

限制性三体问题中轨道共振的演化*

刘 林 廖新浩

(南京大学天文系)

摘 要

要了解轨道共振在动力演化中所起的作用,必须对其长时间的性态进行考查,本文主要对 $p/q = 2/1, 3/2$ 和 $3/1$ 三种轨道共振特征的变化作了较全面的数值探索,得到一些有益的结果.

一、引 言

在太阳系中,小行星的空间分布,除集中在火星与木星轨道之间形成一个小行星带以外,还有着明显的特征:空隙.这首先由 Kirkwood (1867 年) 发现,后被人们取名为“Kirkwood 空隙”,即绕日平运动速度 n 与木星平运动速度 n_1 之比为 $2/1, 3/1, \dots$, 这些通约带的小邻域内,找不到小行星.然而,在 $3/2$ 通约处却有小行星密集的现象.这引起了天文学家们的极大兴趣,一百多年来,虽有种种解释,但都不能令人满意^[1]. 尽管问题并未得到满意的解决,但上述空隙和聚集的现象,却引起天体力学家们的高度重视,始终把它与通约问题导致的轨道共振现象联系在一起.

当然,轨道共振现象并不仅仅存在于小行星带,在太阳系内,甚至可以说,在宇宙空间中都是普遍存在的.这种力学机制对天体运动的动力演化到底起什么作用,至今并未完全搞清楚.不过,要严格解决这一问题,目前数学工具还不够,即使最简单的三体系统亦是如此.本文就是以太阳、木星和小行星这样的三体系统作为背景,来研究共振运动的演化问题,其中太阳作为中心天体,木星作为摄动天体,而小行星即运动天体(或被摄天体),这是一个限制性三体问题,摄动天体的运动是确定的.相应的共振情况对应 $n/n_1 = p/q = 2/1, 3/2, 3/1, \dots$, n 和 n_1 分别为运动天体和摄动天体的平运动.

二、轨道共振的基本特征

用不同数学模型来研究上述三体系统中的轨道共振,将会给出不同的结果,而根据它们之间的差别可以得到有关这一问题的某些重要信息.在各种数学模型中,最简单的一种就是仅取主要摄动项的理想共振模型^[2],它能够给出轨道共振的基本特征^[3],因此,我们可以用它作为研究轨道共振的基础.

本文 1987 年 3 月 14 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目.

理想共振模型是一种最简单的平均模型, 可以简化成一个自由度系统, 两个共振变量记作 $\tilde{L}$ 和 $\tilde{I}$, 相应的 Hamilton 函数为:

$$\bar{F}^{(1)} = F(\tilde{L}, e, \tilde{I}) = F_0(\tilde{L}) + F_1(\tilde{L}, e, \cos \tilde{I}), \quad (1)$$

$$|F_1|/|F_0| = O(\varepsilon). \quad (2)$$

其中共振变量 $\tilde{L}$ 和 $\tilde{I}$ 及其有关量的定义如下^[3]:

$$\tilde{L} = \sqrt{a}/q, \quad (3)$$

$$\tilde{I} = qM - pM_1 + p\beta, \quad \beta = (\omega + Q) - (\omega_1 + Q_1), \quad (4)$$

$$e = e(\tilde{L}). \quad (5)$$

本文采用的计算单位对应引力常数 $\mu = 1$, a, e, i, ω, Q, M 就是 Kepler 根数, 而带有下列“1”的量是摄动天体(木星)的轨道根数. 小参数 ε 的大小不仅与摄动天体的质量 m_1 (以中心天体的质量为单位)有关, 同时也依赖运动天体的轨道偏心率 e , 有

