.}, \quad (2.1)$$

$$\mathbb{E}|W_r(t)| = c(r, d)t + O(\log t), \quad (2.2)$$

$$\text{Var}|W_r(t)| = \sigma(r, d)t + O(\log^2 t), \quad (2.3)$$

$$\frac{|W_r(t)| - \mathbb{E}|W_r(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{(d)} \sigma(r, d)\mathcal{N}, \quad (2.4)$$

这里 $\xrightarrow{(d)}$ 表示依分布收敛, $\mathcal{N}$ 表示标准正态随机变量.

引理 2.2 (见 [2] 中 (4.a') 和 (4.b')) 当 $d = 4$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|W_r([0, t]) \cap W_r([0, \infty])|}{\log t} = \frac{c(r, d)^2}{4\pi^2},$$

当 $d \geq 5$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|V_r(t)| < +\infty$.

引理 2.3 (见 [8]) 对任意的正整数 k , $\mathbb{E}V_r^k(t) \leq (k!)^2(\mathbb{E}V_r(t))^k$.

3 定理 1.1 的证明

在这部分里, 我们将证明定理 1.1. 其中的一些思想来自文献 [9].

对于任意的随机变量 Y , 我们记 $\bar{Y} = Y - \mathbb{E}Y$. 用 $[x]$ 表示 x 的整数部分. $C_1, C_2, \dots$ 表示一些适当的正实数.

由引理 2.1 中的 (2.2), (1.1) 等价于

$$\frac{1}{\sigma(r, d)} (|W_r(t)| - \mathbb{E}|W_r(t)|) - \tilde{\beta}(t) = O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.} \quad (3.1)$$

3.1 准备工作

设 $\{n_j, j \geq 1\}$ 是 Hamana 在文献 [9] 中定义的一个数列. 即对任意的 $j \geq 1$, $n_j = \sum_{k=1}^j [k^{2/3}]$ 且 $n_0 = 0$. $I(j)$ 表示落在区间 $[n_{j-1}, n_j]$ 中的整数的集合. 则 $I(j)$ 中元素的个数等于 $[j^{2/3}]$ 且

$$C_1 j^{5/3} \leq n_j \leq C_2 j^{5/3}. \quad (3.2)$$

对任意的 $t \geq 0$, 存在唯一的整数 $M(t) \geq 1$ 使得 $[t] \in I(M(t))$. 我们很容易看出

$$C_3 t^{3/5} \leq M(t) \leq C_4 t^{3/5}. \quad (3.3)$$

在这一部分, 我们将证明下面的命题.

命题 3.1.1 在不改变 $|W_r(t)|$ 的分布的情况下, 我们可以将其重新定义在一个更广的概率空间上, 其记号保持不变, $\{\tilde{\beta}(t), t \geq 0\}$ 是该空间上的一个一维标准 Brown 运动, 使得对任意给定的 $\gamma > 0$,

$$\frac{1}{\sigma(r, d)} (|W_r(n_{M(t)})| - \mathbb{E}|W_r(n_{M(t)})|) - \tilde{\beta}(t) = O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.} \quad (3.4)$$

取 $n_0 = 0$. 注意到

$$|W_r(n_{M(t)})| = \sum_{j=1}^{M(t)} |W_r((n_{j-1}, n_j])| = \sum_{j=1}^{M(t)} |W_r((0, n_{j-1}] \cap W_r((n_{j-1}, n_j]))|.$$

令 $U_{n_j} := |W_r((n_{j-1}, n_j])|$ 且 $V_{n_j} := |W_r((0, n_{j-1}] \cap W_r((n_{j-1}, n_j])|$. 为了简单, 我们记 $\bar{W}_r(n_{M(t)}) = |W_r(n_{M(t)})| - \mathbb{E}|W_r(n_{M(t)})|$, $\bar{U}_{n_j} = U_{n_j} - \mathbb{E}U_{n_j}$ 且 $\bar{V}_{n_j} = V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}$.
故,

$$\bar{W}_r(n_{M(t)}) = \sum_{j=1}^{M(t)} \bar{U}_{n_j} - \sum_{j=1}^{M(t)} \bar{V}_{n_j}.$$

为了证明上面的命题, 我们先给出下面两个引理.

