

# 电力系统中的混沌现象与小扰动稳定域\*

余贻鑫 贾宏杰 王成山

(天津大学电气自动化与能源工程学院, 天津 300072)

**摘要** 首先简要地回顾了电力系统小扰动稳定域(small signal stability analysis, 简记为 SSSR)的研究现状, 指出弄清电力系统混沌现象对 SSSR 边界组成影响的重要意义. 接着, 利用一个示例系统和非线性动力系统的相关分析方法研究了电力系统由单周期分岔到混沌的过程及其能量的变化规律. 据此做出了混沌现象仅在电力系统 SSSR 的 HB 界面之外的命题. 基于这一命题, 建议在实用的电力系统 SSSR 的研究中, 排除对混沌现象的考虑, 从而使实用的 SSSR 的研究工作大大简化. 此外, 还对混沌吸引子和极限环的伪稳定域进行了研究, 进而剖析了现有文献关于混沌现象对 SSSR 边界影响的研究中出现错误的原因.

**关键词** 电力系统 小扰动稳定域 混沌 非线性

随着电力系统的发展, 尤其是电力系统大范围互联所诱发的新的动态问题的涌现, 以及环保压力和电力市场竞争的加剧, 致使稳定问题更为突出, 其中与电压失稳和电压崩溃相关的问题, 已成为目前世界范围内研究的热点. 依据 IEEE 的建议<sup>[1]</sup>, 电力系统稳定(其中既包含功角稳定又包含电压稳定)问题的研究可分为 3 类: 暂态稳定分析(transient stability analysis), 小扰动稳定分析(steady-state stability analysis 或 small signal stability analysis)和静态稳定分析(static stability analysis). 本文主要研究电力系统小扰动稳定性和与之相关的小扰动稳定域(small signal stability region, SSSR)边界的组成问题, 除特别强调外, 下文中用到的“稳定”特指系统小扰动稳定.

电力系统小扰动稳定的失稳模式, 是与系统的各种分岔(bifurcation)现象紧密相关的<sup>[2]</sup>. 已经提出的几类分岔现象有: (i) 鞍节点分岔(saddle-node bifurcation, SNB), 最早由 Kwatny<sup>[3]</sup>指出, 这种分岔与电力系统的单调失稳相关; (ii) Hopf 分岔(Hopf bifurcation, HB), 最早由 Abed<sup>[4]</sup>指出, 这种分岔与电力系统的振荡型失稳相关; (iii) 奇异诱导分岔(singularity induced bifurcation, SIB), 最先由 Zaborszky 等提出<sup>[5]</sup>, 后经 Guo 和 Salam<sup>[6]</sup>采用摄动技术进行分析后已经明确, 这种分岔同样与系统的某些单调失稳现象相联系. 近年来, 国内外学者<sup>[7~12]</sup>相继发现电力系统中存在更为复杂的临近失稳的模式——混沌(chaos)<sup>[1]</sup>, 且一些文献的分析结果显

2000-07-11 收稿

\* 国家重点基础研究专项经费资助项目(批准号: G1998020303, G1998020307)

1) 出现混沌现象, 实际上是相应的系统中存在稳定的吸引子, 在数学上一般认为系统行为仍是稳定的, 但由于在电力系统运行中, 不允许出现大幅值振荡, 而且混沌现象已十分临近系统失稳的边缘, 因而从电力系统工程角度出发, 也可将混沌现象归为一种不可接受的系统的运行方式

示<sup>[7~10]</sup>,在系统注入功率空间中,会出现混沌区域的某些部分位于 SSSR 的 HB 界面之内的情況,果真如此,系统 SSSR 的边界组成将不仅要包含 SNB, SIB 和 HB,还要加上混沌界面. 由于混沌现象的复杂性,它的存在将会使 SSSR 和稳定监控的研究更趋复杂. 为此本文首先简要回顾了电力系统小扰动稳定研究的现状,给出了 SSSR 的相关定义;接着,利用一个示例系统和非线性动力系统的相关分析方法,研究了电力系统由单周期分岔到混沌的过程及其能量的变化规律. 据此做出了混沌现象仅出现在电力系统 SSSR 的 HB 界面之外的命题,从而建议在实用的电力系统 SSSR 的研究中,排除对混沌现象的考虑.

## 1 电力系统小扰动稳定和小扰动稳定域 SSSR

电力系统中小扰动稳定<sup>[1]</sup>是指正常运行中的电力系统在经历微小、瞬时出现但又立即消失的扰动后,恢复到原有运行状态的能力;或者,这种扰动虽不消失,但可用原来的运行状态近似地表示可能的新的运行状态. 亦即在系统经历足够小的扰动后,不会出现单调的发散和持续永不消除的振荡. 所以,小扰动稳定仅研究系统平衡点附近的性态.

电力系统模型通常可用如下的微分-代数方程(differential-algebraic equations, DAE)表示<sup>[13]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, p), \\ 0 = g(x, y, p), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态变量,  $y \in \mathbb{R}^m$  为系统的代数变量,  $p \in \mathbb{R}^p$  为系统的控制变量. 对于一个给定的  $p$ , 系统的平衡点集  $\text{EPs}(p)$  可定义为

$$\text{EPs}(p) \triangleq \{(x, y) \mid f(x, y, p) = 0 \text{ 和 } g(x, y, p) = 0, \text{ 对于给定的 } p\}. \quad (2)$$

小扰动稳定是针对电力系统的 EPs 来定义的, 假设  $(x_0, y_0) \in \text{EPs}$ , 将系统(1)在  $(x_0, y_0)$  附近线性化:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = f_x|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta x + f_y|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta y, \\ 0 = g_x|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta x + g_y|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta y, \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $f_x$  表示  $\partial f / \partial x$ ,  $f_y$  表示  $\partial f / \partial y$ ,  $g_x$  表示  $\partial g / \partial x$  和  $g_y$  表示  $\partial g / \partial y$ . 定义  $A(p) \triangleq f_x|_{(x_0, y_0)}$ ,  $B(p) \triangleq f_y|_{(x_0, y_0)}$ ,  $C(p) \triangleq g_x|_{(x_0, y_0)}$  和  $D(p) \triangleq g_y|_{(x_0, y_0)}$ , 则系统(3)可表示为