$$\varepsilon = O(m_1 e^{p-q}). \quad (6)$$

由(1)式确定的动力系统, 在相平面 $(\tilde{L}, \tilde{I})$ 上有两类平衡点: 中心和鞍点. 后者显然是不稳定的, 至于前者, 可以证明它是稳定的^[4]. 这一稳定平衡点对应实际空间中一条大小、形状和倾角均不变的椭圆轨道. 奇次共振 ($p-q$ 为奇数, 如 $p/q = 2/1, 3/2, \dots$) 和偶次共振 ($p-q$ 为偶数, 如 $p/q = 3/1, \dots$) 的平衡点分布是不同的, 在 2π 的区间上(对 $\tilde{I}$), 一般而言, 奇次共振的中心和鞍点分别对应 $\tilde{I}_c = 0, \tilde{I}_s = \pi$, 而偶次共振则正好相反, 即 $\tilde{I}_c = \pi, \tilde{I}_s = 0$. 中心附近的小邻域内都是闭轨线. 两类平衡点对应的 $\tilde{L}_c$ 和 $\tilde{L}_s$ 值, 都满足于 $\bar{n}/n_1 = p/q$, $\bar{n}$ 分别由 $\tilde{L}_c$ 和 $\tilde{L}_s$ 确定, 这就是通约问题引起的一种特有的运动现象. 对于低阶共振, 如 $p/q = 2/1$, $\bar{F}^{(1)}$ 中所包含的 e 因子对平衡点的分布影响很大^[3], 当 e 不太小时, 平衡点及其周围的轨线分布如图 1, 而当 e 较小时, 会出现如图 2 和图 3 的分布状况. 图中 $y = \tilde{L}$, $x = \tilde{I}/2$.

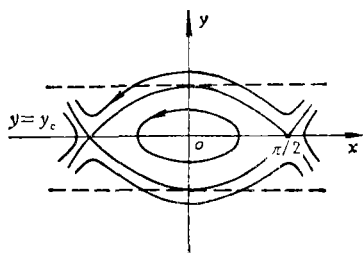


图 1

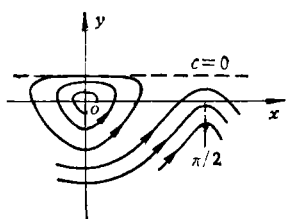


图 2

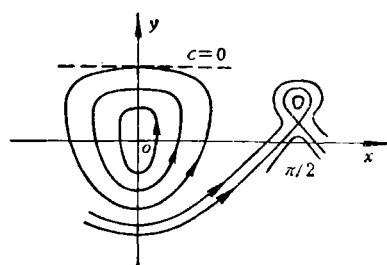


图 3

显然, 中心附近的运动(对应闭轨线), 其共振幅角 $\tilde{I}$ 的变化是有一定范围的, 相当于摆动, 此即天平动现象, 而中心附近的这一区域就称为天平动区域. 图 1 中虚线所包围的部分常称为共振带, 其“宽度”的量级为 $\varepsilon^{1/2}$, 当 e 小时, 这一宽度自然也是很小的. 因此, 由于有各种因素的影响, 在实际运动中图 2 和图 3 (特别是后者) 对应的共振现象几乎不会出现. 处于天平动区域内的运动, 对共振周期平均的平运动 $\bar{n}$ (或平均半长径 $\bar{a}$) 与中心所对应的共振值 n_c (或 a_c) 几乎相同, 即 $\bar{n}/n_1 \approx p/q$.

理想共振模型 (1) 与实际运动显然是有明显差别的. 因此, 上述共振运动的特征在实际运动中是否存在, 这正是我们要研究的. 首先, 可分别考查所略去的普通周期项, 高频共振项 (即 $k\bar{l}$ 项, $k \geq 2$), 倾角项和 e_1 项各自对理想共振的影响, e_1 是摄动天体的轨道偏心率. 我们曾用简便的近似方法获得了上述各种影响的趋势^[5-6]. 结果表明, 当 $e_1 = 0$ 时 (对应圆型限制性三体问题), 其它各项的影响是不明显的, 理想共振给出的特征基本上保持不变; 而 e_1 项的影响却十分显著, 随 e_1 值的增大, 共振特征将会完全消失. 当 e_1 值不太大时 (如木星, $e_1 = 0.0484$), 共振特征在一定程度上还能保持. 这说明理想共振确实给出了轨道共振现象的基本特征, 但是, 它无法区分不同 p/q 值对应的共振运动之间的差别.

理想共振模型给出的各 p/q 值对应的共振带及其相应的运动“结构”, 在实际运动中是否会发生不同的变化, 这是轨道共振研究的核心问题. 只有这一问题获得解决, 才能确切地回答轨道共振效应在天体运动的动力演化中所扮演的真正角色是什么, 起稳定作用, 还是“破坏”作用. 事实上, 对于小行星带, $p/q = 2/1, 3/1$ 处就是空隙, 而 $p/q = 3/2$ 处却有小行星的相对聚集, 这说明各个共振带的性质是不一样的. 从纯引力角度来看, 似乎 $2/1, 3/1$ 对应“结构”不稳定, $\bar{n}/n_1 \approx 2/1, 3/1$ 的小行星没有在相应的空间中保持住; 而 $3/2$ 则对应“结构”稳定, $\bar{n}/n_1 \approx 3/2$ 的小行星在相应空间中有很多保存下来了. 但要注意, 保存下来的小行星, 其轨道偏心率都不太小, 相应的共振效应较强.