引理 3.1.1

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^i V_{n_j}\right) = O(i \log^2 i). \quad (3.5)$$

证明 注意到,

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^i V_{n_j}\right) = \sum_{j=1}^i \mathbb{E}V_{n_j}^2 + 2 \sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}(V_{n_m} \cdot V_{n_l}) - \sum_{j=1}^i (\mathbb{E}V_{n_j})^2 - 2 \sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}V_{n_l} \cdot \mathbb{E}V_{n_m}.$$

由 V_{n_j} 的定义, 我们可以得到对任意的 $1 \leq j \leq i$,

$$V_{n_j} \stackrel{d}{=} |W'_r((0, n_j - n_{j-1}]) \cap W''_r((0, n_{j-1}])|, \quad (3.6)$$

其中 $W'_r(t)$ 和 $W''_r(t)$ 相互独立.

事实上, 由 Wiener sausage 的定义,

$$\begin{aligned} W_r((n_{j-1}, n_j]) &= \bigcup_{n_{j-1} < s \leq n_j} \{x \mid |\beta(s) - x| < r\} \\ &= \bigcup_{0 < s \leq n_j - n_{j-1}} \{x \mid |\beta(s + n_{j-1}) - x| < r\} \\ &= \beta(n_{j-1}) + \bigcup_{0 < s \leq n_j - n_{j-1}} \{x \mid |\beta(s + n_{j-1}) - \beta(n_{j-1}) - x| < r\} \\ &= \beta(n_{j-1}) + W'_r((0, n_j - n_{j-1}]), \end{aligned}$$

其中 $\beta'(s) = \beta(s + n_{j-1}) - \beta(n_{j-1})$.

由 V_{n_j} 的定义及 Lebesgue 测度的平移不变性,

$$\begin{aligned} V_{n_j} &= |(\beta(n_{j-1}) + W'_r((0, n_j - n_{j-1}])) \cap W_r((0, n_{j-1}])| \\ &= |W'_r((0, n_j - n_{j-1}]) \cap (W_r((0, n_{j-1}]) - \beta(n_{j-1}))|. \end{aligned}$$

注意到,

$$W_r((0, n_{j-1}]) - \beta(n_{j-1}) = \bigcup_{0 < s \leq n_{j-1}} \{x \mid |\beta(s) - \beta(n_{j-1}) - x| < r\} = W''_r((0, n_{j-1}]),$$

其中 $\beta''(s) = \beta(s) - \beta(n_{j-1})$.

利用 Brown 运动的性质, 通过计算协方差, 很容易推出 $\{\beta'(s), 0 < s \leq n_j - n_{j-1}\}$ 与 $\{\beta''(s), 0 < s \leq n_{j-1}\}$ 是相互独立的. 故 (3.6) 式成立.

利用引理 2.2 和 2.3, 当 i 充分大时, 可以找到一个常数 $C_5 > 0$ 使得对任意的 $1 \leq j \leq i$,

$$\mathbb{E}V_{n_j}^2 = \mathbb{E}|W'_r((0, n_j - n_{j-1}]) \cap W''_r((0, n_{j-1}])|^2 \leq \mathbb{E}V_r^2([0, n_i]) \leq C_5(\log n_i)^2, \quad (3.7)$$

且由 Jensen 不等式,

$$(\mathbb{E}V_{n_j})^2 \leq \mathbb{E}V_{n_j}^2 \leq C_5(\log n_i)^2. \quad (3.8)$$

对任意的 $2 \leq m \leq i$ 和 $1 \leq l \leq m-1$,

$$\begin{aligned} V_{n_m} &= |W_r((n_{m-1}, n_m]) \cap W_r((0, n_{m-1}])| \\ &\leq |W_r((n_{m-1}, n_m]) \cap W_r((n_l, n_{m-1}])| + |W_r((n_{m-1}, n_m]) \cap (W_r((0, n_l]) \setminus W_r((n_l, n_{m-1}]))| \\ &:= V_{m,l}^{(1)} + V_{m,l}^{(2)}. \end{aligned}$$

类似于 (3.6), 我们可以证明 V_{n_l} 独立于 $V_{m,l}^{(1)}$, 故 $\mathbb{E}V_{n_l} \cdot V_{m,l}^{(1)} = \mathbb{E}V_{n_l} \cdot \mathbb{E}V_{m,l}^{(1)}$.