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A(p) \cdot \Delta x + B(p) \cdot \Delta y, \\ 0 = C(p) \cdot \Delta x + D(p) \cdot \Delta y. \end{cases} \quad (4)$$

当矩阵  $D(p)$  非奇异时, 消去(4)式中的  $\Delta y$ , 上式可简化为

$$\Delta \dot{x} = \tilde{A}(p) \cdot \Delta x, \quad \tilde{A}(p) = A(p) - B(p)D(p)^{-1}C(p). \quad (5)$$

**定理 1** 在矩阵  $D(p)$  非奇异的情形, 系统(1)在  $(x_0, y_0)$  点处是小扰动稳定的, 当且仅当矩阵  $\tilde{A}(p)$  的全部特征值都具有负实部.

注意到矩阵  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$ ,  $D(p)$  和  $\tilde{A}(p)$  都是参数  $p$  的函数,  $\tilde{A}(p)$  的特征值随  $p$  的变化连续, 可定义如下两类系统失稳的模式:

**定义 1** 在矩阵  $D(p)$  非奇异的情形, 随  $p$  的连续变化,  $\tilde{A}(p)$  的某一个实特征值  $\lambda$  由负变正, 则称特征值  $\lambda = 0$  的点  $p'$  为系统(1)的鞍-节分岔点 SNB. 在此点后, 系统(1)以单调方式失

去小扰动稳定性.

**定义2** 在矩阵  $D(p)$  非奇异的情形,随  $p$  的连续变化,  $\tilde{A}(p)$  的一对复特征值  $\lambda$ ,  $\lambda^* = a \pm jb$  ( $b \neq 0$ ) 的实部  $a$  由负变正,则称特征值  $\lambda, \lambda^* = \pm jb$  的点  $p'$  为系统(1)的 Hopf 分岔点 HB. 在此点后系统(1)同样失去小扰动稳定性,失稳模式为振幅不断增大的持续振荡方式.

矩阵  $D(p)$  非奇异的假设并非永远成立,在某些情况下它也会变为奇异的,此时就无法消去方程(4)中的变量  $\Delta y$ ,从而无法得到方程(5). 对应于这种现象,文献[5]定义了如下的奇异诱导分岔 SIB:

**定义3** 使  $D(p)$  奇异的点  $p'$  称为系统(1)的奇异诱导分岔点 SIB. 在此点处,代数方程(4)不可解.

下述定理描述了系统在 SIB 点处的特性:

**定理2**<sup>[6,14]</sup> 随  $p$  的连续变化,矩阵  $D(p)$  有一个实特征值  $\mu$  在 SIB 处变号,在  $\mu$  过零点,  $\tilde{A}(p)$  有一个特征值  $\lambda$  改变符号,并由一端的无穷大突变为另一端的无穷大 ( $+\infty \rightarrow -\infty$  或  $-\infty \rightarrow +\infty$ ). 对于矩阵  $\tilde{A}(p)$  有一特征值  $\lambda$  由  $-\infty \rightarrow +\infty$  的情况,系统失去小扰动稳定,并表现为单调失稳.

在参数空间  $\mathbb{R}^p$  上,系统(1)的小扰动稳定域  $\Omega_{\text{sss}}$  定义如下:

**定义4**

$$\Omega_{\text{sss}} \triangleq \{p \in \mathbb{R}^p \mid \tilde{A}(p) \text{ 的所有特征值的实部为负}\}. \quad (6)$$

注意到,定义4中  $\Omega_{\text{sss}}$  并未假设  $D(p)$  非奇异,因而可以得出系统 SSSR 的边界  $\partial\Omega_{\text{sss}}$  是由3类点集(分岔界面)组成的结论<sup>[13]</sup>:

$$\partial\Omega_{\text{sss}} = \{\text{SNBs}\} \cup \{\text{HBs}\} \cup \{\text{SIBs}\}, \quad (7)$$

其中 SIB 界面很少出现.

近年来,各国学者<sup>[7~12]</sup>在电力系统仿真中相继发现了混沌现象,它表现为持续而无规则的振荡,电力系统安全运行绝不允许混沌出现. 同时文献[7~10]的研究结果显示,在  $\mathbb{R}^p$  空间中混沌区域可能出现在 SSSR 的 HB 分岔界面之内,如图1所示(横轴  $Q_{\text{ld}}$  为无功功率,纵轴  $d$  为系统阻

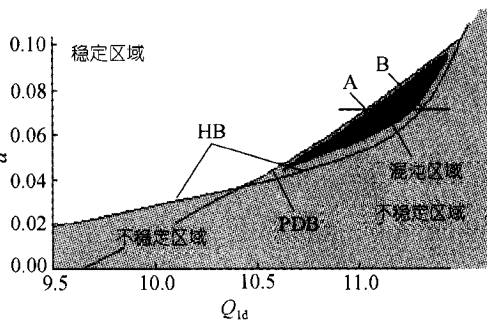


图1 稳定区域边界中含有混沌约束的情况

尼). 正如前述,若此结论成立,则必将大大增加 SSSR 研究的难度.