三、共振运动的演化

尽管严格解决共振带 $p/q = 2/1, 3/2, 3/1, \dots$ 的结构稳定性问题是困难的, 但对共振运动的演化性态进行数值探索, 给出不同共振带对应的天平动区域内轨线的变化状况, 在一定程度上提供解决这一问题的途径还是有可能的. 为此, 我们计算了 26 颗小行星的轨道演化, 所用模型有理想共振模型, 平均模型和真实模型, 计算结果分别列于表 1—5.

表 1 中 1362A, 887A, 1381A, 153A, B, C, 1202A 和 1439A 是假想的小行星, 引进它们的目的是为了说明处于不同共振态的演化状况.

表 2 中 $\tilde{L}$ 的单位是木星的轨道半长径 $a_1 = 5.203\text{AU}$, T 是天平动周期 (或称共振周期).

表 3—5 中列出的是 $\tilde{L}, \tilde{l}, e$ 和 i 的变化范围.

表 3 中 Mod II 和 III 对应平均模型^[6], 前者是平面情况 ($i = 0$), 这种平均模型与 Schubart 模型^[7]类似. Mod I 是平均模型的一种简化, 即只取其中有关 e_1 的主项, 且 $i = 0$.

表 4 中 Mod I, II 分别为平面和空间情况.

表 5 中列出的是更长时间间隔 $t - t_0 = 10^6\text{a}$ 的结果, 除 $3/1$ 情况外, 与 $t - t_0 = 10^3\text{a}$ 的结果相近.

为了说明问题, 在真实模型中, 我们也计算了摄动天体轨道偏心率 $e_1 = 0$ 的情况, 结果表明, 相平面 ($\tilde{L}, \tilde{l}$) 上的轨线分布结构与理想共振情况相近. 另外, 还考虑了耗散效应 (取阻力形式), 计算结果列于表 6. 表中 Mod I, II, III 分别对应阻力大小为 $0, 10^{-9}, 10^{-6}$, 结果表明, 即使让阻力摄动量级达到 10^{-6} (木星摄动量级为 10^{-3}), 在 $t - t_0 = 10^6\text{a}$ 这样长的时间尺度内, 影响也并不显著, 原共振特征保持不变. 事实上, 太阳系内小行星带的耗散效应要弱得多, 这说明在对共振运动演化的研究中, 主要还是应该考虑引力作用.

表 1 26 颗小行星的轨道根数 (历元: 1983.9.23)

p/q	No.	$a(\text{AU})$	e	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$M(^{\circ})$
2/1	1362	3.2380	0.364	24.1	120.9	262.7	30.6
	1362A	3.2380	0.364	24.1	120.9	262.7	112.2
3/1	887	2.4998	0.555	9.2	110.3	349.5	165.1
	887A	2.4998	0.555	9.2	110.3	349.5	262.7
	1381	2.4873	0.182	4.7	351.7	29.1	156.1
	1381A	2.4873	0.182	4.7	351.7	29.1	176.7
3/2	153	3.9887	0.145	7.8	227.9	43.8	354.4
	153A	3.9887	0.145	7.8	227.9	43.8	27.5
	153B	3.9887	0.145	7.8	227.9	43.8	48.5
	153C	3.9887	0.145	7.8	227.9	43.8	55.5
	190	3.9642	0.167	6.2	175.9	278.1	78.6
	361	3.9398	0.215	12.7	18.7	69.8	262.3
	499	3.9920	0.215	2.1	256.2	179.7	110.7
	748	3.9333	0.186	2.3	265.4	183.3	69.1
	958	3.9650	0.188	5.6	343.3	95.2	286.0
	1038	3.9439	0.235	9.3	58.1	308.3	227.2
	1162	3.9391	0.113	1.9	39.6	217.4	178.6
	1202	3.9647	0.189	3.4	50.8	312.7	241.3
	1202A	3.9647	0.189	3.4	50.8	312.7	249.3
	1269	3.9027	0.095	2.8	134.3	25.4	123.9
	1439	3.9880	0.113	4.2	35.5	106.8	180.5
	1439A	3.9880	0.113	4.2	35.5	106.8	224.6
	1529	4.0035	0.192	9.0	100.4	297.3	321.3
	1578	3.9414	0.231	0.8	73.7	4.8	63.8
	1877	3.9478	0.213	17.5	352.6	308.3	122.2
	1941	3.9923	0.277	3.9	60.3	305.1	184.8

