

计算应力强度因子的无限相似单元法

应 隆 安

(北京大学数学力学系)

摘 要

为了计算应力强度因子,将平面弹性体所占的区域作三角形单元剖分。在裂纹尖端附近,三角形单元为可数无穷多个,且具有相似性,它们组成组合单元体。用矩阵方法求出组合单元体的组合刚度矩阵,从而得到问题的解。与有限单元法比较,无限相似单元法更好地反映了解的奇性,因此提高了精确度。同时,由于组合刚度矩阵的求得,使代数方程组的阶数大为降低。

结构材料的断裂韧性是它的重要性能指标之一。无论是为了计算某一部件允许的最大裂纹深度,还是测定某一试样的临界应力强度因子,或是讨论材料在交变载荷下的裂纹扩展速率,都需要计算一定形状的弹性体在一定载荷下的应力强度因子。因此,应力强度因子的计算是断裂力学的一个重要组成部分,人们在这方面作了大量的工作,提出了不少行之有效的方法。

近年来,应用有限单元体方法计算应力强度因子日益广泛,这是因为有限单元体方法有其突出的优点。它可以计算形状极其复杂的弹性体,对裂纹的形状、位置、数量上都没有特殊的限制。正由于它的广泛适用性,才得到了普遍的注意。

早在应力强度因子的概念出现以前,人们就知道弹性体内裂纹前缘附近的应力是有奇性的,它与到裂纹前缘的距离的平方根成反比。所谓应力强度因子,就是刻画这一奇性的比例常数。在有限单元体方法中,弹性体被分解成有限个单元体,通常在每个单元体中,应力或是等于常数,或是按某一有界函数(例如按多项式)分布。应力的奇性消失了,所以为了计算应力强度因子,在裂纹尖端往往要作非常细的划分,使得节点个数很多。例如,经计算表明^[1],要达到 5% 的精确度,需要 1000 个节点以上,即需要解一个大于 2000 阶的代数方程组。为了减少计算工作量,现在往往不直接用位移计算,而借助于计算弹性能的释放率,间接地计算应力强度因子。也有人克服了此困难,在裂纹尖端采用一个奇性单元,这样就自然而然地得到了带有奇性的近似解。一些文献表明^[2,3],这样处理后,大约只需要一、二百个节点就够了。

为了克服应力的奇性带来的困难,我们采用了另一种处理方法。在裂纹尖端处划分出无限多个相似的单元体,这无限多个单元体组合成一个组合单元体。用代数方法可以计算出组合单元体的组合刚度矩阵,它与其他单元体的刚度矩阵构成总刚度矩阵。解代数方程组后,就得到了一个在裂纹尖端处确有奇性的近似解,而且保证了位移函数的连续性。

无产阶级革命导师恩格斯曾经十分深刻地阐明有限与无限之间的辩证关系：“无限性是一个矛盾，而且充满种种矛盾。无限纯粹是由有限组成的，这已经是矛盾，可是事情就是这样。”（《反杜林论》48页）根据这一观点，我们认识到，用有限单元体方法计算包含有无限多个自由度的弹性体，这本身就是一个矛盾，它反映了人们对无限是由有限所组成的认识，并通过有限来认识无限。但是，无限与有限又有质的不同，它是有限的总和。例如在裂纹尖端处，用有限个单元体不可能完全地反映出应力的奇性，需要把有限发展为无限。“无限相似单元法”就是在这个基础上提出来的。当然，这一“无限单元体”仍然需要通过有限来认识，我们利用组合单元体的方法来完成这一认识的飞跃，它仍是从无限到有限的转化。

本文给出无限相似单元法的详细数学证明，最后概括了计算步骤并举了例。利用这方法可以大大减少节点的总数。在本文最后给出的例子中，我们最大限度地减少节点的数目，实际参与计算的只有16个节点，达到了预期的效果。

为了确定起见，下面讨论平面应变状态，显然，可以很容易把它改为对于平面应力状态的计算。

一、解的存在唯一性

给定一个平面多边形弹性区域。在此区域内有一条直线的裂纹，它开始于区域的内点，终止于多边形的一个顶点。在裂纹上没有外力作用，即它是自由边界。不失一般性，不妨设直线裂纹位于直角坐标系的正 x 轴上，且尖端为坐标原点（如图1所示）。

任取常数 $\xi (0 < \xi < 1)$ ，以 o 点为相似中心， ξ 为比例常数，作上述多边形的相似多边形。同样，以 o 点为中心，分别以 $\xi^2, \dots, \xi^k, \dots$ 为比例常数，作出相似多边形。我们得到了可数个互相相似的多边形，按照由外向内的次序，依次称它们为第0个多边形，第1个多边形，……等等。两个多边形之间称为“层”，按照由外向内的次序，称为第1层，第2层，……第 k 层，……等等。

在第一层中，用直线段联结两个多边形的对应顶点，将这一层划分成若干个四边形，再将每个四边形划分成两个三角形（如图2所示）。其余各层的划分方式与第1层完全相同。

以 D 记多边形区域除去裂纹后所得的区域，如果 D 上的函数 $u(x, y)$ 满足下列条件：

(a) $u \in C(D) \cap L_2(D)$, $\nabla u \in L_2(D)$;