## 2 电力系统小扰动分岔的演变过程和混沌

混沌是在“完全确定性的模型下产生的不确定性现象<sup>[15]</sup>”. 从混沌现象的描述可以看出,很难为混沌下一个完整、准确的定义,在长期的研究中,人们只是感性认识到混沌系统  $\Psi$  所存在的一些典型的性质<sup>[15,16]</sup>,如:  $\Psi$  是有界的(因而也称之为奇异吸引子);  $\Psi$  的任何轨道都是不稳定的;  $\Psi$  含有不可数无穷多个在  $\Psi$  中稠密的轨道;  $\Psi$  的周期轨道是稠密的;轨道对初值有敏感的依赖性,即任意两个轨道不论其初始点如何靠近都将随  $t$  的增加而截然不同,等等. 以下我们用一个具有混沌现象的电力系统为例说明其中出现混沌时分岔演变的过程.

### 2.1 混沌现象示例

本文选用文献[12]的2机3节点系统(如图2所示),其模型见附录A,除特别声明外,参数

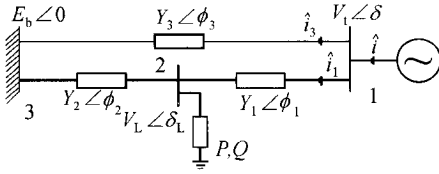


图 2 示例系统

均同文献[12]. 将方程(A5)~(A8)(A12)~(A19)代入(A1)~(A4)和(A9)~(A11)可以得到如下形式的微分方程:

$$\dot{x} = f(x, p), \quad (8)$$

其中  $p$  为分岔变量,在附录 A 中,当发电机采用双转子电路模型且装有快速励磁时,系统表达式(8)的状态变量为  $x = [\delta, s_m, E'_d, E'_q, E_{fd}, \delta_L, V_L]^T$ ,各变量的含义由图 2 及附录 A 可知. 当发电机仅采用端电压恒定的经典模型时,状态变量变为  $x = [\delta, s_m, \delta_L, V_L]^T$ ,若同时取  $Y_3 = 0$ ,则该模型将与文献[7~10]等采用的模型基本相同(注:不同之处在于,因 Chiang 模型<sup>[8]</sup>的惯性常数  $M$  的取值属非正常参数<sup>[11,12]</sup>而对其进行了修正). 本文研究中,分岔变量  $p$  仍取为  $Q_{ld}$ .

在图 2 系统中,当发电机采用双转子电路模型且装有快速励磁装置,初始点取为  $x_0 = [0.7611155, 0, 1.332678, -0.3283270, 4.198358, 0.2396075, 0.7795296]^T$ ,  $T_A = 0.05$ ,  $K_A = 140$ ,且取初值(其他系统参数同文献[12]):

Case 1:  $Q_{ld} = 1.2030000$  (图中用实线表示),

Case 2:  $Q_{ld} = 1.2030001$  (图中用虚线表示)

时,对系统进行仿真,可得到图 3 所示的结果. 图 3(a)给出了 Case 1 的  $t-\delta$  图,(b)给出了 Case 1 和 Case 2 的  $t-\delta$  图在  $t = 1460 \sim 1500$  s 窗口区间的放大结果,(c)则给出了 Case 1 的  $\delta-s_m$  相

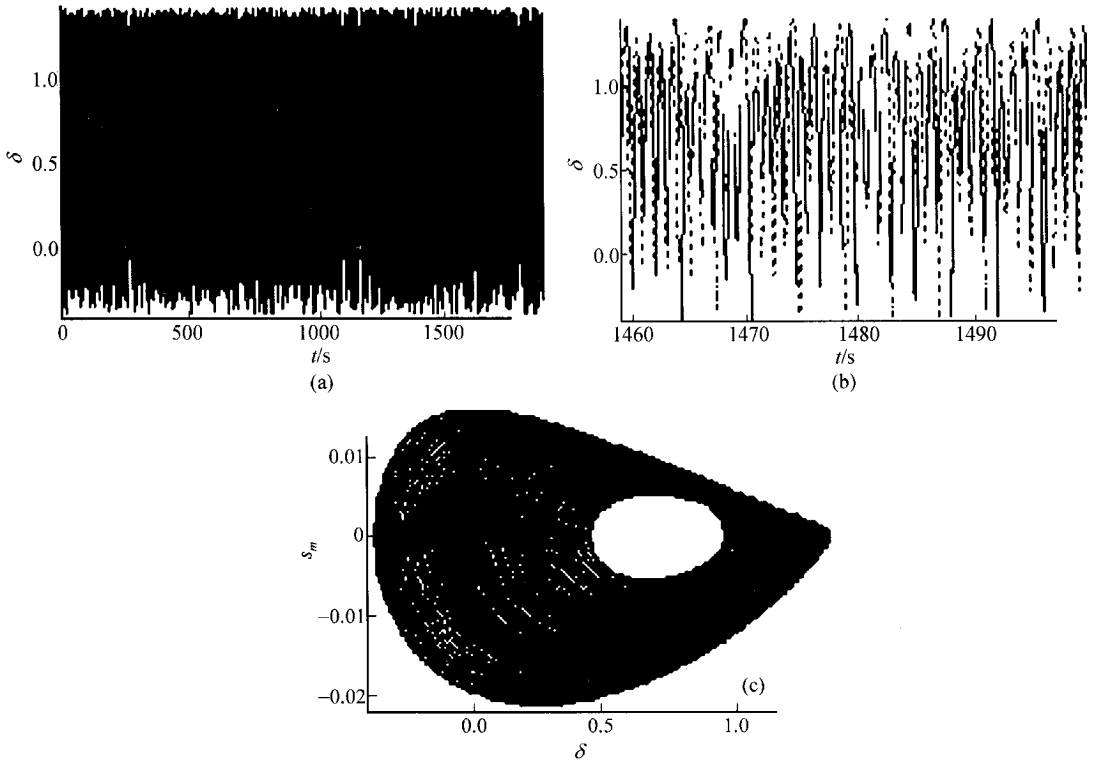


图 3 混沌系统的仿真结果( $t-\delta$  曲线)(a)和对初始值的敏感性( $t-\delta$  曲线)(b)及其  $\delta-s_m$  相图(c)

图. 不难发现,此时系统具有混沌吸引子的全部特性: 如,有界性(采用不同积分方法,积分时间可达 30000 s,都可得到相同结果)、轨道的不稳定性、周期轨道的稠密性和对初始点的敏感依赖性等.