上述计算中用到的真实模型和平均模型对应的 Hamilton 函数分别为 F 和 $\bar{F}^{(2)}$, 它们的形式如下^[3,5]:

$$F = \frac{1}{2a} + R(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) = F(\tilde{L}, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{l}, \tilde{g}, \tilde{h}; \sigma_1), \quad (7)$$

$$\bar{F}^{(2)} = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F(a, e, i, \Omega, \omega, M; t) dM = \bar{F}(\tilde{L}, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{l}, \tilde{g}, \tilde{h}; e_1, \omega_1 + \Omega_1), \quad (8)$$

其中 R 是摄动函数, σ_1 是摄动天体的轨道根数 $a_1, e_1, \omega_1 + \Omega_1, M_1$. $\tilde{L}$ 和 $\tilde{l}$ 已由 (3) 和 (4) 式定义, 相应地有

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \sqrt{a(1-e^2)} - p\tilde{L}, & \tilde{g} &= \omega, \\ \tilde{H} &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i - p\tilde{L}, & \tilde{h} &= \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

至于 26 颗小行星对应的相平面 $(\tilde{L}, \tilde{l})$ 上轨线变化状态, 见图 4—10.

图 4 和图 5 是小行星 1362 真实运动对应的轨线, 前者 $e_1 = 0$, 后者 $e_1 = 0.0484$.

图 6 和图 7 是小星 153 和 1269 真实运动对应的轨线, $e_1 = 0.0484$.

图 8 和图 9 是小行星 887 真实运动对应的轨线, 前者 $e_1 = 0$, 后者 $e_1 = 0.0484$, 时间尺度在 $2 \times 10^5 a$ 以内. 而当 $t - t_0 = 2 \times 10^5 a$ 时, 天平动将转化为循环运动 (对共振幅角 $\tilde{l}$ 而

表 2 理想共振模型计算结果

p/q	No.	$\tilde{L}$	$\tilde{l}(^\circ)$	e	$T(a)$
2/1	1362	0.7833—0.8035	—94.5—94.5	0.3097—0.3870	276
	1362A	0.7889—0.7978	—37.6—37.6	0.3320—0.3640	232
3/1	887	0.6866—0.6998	45.3—314.7	0.5224—0.5848	388
	887A	0.6909—0.6954	143.0—217.0	0.5439—0.5654	257
	1381	0.6913—0.6947	59.8—300.2	0.1183—0.1828	1292
	1381A	0.6914—0.6947	146.4—213.6	0.1196—0.1820	1249
	153	0.4342—0.4384	—35.7—35.7	0.1405—0.1712	168
3/2	153A	0.4314—0.4412	—94.1—94.1	0.1149—0.1896	200
	153B	0.4301—0.4425	—135.5—135.5	0.1014—0.1974	259
	153C	0.4299—0.4428	—150.0—150.0	0.0984—0.1989	299
	190	0.4351—0.4376	—20.1—21.1	0.1588—0.1757	160
	361	0.4349—0.4381	—23.2—23.2	0.1983—0.2160	145
	499	0.4340—0.4391	—36.7—36.7	0.2090—0.2360	144
	748	0.4345—0.4383	—31.1—31.1	0.1620—0.1875	159
	958	0.4346—0.4382	—28.4—28.4	0.1769—0.1995	153
	1038	0.4326—0.4405	—57.8—57.8	0.2073—0.2484	147
	1162	0.4350—0.4370	—21.9—21.9	0.0921—0.1145	198
	1202	0.4320—0.4409	—74.0—74.0	0.1596—0.2154	170
	1202A	0.4312—0.4417	—90.0—90.0	0.1538—0.2196	191
	1269		circul		
	1439	0.4345—0.4391	—31.5—31.5	0.1124—0.1419	185
	1439A	0.4316—0.4407	—100.0—100.0	0.0775—0.1642	228
	1529	0.4338—0.4391	—39.6—39.6	0.1889—0.2190	150
	1578	0.4326—0.4405	—57.2—57.2	0.2059—0.2467	147
	1877	0.4354—0.4376	—16.5—16.5	0.2011—0.2138	144
	1941	0.4337—0.4396	—37.4—37.4	0.2699—0.2948	127