注意到,

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} V_{n_l} \cdot V_{m,l}^{(2)} &= \sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} |W_r((n_{l-1}, n_l]) \cap W_r((0, n_{l-1}])| \\ &\quad \times |W_r((n_{m-1}, n_m]) \cap (W_r((0, n_l]) \setminus W_r((n_l, n_{m-1}]))| \\ &= \sum_{l=1}^{i-1} |W_r((n_{l-1}, n_l]) \cap W_r((0, n_{l-1}])| \\ &\quad \times \sum_{m=l+1}^i |W_r((n_{m-1}, n_m]) \cap (W_r((0, n_l]) \setminus W_r((n_l, n_{m-1}]))| \\ &\leq \sum_{l=1}^{i-1} |W_r((n_{l-1}, n_l]) \cap W_r((0, n_{l-1}])| \cdot |W_r((n_l, n_i]) \cap W_r((0, n_l])|. \end{aligned}$$

类似于 (3.7), 我们可以得到

$$\mathbb{E}|W_r((n_{l-1}, n_l]) \cap W_r((0, n_{l-1}])|^2 \leq \mathbb{E}V_r^2([0, n_i]),$$

且

$$\mathbb{E}|W_r((n_l, n_i]) \cap W_r((0, n_l])|^2 \leq \mathbb{E}V_r^2([0, n_i]).$$

由 Hölder 不等式,

$$\mathbb{E} \sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} (V_{n_l} \cdot V_{m,l}^{(2)}) \leq i \mathbb{E}V_r^2([0, n_i]) \leq C_6 i (\log n_i)^2. \quad (3.9)$$

同样地, 我们可以得到

$$\sum_{m=2}^i \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}V_{n_l} \cdot \mathbb{E}V_{m,l}^{(2)} \leq i \mathbb{E}V_r^2([0, n_i]) \leq C_7 i (\log n_i)^2. \quad (3.10)$$

利用 (3.7)–(3.10) 以及 $n_i = \sum_{k=1}^i [k^{2/3}]$, 我们有

$$\text{Var} \left(\sum_{j=1}^i V_{n_j} \right) = O(i \log^2 i). \quad \square$$

引理 3.1.2 对任意的 $\beta > 3/2$,

$$\sum_{j=1}^i (V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) = O(i^{2/3} \log^\beta i), \quad \text{a.s.}$$

证明 假设 $\nu_k = k^3$, $k \geq 1$. 由 Chebyshev 不等式和 (3.5), 我们有

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{\nu_k}(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j})\right| \geq \nu_k^{2/3} \log^\beta \nu_k\right) = O(\nu_k^{-1/3} \log^{2-2\beta} \nu_k) = O(k^{-1} \log^{2-2\beta} k).$$

利用 $\beta > 3/2$ 以及 Borel-Cantelli 引理, 我们可以推出

$$\sum_{j=1}^{\nu_k}(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) = O(\nu_k^{2/3} \log^\beta \nu_k), \quad \text{a.s.}$$

由于对每一个 $j \geq 1$, V_{n_j} 是非负的, 故对 $\nu_k \leq i < \nu_{k+1}$,

$$\sum_{j=1}^{\nu_k}(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) - \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \mathbb{E}V_{n_j} \leq \sum_{j=1}^i(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) \leq \sum_{j=1}^{\nu_{k+1}}(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) + \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \mathbb{E}V_{n_j}.$$

由引理 2.2 和 (3.2), 我们可以得到当 $d \geq 4$ 时, 对所有的 $\nu_k < j \leq \nu_{k+1}$, $\mathbb{E}V_{n_j} = O(\log n_j) = O(\log k)$. 注意到 $\nu_{k+1} - \nu_k = O(k^2)$, 则

$$\sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \mathbb{E}V_{n_j} = O(k^2 \log k).$$

由于 $k^3 = \nu_k \leq i < \nu_{k+1} = (k+1)^3$ 且 $\beta > 3/2$, 故 $\sum_{j=1}^i(V_{n_j} - \mathbb{E}V_{n_j}) = O(i^{2/3} \log^\beta i)$, a.s.

命题 3.1.1 的证明 为了证明 (3.4), 我们只需要证明

$$\frac{1}{\sigma(r, d)} \left(\sum_{j=1}^{M(t)} \bar{U}_{n_j} \right) - \tilde{\beta}(t) = O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.}, \quad (3.11)$$

和

$$\frac{1}{\sigma(r, d)} \left(\sum_{j=1}^{M(t)} \bar{V}_{n_j} \right) = O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.} \quad (3.12)$$

利用引理 3.1.2 和 (3.3) 可以很容易推出 (3.12).