2.2 系统中出现混沌时分岔的演变过程

利用 Poincaré 截面  $\Theta$  和 Poincaré 映射技术<sup>[15]</sup>,在图 4 中给出了该系统的详细分岔结构,其中  $\Theta \triangleq \{s_m = 0, \text{ 且 } \delta < \text{系统振荡中心的角度 } \delta_c\}$ ,  $\tilde{\delta}$  为  $\delta$  在其上的投影. 图 5 对系统周期演变作了详细的解释: 当  $Q_{1d} < 1.1915$  时系统中存在着稳定的周期解(图 5(b)中的 1),当  $Q_{1d}$  在 1.1915 ~ 1.1970 之间时存在着稳定的二周期轨道(图 5(b)中的 2),接下来系统出现四周期(图 5(b)中的 3,  $Q_{1d} \approx 1.1970$ )和八周期( $Q_{1d} \approx 1.19808$ )...,直至系统中出现混沌(图 5(b)中的 4),此时,  $Q_{1d} \approx 1.19845$ ,系统中存在稳定的奇异吸引子). 由典型的 Logistic 分岔图可以知道,系统的混沌区域内存在稳定周期轨道组成的窗口<sup>[15]</sup>,本系统也不例外:当  $Q_{1d} \approx 1.20136$  时,系统出现了稳定的三周期轨道(图 4 中的小窗口和图 5(b)中的 5),并一直保持到  $Q_{1d} \approx 1.201525$ ,此后,系统还相继出现了六周期(图 5(b)中的 6)和十二周期( $Q_{1d} \approx 1.201559$ ),...,直至系统再次出现稳定的奇异吸引子(图 5(b)中的 7,  $Q_{1d} \approx 1.20160$ ),重归于混沌. 在此过程中系统振荡的幅度变得越来越大,直至  $Q_{1d} \approx 1.2035$  附近

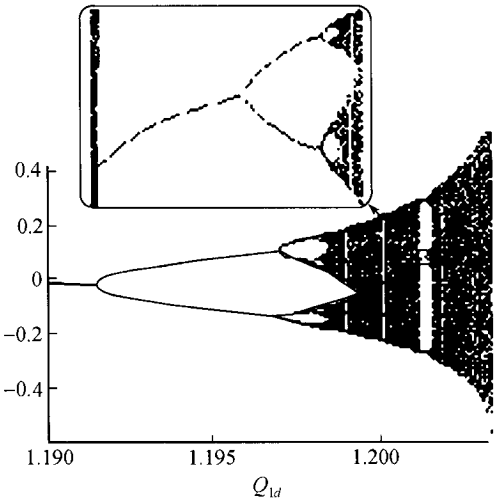


图 4 以  $\tilde{\delta}$  和  $Q_{1d}$ 绘制的系统分岔图

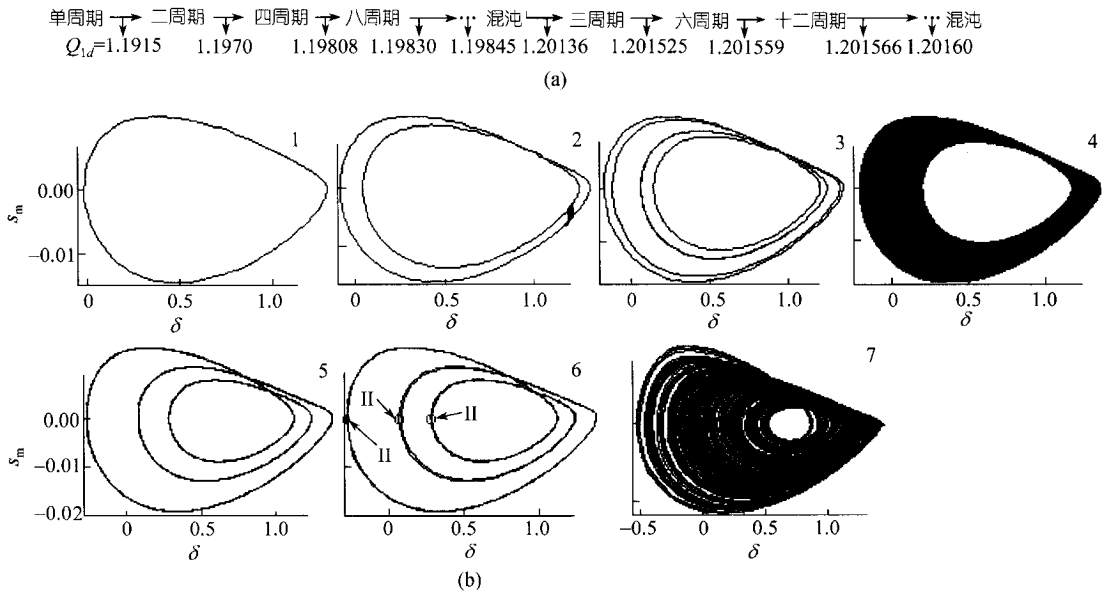


图 5 系统相应的周期分布和演变示意图(a)和各周期区域内的  $\delta$ - $s_m$  相图(b)  
1 示单周期,2 示二周期,3 示四周期,4 示混沌,5 示三周期,6 示六周期,7 示混沌

时,系统达到奇异吸引子稳定的临界状态.

混沌系统的分岔图必存在分形结构<sup>[15]</sup>,即将其任意小窗口放大后将得到与原整体分岔图相似的图像.图 4 的上部给出对系统三周期窗口中间分支放大后的结果,从图中我们可以看出,放大后的小窗口与原分岔图有相同的结构,也是通过连续的倍周期分岔再次达到混沌,且其中还包含着更小的窗口.为便于图示,图 5(b)只给出几个典型点处的相轨迹图,实际上在混沌系统任意小间隔内都包含有更为精细的结构,如图 4 中在三周期窗口前就存在六周期和五周期的窗口(图 4 中左数第一和第二个窗口),只是其仿真和图示更为困难.