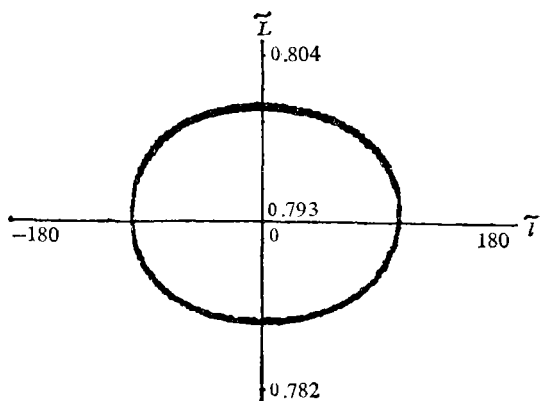


图 4

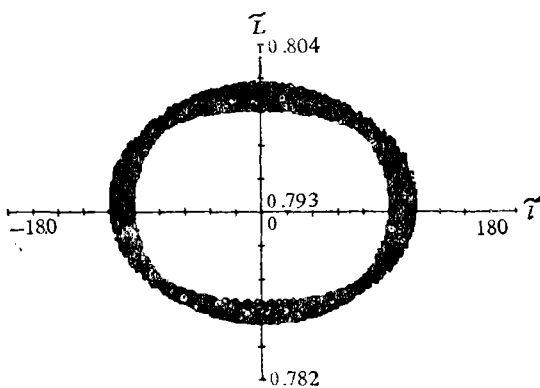


图 5

言),此即图 10 的状态。

虽然这些计算结果并不能完全反映整个共振运动性态的变化,但已能看出一些问题:

1. 当 $i \leq 10^\circ$ 时,甚至更大一些,都可作为平面问题处理,它不影响对结构稳定性的讨论,

表 3 平均模型计算结果 ($t - t_0 = 10^4 \text{a}$)

p/q	No.	Model	$\tilde{L}$	$\tilde{l}(^\circ)$	e	$i(^\circ)$
2/1	1362	I	0.7809—0.8066	circul	0.0007—0.5143	9.00—40.32
		II	0.7849—0.8019	-117.6—117.6	0.2240—0.3773	
		III	0.7809—0.8066	-165.7—165.3	0.1506—0.6583	
	1362A	I	0.7889—0.7979	-46.9—46.9	0.3364—0.4473	16.16—30.99
		II	0.7872—0.7996	-40.1—40.1	0.3311—0.4236	
		III	0.7863—0.8008	-63.1—61.5	0.2604—0.5008	
3/2	153	I	0.4337—0.4391	-48.2—48.2	0.1161—0.1967	5.84—8.27
		II	0.4349—0.4379	-42.9—42.9	0.1094—0.2221	
		III	0.4349—0.4379	-44.3—43.2	0.1072—0.2280	
	153A	I	0.4312—0.4420	-97.1—97.1	0.0876—0.2621	5.15—9.76
		II	0.4316—0.4414	-100.4—100.4	0.0956—0.3052	
		III	0.4316—0.4416	-103.0—102.9	0.0887—0.3199	
	1269	I	0.4313—0.4415	-124.7—124.7	0.0132—0.2173	2.72—2.89
		II	0.4320—0.4405	-128.8—128.8	0.0183—0.2290	
		III	0.4320—0.4405	-129.2—129.2	0.0184—0.2293	
3/1	887	I	0.6856—0.7013	circul	0.4128—0.8833	2.79—10.41
		II	0.6871—0.6993	17.5—342.5	0.4951—0.6912	
		III	0.6871—0.6993	18.6—340.7	0.5076—0.6923	
	887A	I	0.6905—0.6958	134.8—225.2	0.4741—0.6081	6.44—13.85
		II	0.6889—0.6977	142.1—217.9	0.2546—0.7895	
		III	0.6887—0.6979	140.6—219.3	0.2580—0.7995	

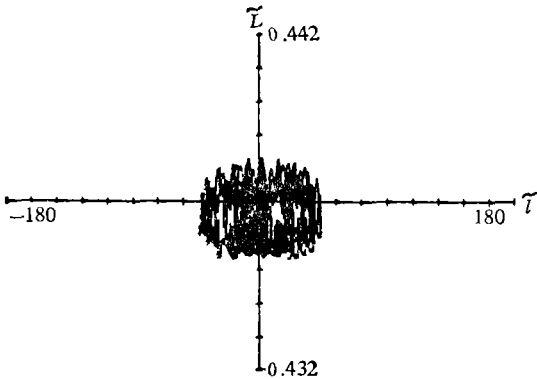


图 6

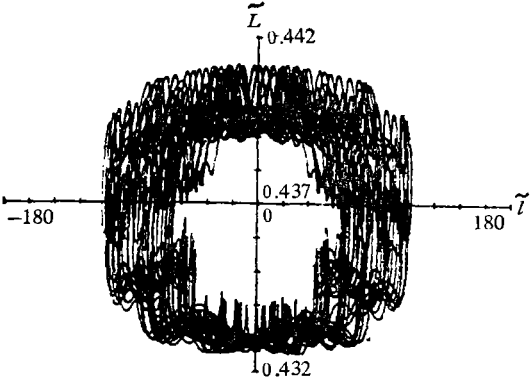


图 7

这将使问题得以简化.