注意到 $\{U_{n_j}\}_{j=1}^{M(t)}$ 是一列相互独立的随机变量. 事实上, 由 Lebesgue 测度的平移不变性可以得到

$$\begin{aligned} |W_r((n_{j-1}, n_j])| &= \left| \beta(n_{j-1}) + \bigcup_{0 < s \leq n_j - n_{j-1}} \{x \mid |\beta(s + n_{j-1}) - \beta(n_{j-1}) - x| < r\} \right| \\ &= \left| \bigcup_{0 < s \leq n_j - n_{j-1}} \{x \mid |\beta(s + n_{j-1}) - \beta(n_{j-1}) - x| < r\} \right|. \end{aligned}$$

利用 Brown 运动的性质, 很容易推出 $\{\beta(s + n_{j-1}) - \beta(n_{j-1}), 0 < s \leq n_j - n_{j-1}\}_{j=1}^{M(t)}$ 是一列相互独立的 Brown 运动.

由 Skorohod 嵌入定理可知, 存在一系列非负独立的随机变量 $\{T_j\}_{j=1}^{M(t)}$ 和一维标准 Brown 运动 $\{\tilde{\beta}(t), t \geq 0\}$ 使得

$$\tilde{\beta}\left(\sum_{i=0}^j T_i\right) - \tilde{\beta}\left(\sum_{i=0}^{j-1} T_i\right) \stackrel{d}{=} \frac{\bar{U}_{n_j}}{\sigma(r, d)},$$

其中 $T_0 = 0$.

且 $\mathbb{E}T_j = \text{Var}(\frac{\bar{U}_{n_j}}{\sigma(r, d)})$, 对于所有的 $j \geq 1$, 有 $\mathbb{E}|T_j|^2 \leq C\mathbb{E}|\bar{U}_{n_j}|^4$.

由文献 [2] 中的 (2.o) 式, 我们有 $\mathbb{E}|\bar{U}_{n_j}|^4 = O((n_j - n_{j-1})^2)$. 故

$$\mathbb{E}T_j^2 = O((n_j - n_{j-1})^2) = O(j^{4/3}).$$

从 (2.3) 式我们可以得到, $\mathbb{E}T_j = (n_j - n_{j-1}) + O(\log^2(n_j - n_{j-1})) = [j^{\frac{2}{3}}] + O(\log^2 j)$.

由于 $[t] \in I(M(t))$, 我们有 $[t] \leq \sum_{j=1}^{M(t)} [j^{2/3}] \leq [t] + O(M(t)^{2/3})$.

由 (3.3) 我们得到,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{M(t)} T_j\right) = \sum_{j=1}^{M(t)} [j^{2/3}] + O(M(t) \log^2 M(t)) = t + O(t^{3/5} \log^2 t). \quad (3.13)$$

注意到 $\text{Var}(T_j) = \mathbb{E}T_j^2 - (\mathbb{E}T_j)^2 = O(j^{4/3})$, 我们很容易推出

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{Var}T_j}{j^{7/3} \log^2 j} < \infty.$$

利用 Kolmogorov 三级数定理, 我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{T_j - \mathbb{E}T_j}{j^{7/6} \log j} < \infty, \quad \text{a.s.}$$

由 Kronecker 引理可以推出,

$$\sum_{j=1}^{M(t)} (T_j - \mathbb{E}T_j) = O(M(t)^{7/6} \log M(t)) = O(t^{7/10} \log t), \quad \text{a.s.}$$

由 (3.13), 我们得到

$$\sum_{j=1}^{M(t)} T_j = t + O(t^{7/10} \log t), \quad \text{a.s.} \quad (3.14)$$

不失一般性, 我们可以将 $\{\beta(t)\}$, $\{U_{n_j}\}_{j=1}^{M(t)}$ 和 $\{\tilde{\beta}(t)\}$ 重新定义在同一个更广的概率空间上, 其记号保持不变. 由 Skorohod 嵌入定理得到,

$$\sum_{j=1}^{M(t)} \bar{U}_{n_j} = \sigma(r, d) \tilde{\beta}\left(\sum_{j=0}^{M(t)} T_j\right) = \sigma(r, d) \tilde{\beta}(t) + \sigma(r, d) \left[\tilde{\beta}\left(\sum_{j=0}^{M(t)} T_j\right) - \tilde{\beta}(t)\right], \quad \text{a.s.}$$