从上述示例结果不难发现:在电力系统分岔演变过程中,倍周期分岔(period doubling bifurcation, PDB)将先于混沌现象出现,且它们之间的距离很近,鉴于混沌界面是很难精确捕捉的,所以从工程实用的角度出发,在研究 SSSR 时,可以用倍周期分岔界面 PDB 来近似计及混沌现象的影响.

### 3 电力系统由分岔向混沌演变过程中能量递增的规律

研究混沌现象的两个著名的定理, Sarkovskii 定理<sup>[15]</sup>和 Li-Yorke 定理<sup>[16]</sup>均利用了 Sarkovskii 序列(见附录 B),该序列在实际的物理系统中,总是对应于各分岔现象所需“能量”的次序,如 Lorenz 系统所需的临界温度<sup>[17]</sup>、Bénard 水花(cells)中的临界温度差<sup>[18]</sup>、断裂时所需的临界压力<sup>[19]</sup>等等,在电力系统中,周期演变的过程也遵循如下规律:

**命题 1** 在电力系统分岔演变过程中,系统每次出现倍周期分岔所需能量是依次递增的,即能量  $E_1$ (单周期)  $< E_2$ (二周期)  $< \dots < E_{\text{chaos}}$ ,此能量递增的序列所对应周期的排列,正好对应于 Sarkovskii 序列最末一行的反序.

在电力系统中,系统的能量  $E_{\text{sys}}$  由动能  $E_k$  和势能  $E_p$  两部分组成<sup>[13]</sup>,即

$$E_{\text{sys}} = E_k + E_p. \quad (9)$$

为简化起见,仅选择经典模型的暂态能量函数进行说明,且假定阻尼系数  $D = 0$ ,线路为纯感性,即互电导  $G = 0$ . 此时动能和势能分别为

$$E_k = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{ng} M_i \omega_i^2, \quad (10)$$

$$E_p = - \sum_{i=1}^{ng} P_{Gi}^0 (\delta_i - \delta_i^s) - \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=i+1}^{ng+1} V_i V_j B_{ij} \{ \cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s) \}, \quad (11)$$

其中  $M_i$  为发电机  $i$  的惯性常数;  $\omega_i$  为发电机  $i$  的角速度偏差,在本文中用  $s_{m,i}$  表示;  $ng + 1$  为系统发电机节点总数(以第  $ng + 1$  台发电机为参考节点);  $\delta_i$  为发电机  $i$  的转子相角;  $B_{ij}$  为节点  $i, j$  间支路的互电纳;本文在 HB 附近选取一个系统稳定平衡点作为基准,并用上角标  $s$  表示,以比较不同周期点能量的变化.表 1 给出了图 2 系统在图 4 所示的演变过程中能量的变化情况,不难看出其规律与命题 1 所述一致.

系统的能量是由系统的扰动导致的(这里将系统负荷和传输功率的变动也统一视为扰动因素),扰动使系统的能量增加,到系统本身无法承受时,就会引起系统的分岔和混沌等现象,因而有如下推论:

**推论 1** 从系统能量增量的角度看,在电力系统出现混沌振荡现象之前必已出现周期轨道,即系统已然发生了 Hopf 分岔.因而在电力系统小扰动稳定性的研究中,系统负荷逐渐

增大时(亦即  $p$  增大时),将不会出现混沌先于 Hopf 分岔发生的现象.

表 1 系统周期演变和能量的关系

| 序号               | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $Q_{1d}$         | 1.190000 | 1.193000 | 1.195000 | 1.197000 | 1.198100 | 1.199500 |
| 周期               | 1        | 2        | 2        | 4        | 8        | 混沌       |
| $E_{\text{sys}}$ | 0.233939 | 0.276308 | 0.296612 | 0.311580 | 0.331549 | 0.355675 |

| 序号               | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $Q_{1d}$         | 1.201500 | 1.201530 | 1.201600 | 1.201620 | 1.201630 | 1.203462 |
| 周期               | 3        | 6        | 6        | 6        | 12       | 混沌       |
| $E_{\text{sys}}$ | 0.397697 | 0.399611 | 0.401730 | 0.402382 | 0.402695 | 0.574087 |

**注** 当电力系统中的传输功率加大时会导致节点间相对角度变大,相对角的变大在稳定范围内会引起系统的势能储能增加(相关讨论详见文献[13]). 在混沌出现时如果对应的负荷功率较小(相应于传输功率较少),系统的势能就少,而由上述讨论可知,混沌出现所需能量较大,从而要求系统中的发电机必须具有较大的动能,即有相当大的角速度,这就是为什么文献[7~10]等混沌示例所选起始点角速度特别大( $x_0 = [0.3, 1.5, 0.2, 0.97]^T$ ,  $\omega_0 (= s_m) = 1.5$ )的原因. 如此大的初始角速度偏差,不仅全然不会在真实系统中存在,而且其所涉及的场景也将完全超出小扰动稳定研究的范畴.

**推论 2** 既然电力系统实际运行中不允许大幅值的周期振荡出现,即不允许 Hopf 分岔的出现,所以在实用的 SSSR 的研究中可以排除对混沌现象的考虑,按(7)式定义 SSSR 的边界面  $\partial\Omega_{\text{SSR}}$  即可.