2. 对于 $p/q = 2/1, 3/1$ 和 $3/2$ 三种共振运动, $e_1 = 0$ 时的结果都与理想共振基本一致, 这说明影响结构稳定性的主要因素是摄动天体的轨道偏心率. 因此, 关于这类问题的讨论, 不能轻易地将椭圆型问题简化成圆型问题.

3. 对于 $p/q = 2/1, 3/1$ 和 $3/2$ 三种共振运动, 不同模型给出的结果之间的差别是明显不同的. 对于 $3/2$ 情况, 除理想共振中处于天平动区域边缘的那些共振态外, 各种模型给出的结果相差不大, 而 $2/1$ 和 $3/1$ 两种情况, 差别比较明显. 另外, 对于 $3/2$ 共振, 无论是深振区 ($\tilde{l}$

表 4 真实模型计算结果 ($t - t_0 = 10^3 \text{a}$)

p/q	No.	Mod	$\tilde{L}$	$l(^{\circ})$	e	$i(^{\circ})$
2/1	1362	I	0.7853 - 0.8018	-113.0 - 113.0	0.2373 - 0.3754	
		II	0.7855 - 0.8016	-122.2 - 122.2	0.2192 - 0.3748	23.05 - 24.80
	1362A	I	0.7887 - 0.7984	-74.4 - 74.4	0.3345 - 0.4054	
		II	0.7887 - 0.7985	-78.3 - 78.3	0.3355 - 0.4125	23.69 - 24.59
3/1	887	I		circul		
		II	0.6881 - 0.6985	21.0 - 347.7	0.3175 - 0.6346	5.65 - 10.00
	887A	I		circul		
		II	0.6885 - 0.6982	77.8 - 252.4	0.5548 - 0.9487	7.74 - 38.02
	1381	I		circul		
		II		circul		
3/2	1381A	II		circul		
	153	I	0.4355 - 0.4381	-40.8 - 40.8	0.1036 - 0.2473	
		II	0.4354 - 0.4381	-44.2 - 44.2	0.0983 - 0.2488	7.70 - 8.28
	153A	I	0.4332 - 0.4405	-99.8 - 99.8	0.0945 - 0.2734	
		II	0.4333 - 0.4404	-101.0 - 101.0	0.0945 - 0.2744	7.60 - 8.02
	153B	I	0.4312 - 0.4427	-141.9 - 141.9	0.0785 - 0.2949	
		II	0.4311 - 0.4427	-148.7 - 148.7	0.0672 - 0.3084	5.12 - 9.49
	153C	I		circul		
		II		circul		
	190	II	0.4346 - 0.4390	-66.5 - 66.5	0.0884 - 0.2471	5.96 - 6.38
	361	I	0.4345 - 0.4392	-66.1 - 66.1	0.1189 - 0.2797	
		II	0.4345 - 0.4391	-69.9 - 69.9	0.1182 - 0.2909	11.82 - 12.74
	499	I	0.4337 - 0.4401	-88.5 - 88.5	0.1125 - 0.2863	
		II	0.4337 - 0.4401	-88.5 - 88.5	0.1125 - 0.2862	2.07 - 2.21
	748	I	0.4335 - 0.4392	-69.4 - 69.4	0.0881 - 0.2461	
		II	0.4345 - 0.4392	-69.5 - 69.5	0.0879 - 0.2461	2.26 - 2.42
	958	II	0.4343 - 0.4393	-73.0 - 73.0	0.0893 - 0.2518	5.39 - 5.76
	1038	I	0.4339 - 0.4397	-83.2 - 83.2	0.0790 - 0.2448	
		II	0.4340 - 0.4396	-85.4 - 85.4	0.0775 - 0.2470	8.93 - 9.46
	1162	II	0.4341 - 0.4394	-79.7 - 79.7	0.0594 - 0.2212	1.89 - 2.01
	1202	I	0.4335 - 0.4401	-99.5 - 99.5	0.0371 - 0.2121	
		II	0.4335 - 0.4401	-99.7 - 99.7	0.0370 - 0.2120	3.29 - 3.47
	1202A	I	0.4328 - 0.4409	-118.6 - 118.6	0.0239 - 0.2148	
		II	0.4328 - 0.4409	-119.1 - 119.1	0.0240 - 0.2148	3.26 - 3.46
	1269	I	0.4325 - 0.4413	-125.5 - 125.5	0.0233 - 0.2206	
		II	0.4325 - 0.4413	-125.7 - 125.7	0.0233 - 0.2207	2.70 - 2.87
	1439	II	0.4344 - 0.4393	-72.2 - 72.2	0.0935 - 0.2551	4.07 - 4.35
	1439A	I		circul		
		II		circul		
	1529	II	0.4336 - 0.4401	-98.5 - 98.5	0.0629 - 0.2389	8.90 - 9.34
	1587	I	0.4345 - 0.4392	-67.9 - 67.9	0.1235 - 0.2861	
		II	0.4345 - 0.4392	-67.9 - 67.9	0.1233 - 0.2861	0.79 - 0.85
	1877	I	0.4350 - 0.4387	-54.5 - 54.5	0.1184 - 0.2726	
		II	0.4349 - 0.4386	-62.5 - 62.5	0.1152 - 0.2927	16.36 - 17.65
	1941	II	0.4344 - 0.4393	-70.5 - 70.5	0.1330 - 0.2993	3.70 - 4.01