由 Brown 运动的重对数率以及 (3.14), 我们可以得到

$$\tilde{\beta}\left(\sum_{j=0}^{M(t)} T_j\right) - \tilde{\beta}(t) = O(t^{2/5+\gamma}), \quad \text{a.s.}$$

(3.11) 得证. □

3.2 定理 1.1 的证明

由命题 3.1.1, 我们有

$$\frac{1}{\sigma(r, d)} (|W_r(t)| - \mathbb{E}|W_r(t)|) - \tilde{\beta}(t) = \frac{1}{\sigma(r, d)} (\bar{W}_r(t) - \bar{W}_r(n_{M(t)})) + O(t^{\frac{2}{5}+\gamma}), \quad \text{a.s.}$$

由于 $t \in I(M(t))$, 故 $n_{M(t)} - t < n_{M(t)} - n_{M(t)-1} = M(t)^{2/3}$. 由 (3.3) 可知, $n_{M(t)} - t = O(t^{2/5})$. 利用引理 2.1 中的 (2.1) 和 (2.2), 我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{W}_r(t) - \bar{W}_r(n_{M(t)})}{t^{\frac{2}{5}+\gamma}} = 0, \quad \text{a.s.}$$

定理 1.1 得证.

致谢 作者感谢高付清教授对该文提供的建议和帮助. 同时, 作者感谢审稿人对本文提出的修改建议.

参考文献

- 1 Itô K, MacKean H P Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths. New York: Springer, 1974
- 2 Le Gall J F. Fluctuation results for the Wiener sausage. Ann Probab, 1998, 16: 991–1018
- 3 Bass R F, Rosen J. An almost sure invariance principle for the range of planar random walks. Ann Probab, 2005, 33: 1856–1885
- 4 Dembo A, Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York: Springer, 1998
- 5 Le Gall J F. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann Probab, 1986, 14: 1219–1244
- 6 Le Gall J F. Propriétés d'intersection des marches aleatoires. I. Convergence vers le temps local d'intersection. Comm Math Phys, 1986, 104: 471–507
- 7 Spitzer F. Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. Z Wahr Verw Geb, 1964, 3: 110–121
- 8 Gao F Q, Wang Y Q. Moderate deviations and laws of the iterated logarithm for the volume of the intersection of high dimensional Wiener sausages. Electron J Prob, 2009, 14: 1900–1935
- 9 Hamana Y. An almost sure invariance principle for the range of random walks. Stoc Proc Appl, 1998, 78: 131–143
- 10 Jain N C, Pruitt W E. The law of the iterated logarithm for the range of random walk. Ann Math Stat, 1972, 43: 1692–1697
- 11 Skorohod A V. Studies in the Theory of Random Processes. Boston: Addison-Wesley, 1965
- 12 Bass B F, Kumagai T. Laws of iterated logarithm for the range of random walks in two and three dimensions. Ann Probab, 2002, 30: 1369–1396
- 13 Bass R F, Rosen J. An almost sure invariance principle for the range of planar random walks. Ann Probab, 2005, 33: 1856–1885
- 14 Dembo A, Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York: Springer, 1998
- 15 Le Gall J F. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. Ann Probab, 1986, 14: 1219–1244
- 16 Le Gall J F. Propriétés d'intersection des marches aleatoires. I. Convergence vers le temps local d'intersection. Comm Math Phys, 1986, 104: 471–507
- 17 Hamana Y, Kesten H. A large deviation result for the range of random walk and the Wiener sausage. Probab Theory Related Fields, 2001, 120: 183–208

Strong approximation of high dimensional Wiener sausage

WANG YanQing

Abstract In this paper, we study the volume of Wiener sausage in $\mathbb{R}^d$ for $d \geq 4$. We obtain that it can be strongly approximated by a one-dimensional standard Brownian motion. As an application, we give the weak convergence and laws of the iterated logarithm.

Keywords: Wiener sausage, strong approximation, Skorohod's representation theorem

MSC(2000): 60F15, 60F05

doi: 10.1360/012010-879