**注** 上述推论 2 只表明在实用的小扰动稳定域边界的刻画中,不必计及混沌现象存在的影响. 但混沌现象也可能是系统在经受大扰动后的一种表现形式,因而在大扰动稳定研究中,尚需对其进行深入的探讨,见下文第 5 节的讨论.

4 小扰动稳定域的示例和分析

在本节中,我们将利用非线性系统分岔计算工具 AUTO97<sup>[20]</sup>研究系统联络线导纳  $Y_3$  和发电机励磁系统参数对混沌现象和 Hopf 分岔的影响,以便进一步证明上节推论的正确性.

4.1 系统 SSSR 边界与系统间联络强度的关系

图 6 给出了图 2 系统中不同的  $Y_3$  取值对系统 Hopf 分岔界面和混沌界面所产生的影响(用 PDB 来近似描述混沌界面)和相应的系统 SSSR. 可见系统中是否会出现周期性振荡甚至出现混沌,与系统间的联络强度有很大的关系. 在联络较弱的系统中,振荡失稳的可能性较大,而在联络紧密的系统中,不易出现振荡失稳,更不易出现混沌现象.

4.2 系统 SSSR 边界与发电机励磁参数的关系

针对系统采用双转子电路发电机模型且装有快速励磁装置的情况,图 7(a)给出了不同励磁参

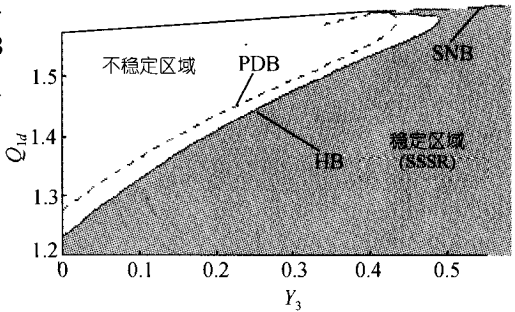


图 6 系统稳定与系统间联络强度的关系

数下  $\partial\Omega_{\text{SSR}}$  上振荡失稳的部分,其中上部的曲面为 PDB 的界面,下部曲面为 HB 的界面,  $Q_{1d}$  较小的界面以下为系统实用的 SSSR. 为示例清楚,在图 7(b)中给出了两者间  $Q_{1d}$  的差值.

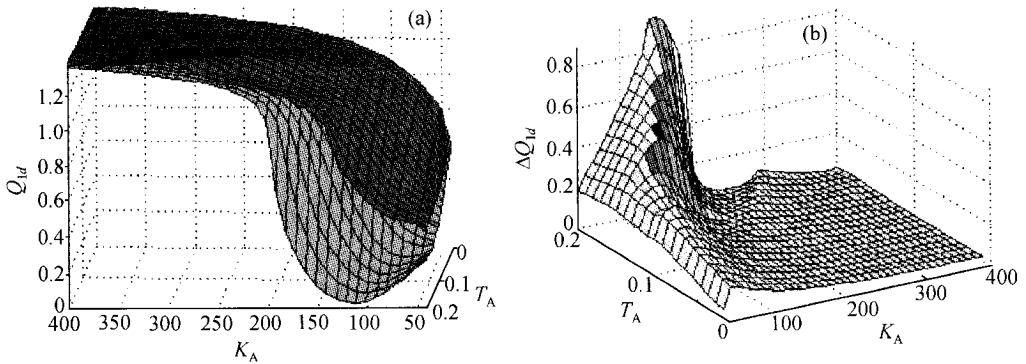


图 7 不同  $T_A$  和  $K_A$  值下的 PDB(上部)和 HB(下部)界面(a)及不同  $T_A$  和  $K_A$  值下的 PDB 和 HB 负荷差(b)

由图 7 可以看出,在示例的  $K_A$  和  $T_A$  范围内(即励磁系统正常取值范围),对任一组给定的励磁系统参数( $K_A, T_A$ ),描述混沌现象的 PDB 界面上的  $Q_{1d}$  都大于 HB 界面上相应的值. 这表明在实用的电力系统 SSSR 的描述中,在 PDB 界面和 HB 界面这两者中,只需计及后者. 当 HB 不出现时,则只需用 SNB 界面描述 SSSR.

从图 7(b)还可以大致了解 Chiang<sup>[7~10]</sup> 的模型中导致  $Q_{\text{PDB}} < Q_{\text{HB}}$  的原因. 从图中可以看出,当励磁系统放大系数  $K_A$  很大和励磁时间常数  $T_A$  很小时,  $\Delta Q_{1d} (= Q_{\text{PDB}} - Q_{\text{HB}})$  变得很小,在极限情况下(即放大倍数趋于无穷大,而时间常数为 0,此为假定端电压恒定的经典发电机模型的假设条件),  $\Delta Q_{1d}$  趋于 0. 因而我们有理由认为,就图 2 系统而言,出现文献[7~10]等报告的情况,即  $Q_{\text{PDB}} < Q_{\text{HB}}$  的情况很可能是模型考虑不周(如假设发电机端电压始终恒定)加之  $\omega_0$  取为 1.5 而造成的,正常研究中应当是  $Q_{\text{PDB}} > Q_{\text{HB}}$ .

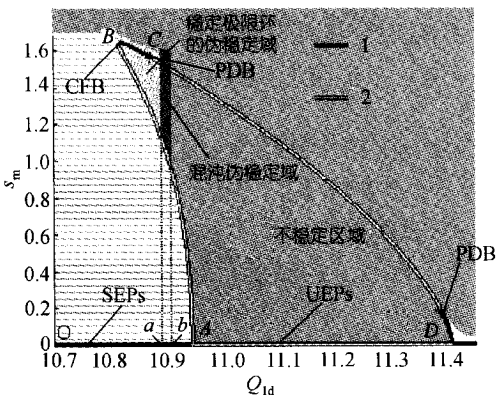


图 8 系统各吸引域的分布图

1 示系统平衡点(SEPs)或极限环曲线中的稳定分支,2 示系统平衡点(UEPs)或极限环曲线中的不稳定分支

## 5 电力系统伪稳定域和对图 1 的进一步评析

为了对图 1 做进一步的评析,本节采用与文献[7~10]相同的模型和参数设置,在图 1 存在混沌现象的  $d$  的取值范围内,任取一固定的  $d$  值(如  $d = 0.07$ ,见图 1 中 AB 线,此时对应于某一特定的系统). 同样仿照文献[9]的方法,根据 Floquet 定理<sup>[15]</sup>,从系统平衡点集的 Hopf 分岔点(如图 8 中的 A 点)出发,缓慢变动  $Q_{1d}$  和极限环振荡周期,并保证系统的一个 Floquet 乘子永远为 1.0<sup>[20]</sup>,可在系统(8)的参数空间中搜索出其极限环曲线,该曲线把  $Q_{1d}$ - $s_m$  平面分隔为几部分