表 5 真实模型(空间情况)计算结果 ($t - t_0 = 10^6 \text{a}$)

p/q	No.	$\tilde{L}$	$\tilde{l}(^\circ)$	e	$i(^\circ)$
2/1	1362	0.7855—0.8016	—122.4—122.4	0.2192—0.3754	23.04—24.80
	1362A	0.7887—0.7985	—78.3—78.3	0.3353—0.4158	23.49—24.78
3/1	887		circul		
	887A		circul		
3/2	153	0.4354—0.4381	—44.4—44.4	0.0983—0.2488	7.70—8.29
	153A	0.4333—0.4405	—101.1—101.1	0.0944—0.2748	7.60—8.03
	1269	0.4323—0.4413	—126.2—126.2	0.0226—0.2209	2.55—2.88

表 6 考虑耗散效应的计算结果 ($t - t_0 = 10^6 \text{a}$)

p/q	No.	Mod	$\tilde{L}$	$\tilde{l}(^\circ)$	e
2/1	1362	I	0.7809—0.8066	circul	0.0007—0.5143
		II	0.7810—0.8064	circul	0.0278—0.5001
		III	0.7760—0.8047	circul	0.0009—0.3861
	1362A	I	0.7889—0.7979	—46.9—46.9	0.3364—0.4473
		II	0.7889—0.7979	—46.9—46.9	0.3364—0.4473
		III	0.7889—0.7979	—46.8—46.8	0.3348—0.4537
3/2	153	I	0.4337—0.4391	—48.2—48.2	0.1161—0.1967
		II	0.4337—0.4391	—48.2—48.2	0.1161—0.1967
	153A	I	0.4312—0.4420	—97.1—97.1	0.0876—0.2621
		II	0.4312—0.4420	—97.1—97.1	0.0876—0.2621
		III	0.4312—0.4420	—96.0—96.5	0.0888—0.2618
		III	0.4312—0.4420	—96.0—96.5	0.0888—0.2618
3/1	887	I	0.6856—0.7013	circul	0.4128—0.8833
		II	0.6856—0.7014	circul	0.4127—0.8950
	887A	I	0.6905—0.6958	134.8—222.2	0.4741—0.6081
		II	0.6905—0.6958	134.8—222.2	0.4741—0.6801
		III	0.6905—0.6958	135.0—225.6	0.4740—0.6083
		III	0.6905—0.6958	135.0—225.6	0.4740—0.6083