(见图8).若进一步将系统能够收敛到稳定的混沌吸引子的运行点集定义为混沌的伪稳定域(pseudo-stability region);能够收敛到系统稳定平衡点(SEP)的运行点集定义为SEP的伪稳定域;以及能够收敛到稳定(单周期或多周期)极限环的运行点集定义为极限环的伪稳定域,则系统的SEP,稳定极限环和混沌的伪稳定域以及系统的不稳定域4者的分布在 $Q_{ld}$ - $s_m$ 平面上如图8所示.系统实际的静态平衡点(稳定平衡点集SEPs和不稳定平衡点集UEPs)对应于图中的横轴.在A点处系统发生Hopf分岔,由A点开始的翼状曲线 $\widehat{ABD}$ 即为系统(8)的极限环曲线.在B点处该曲线发生环面折叠分岔(cyclic fold bifurcation, CFB<sup>[10]</sup>),不稳定的极限环分支 $\widehat{AB}$ 变为稳定的极限环分支 $\widehat{BC}$ ,在C点处系统发生第一次倍周期分岔PDB,在其右端不远处即出现混沌的伪稳定域.从图中不难看出,系统收敛到混沌的伪稳定域时,将首先经过极限环分支界面(即 $\widehat{AB}$ 段和 $\widehat{BC}$ ),从而证明了第3节的推论1和2的正确性.

对于图8我们还需特别强调一点,系统稳定平衡点SEP的伪稳定域全然不同于前边定义的小扰动稳定域(SSSR).SEP的伪稳定域并未要求系统的初始角速度偏移 $s_m(=\omega_0)$ 一定很小(即扰动很小),而是将能够吸引到SEP的系统运行点集均归入其内;而小扰动稳定的研究仅关心系统在平衡点( $s_m=0$ )附近的稳定性态.由此不难找出在图1中得出错误结论的一个可能的原因是,混淆了大扰动稳定(如暂态稳定)和小扰动稳定的研究方法,以致把具有很大初始角速度偏移情况下的伪稳定域(即 $s_m \gg 0$ 的区域)误作为SSSR,如图8中的极限环和混沌的伪稳定域实际上已经在大扰动稳定性讨论的范围内,且实际系统早已失去暂态稳定而进入异步振荡阶段.这正是在相应的稳定域前加“伪”字的原因(我们所以还要绘出图8,完全是仿效文献[7~10],以便分析出现图1现象的原因).

同图8相对照不难发现,坐标选择不当是图1得出错误结论的另一个原因:当初始速度偏移 $\omega_0$ 较大时,混沌吸引子的出现与 $\omega_0$ 的取值关系密切,而在图1中只给出 $d$ 和 $Q_{ld}$ 坐标(缺少 $\omega_0$ 坐标),故不能确切描述伪稳定域,从而造成混沌区域在HB界面之内的假象.如图8中的 $ab$ 线段实际为混沌伪稳定域在横轴(系统的功率注入空间)上的投影,但它并不能完全表征系统的混沌伪稳定域.

## 6 结论

本文在小扰动稳定性研究中用一个电力系统模型展示了由Hopf分岔到混沌演变的详细过程,揭示了该演变过程中能量递增的规律.在工程上实用的小扰动稳定域SSSR的研究中,完全可以用HB的界面来描述与振荡失稳相关的SSSR的边界,而不必再计及其复杂得多的混沌现象.同时对文献中关于混沌吸引域进入到SSSR中的HB界面内侧的原因进行了评析.

## 参 考 文 献

- 1 IEEE Task Force. Proposed terms and definitions for power system stability. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1982, PAS-101(7): 1894~1897
- 2 Kwatny H G, Fischl R F, Nwankpa C O. Local bifurcation in power systems: theory, computation and application. Proceedings of the

- IEEE, 1995, 83(11): 1456 ~ 1483
- 3 Kwatny H G, Pasrija A K, Bahar L Y. Static bifurcations in electric power networks: loss of steady-state stability and voltage collapse. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1986, CAS-33(10): 981 ~ 991
  - 4 Abed E H, Varaiya P P. Nonlinear oscillations in power systems. International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 1984, 6(1): 37 ~ 43
  - 5 Zaborsky J. Some basic issues in voltage stability and viability. In: Proceedings of Bulk Power Voltage Phenomena Voltage Stability-II. Potosi: EPRI Report, 1988, EL-6183(1): 17 ~ 60
  - 6 Guo S X, Salam F M A. The number of (equilibrium) steady-state solutions of models of power systems. IEEE Transactions on Circuits and Systems- I: Fundamental Theory and Applications, 1994, 41(9): 584 ~ 600
  - 7 Ajjarapu V, Lee B. Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(1): 424 ~ 431
  - 8 Chiang H D, Liu C C. Chaos in a simple power system. IEEE Transactions on Power Systems, 1993, 8(4): 1407 ~ 1417
  - 9 Lee B, Ajjarapu V. Period-doubling route to chaos in an electrical power system. IEEE Proceedings-C, 1993, 140(6): 490 ~ 496
  - 10 Tan C W, Varghese M, Varaiya P, et al. Bifurcation, chaos, and voltage collapse in power systems. Proceedings of the IEEE, 1995, 83(11): 1484 ~ 1495
  - 11 Hua O W, Eyad H A. Bifurcations, chaos, and crises in voltage collapse of a model power system. IEEE Transactions on Circuits and Systems- I: Fundamental Theory and Applications, 1994, 41(3): 294 ~ 302
  - 12 Rajesh K G, Padiyar K R. Bifurcation analysis of a three node power system with detailed models. International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 1999, 21(5): 375 ~ 392
  - 13 余贻鑫, 王成山. 电力系统稳定性的理论与方法. 北京: 科学出版社, 1999
  - 14 Venkatasubramanian V, Schättler H, Zaborsky J. Voltage dynamics: study of a generator with voltage control, transmission, and matched WM load. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(11): 1717 ~ 1733
  - 15 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear dynamic and chaos. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1986
  - 16 Li T Y, Yorke J A. Period three implies chaos. The American Mathematics Monthly, 1975, 82(10): 985 ~ 992
  - 17 Lorenz E N. The problem of deducing the climate from the governing equations. Tellus, 1964, 16(1): 1 ~ 11
  - 18 Verlarde M G, Normand C. Convection. Science America, 1980, 243(1): 92 ~ 109
  - 19 林鸿溢, 李映雪. 分形论——奇异性探索. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
  - 20 Doedel E J, Champneys A R. AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont). Montreal: Concordia University, 1998

## 附录 A 系统模型

### (i) 发电机方程

$$\dot{\delta} = \omega_B s_m, \quad (A1)$$

$$2H\dot{s}_m = -ds_m + P_m - P_g, \quad (A2)$$

$$T'_{d0}\dot{E}'_q = -E'_q + (x_d - x'_d)i_d + E_{fd}, \quad (A3)$$

$$T'_{q0}\dot{E}'_d = -E'_d - (x_q - x'_q)i_q, \quad (A4)$$

$$E'_q = v_q - x'_d i_d, \quad (A5)$$

$$E'_d = v_d + x'_q i_q, \quad (A6)$$

其中:  $2H$  为惯性常数,  $d$  为阻尼系数,  $\omega_B$  为系统频率基准,  $s_m$  为发电机滑差,  $P_m$  为原动功率(设为常数), 发电机用双转子电路模型表示,  $P_g$  为发电机输出的电磁功率, 其中  $s_m, P_g$  分别为

$$s_m = (\omega - \omega_B)/\omega_B, \quad (A7)$$

$$P_g = E'_q i_q + E'_d i_d + (x_d - x'_d)i_d i_q. \quad (A8)$$

### (ii) 励磁系统方程

采用快速励磁系统

$$T_A \dot{E}_{fd} = -E_{fd} + K_A(V_{ref} - V_t). \quad (A9)$$

(iii) 负荷方程

负荷模型(同文献[7~12])为如下格式:

$$P = P_{ld} + P_0 + p_1 \delta_L + p_2 \dot{V}_L + p_3 V_L, \quad (A10)$$

$$Q = Q_{ld} + Q_0 + q_1 \delta_L + q_2 V_L + q_3 V_L^2. \quad (A11)$$

(iv) 网络方程

为节省篇幅,详细的公式推导略去,只给出相应的结果. 首先定义

$$Y \angle \phi = Y_1 \angle \phi_1 + Y_2 \angle \phi_2, \quad (A12)$$

$$a = E_b Y_3 \cos(\delta + \phi - \phi_3) + Y_1 V_L \cos(\delta_L - \delta - \phi + \phi_1), \quad (A13)$$

$$b = -E_b Y_3 \sin(\delta + \phi - \phi_3) + Y_1 V_L \sin(\delta_L - \delta - \phi + \phi_1), \quad (A14)$$

$$\theta = \delta + \tan^{-1}(v_d/v_q), \quad (A15)$$

$$\alpha = \delta_L - \theta - \phi_1; \beta = \delta_L - \phi_2. \quad (A16)$$

经推导可得节点 1 和节点 2 处的平衡方程

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi - Yx'_q \\ -(\sin\phi - Yx'_q) & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YE'_q - a \\ YE'_q - b \end{bmatrix}, \quad (A17)$$

$$P = V_L V_L Y_1 \cos\alpha - V_L^2 Y_1 \cos\phi_1 + E_b V_L Y_2 \cos\beta - V_L^2 Y_2 \cos\phi_2, \quad (A18)$$

$$Q = V_L V_L Y_1 \sin\alpha + V_L^2 Y_1 \sin\phi_1 + E_b V_L Y_2 \sin\beta + V_L^2 Y_2 \sin\phi_2. \quad (A19)$$

## 附录 B Sarkovskii 序列

**定义 B1** Sarkovskii 序列(其中分号后为注释)

$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \cdots$ ; 首先排列出自然数中, 大于 1 的奇数序列  $3, 5, 7, \cdots$ ;

$(3 \times 2^1) \triangleright (5 \times 2^1) \triangleright (7 \times 2^1) \triangleright (9 \times 2^1) \cdots$ ; 接下来排列第一排 2 倍的序列  $3 \times 2, 5 \times 2, 7 \times 2 \cdots$ ;

$(3 \times 2^2) \triangleright (5 \times 2^2) \triangleright (7 \times 2^2) \triangleright (9 \times 2^2) \cdots$ ; 接下来排列第一排  $2^2$  倍的序列  $3 \times 2^2, 5 \times 2^2, 7 \times 2^2 \cdots$ ;

$\cdots$ ; 依次排列  $2^3, 2^4, 2^5, \cdots$  倍的序列;

$\cdots 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 2 \triangleright 1$ ; 最后, 将所有余下的自然数从大到小排列, 即形成 2 方幂  $2^3, 2^2, 2^1, 1$  的降

序排列. 因而 Sarkovskii 序列包含了全部的自然数  $N$ .