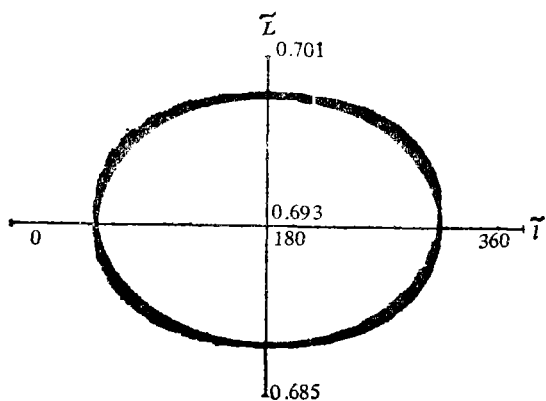


图 8

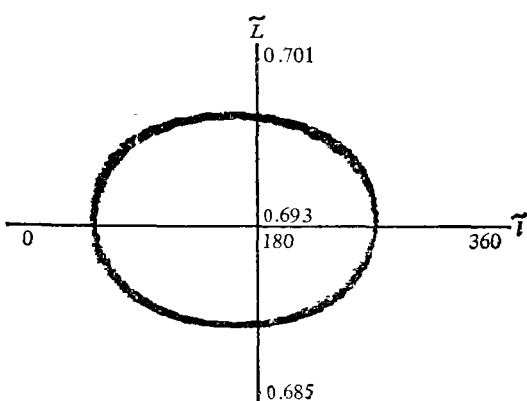


图 9

的变化范围较小的区域)或是浅振区($\tilde{l}$ 的变化范围较大的区域),在 10^5 — 10^6a 的时间尺度内,其轨线分布状态基本不变;而 2/1 和 3/1 情况,则不然. 特别是 3/1 情况,它对应二阶 ($p-q=$

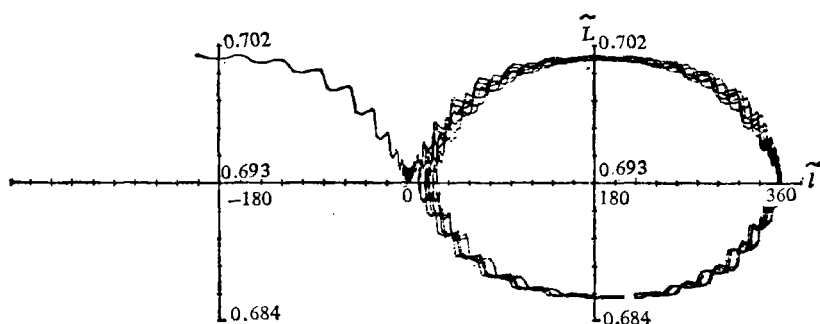


图 10

2) 共振, 相应的共振项含有 e^2 因子, 共振效应较弱, 即使原处于深振区的共振态, 在 e_1 项影响下, 当 $t - t_0$ 超出 $10^5 a$ 后, 也都相继消失, 变成普通的循环状态, 即 $\tilde{l}$ 的变化已不受限制, n 对共振周期的平均 $\bar{n}$ 就不再接近中心值 n_c .

上述结果似乎表明 3/2 对应结构稳定, 而 2/1 和 3/1 则对应结构不稳定. 尽管这并不是严格的结论, 但它毕竟为我们提供了一些有益的信息. 在不稳定情况下, 轨线“扩展”, 各根数的变化非常明显(如 $\tilde{L}$ 的变化由 ϵ 量级上升至 $\epsilon^{1/2}$ 的量级), 使轨道处于不稳定状态. 这些与小行星分布的空隙和聚集现象, 有着某种对应关系. 目前观测到的对应 3/2 共振的小行星, 基本上都是 e 值较大而又处于深振状态. 如果注意到太阳系的具体“环境”, 考虑各种力学因素的摄动, 对这一现象就不难理解了, 只有较明显的深振态才有可能保持住.

最后说明一个问题, 即数值计算的可靠性. 积分时间尺度 $10^6 a$, 约 2×10^6 步, 累积误差有多大, 在临界状况下(指天平动向循环状态过渡时)是否会导致计算结果的失真. 关于这一点, 我们作了各种试验, 证明结果是可靠的^[8]; 而处于临界状态时, 就可以认为它是不稳定的.

参 考 文 献

- [1] Greenberg, R. and Scholl, H., *Asteroids*, University of Arizona, Tucson, 1979, 310—333.
- [2] Garfinkel, B., *Astron. J.*, 71(1966), 657.
- [3] Liu, L., Innanen, K. A. and Zhang, S. P., *ibid.*, 90(1985), 877.
- [4] Siegel, C. L. and Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, New York, 208—209.
- [5] Liu, L. and Innanen, K. A., *Astron. J.*, 90(1985), 887.
- [6] 廖新浩、刘林, 天文学报, 28(1987), 11.
- [7] Schubart, J., SAO, Special Report 149.
- [8] 刘林、廖新浩, 天文学报, 28(1987), 193.