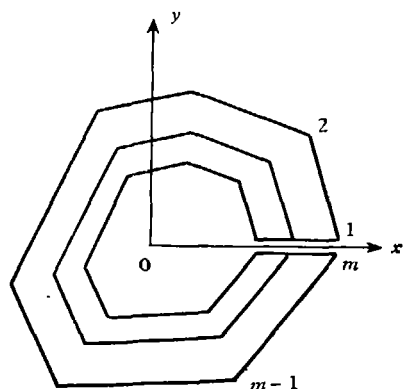


图 1

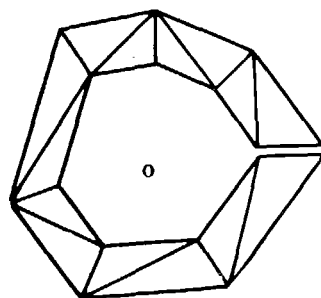


图 2

(b) 在每个三角形单元上 $u(x, y)$ 为线性函数, 就称为 $u \in \bar{S}$. 以 $W_1^1(D)$ 记 Соболев 空间, 则 $\bar{S} \subset W_1^1(D)$, 且在空间 $W_1^1(D)$ 的范数意义下, $\bar{S}$ 为闭集.

任取 $u, v \in \bar{S}$, 应变能是二次泛函:

$$W(u, v) = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \iint_D \left[(u_x^2 + v_y^2) - \nu(u_x - v_y)^2 + \frac{1-2\nu}{2} (u_y + v_x)^2 \right] dx dy, \quad (1)$$

其中 E 表示弹性体的杨氏模量, ν 为泊松比, u 和 v 是弹性体各点的横向与纵向位移. 当 $0 < \nu < \frac{1}{2}$ 时, $W(u, v)$ 非负.

设多边形边数为 $m-1$, 取 $u, v \in \bar{S}$, 设它们在第 0 个多边形的顶点上取值 $u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}$ 和 $v_1^{(0)}, \dots, v_m^{(0)}$, 作列向量 $y_0 = (u_1^{(0)}, v_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, v_m^{(0)})^T$. 同样, 在第 k 个多边形的顶点上, 设 u 和 v 取值 $u_1^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}$ 和 $v_1^{(k)}, \dots, v_m^{(k)}$, 作列向量 $y_k = (u_1^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}, v_m^{(k)})^T$. 令 $n = 2m$, 则 $y_0, \dots, y_k, \dots$ 是 n 维向量, 它们称为各多边形上的位移向量.

取定 n 维常向量 $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$, 我们作函数对 (u, v) 的集合:

$$S' = \{(u, v) | u, v \in \bar{S}, y_0 = g\},$$

在 S' 内, 由于 $W(u, v)$ 非负, 它有以下确界:

$$\inf_{(u, v) \in S'} W(u, v) = c.$$

不难证明^[4,5]:

定理 1. 存在唯一的 $(u, v) \in S'$, 使

$$W(u, v) = c.$$

由定理 1 所得到的函数 u, v 就是有裂纹的多边形弹性体, 在边界条件 $y_0 = g$ 之下的分块线性解.

二、刚度矩阵

对于第一层弹性体, $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 由 y_0 与 y_i 线性确定, 因此应变能 $W_1(u, v)$ 是二次型, 即

$$W_1(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_0 & -A^T \\ -A & K'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_i \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 K_0, K'_0 都是对称矩阵.

如果在第 0 个多边形顶点上作用有外力 f_0 , 在第一个多边形顶点上作用有外力 f_i , 其中 f_0, f_i 都是 n 维向量, 则由 $W_1(u, v) - (f_0, y_0) - (f_i, y_i)$ 取极小值, 得

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^T \\ -A & K'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_i \end{pmatrix},$$

即

$$\left. \begin{aligned} K_0 y_0 - A^T y_i &= f_0, \\ -A y_0 + K'_0 y_i &= f_i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由于各层都相似, 所以刚度矩阵完全相同^[6]. 现在假设在第 0 个多边形上作用有外力 f_0 , 而在其余节点上外力都等于零. 令

$$K = K_0 + K'_0.$$

由 (3) 式得

$$\left. \begin{aligned} K_0 y_0 - A^T y_1 &= f_0, \\ K y_1 - (A y_0 + A^T y_2) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ K y_k - (A y_{k-1} + A^T y_{k+1}) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

方程组 (4) 与 $W(u, v) - (f_0, y_0) = \min$ 等价. 同样, 对第一节中的位移边界条件来说, 只要把 (4) 式的第一个方程换成 $y_0 = g$, 它与变分问题 $W(u, v) = \min$ 等价.

引理 1. K_0, K'_0 是正定矩阵.

证. 由于 $W_1(u, v)$ 非负, 在 (2) 式中取 $y_0 \neq 0, y_1 = 0$, 或取 $y_0 = 0, y_1 \neq 0$, 得

$$\frac{1}{2} y_0^T K_0 y_0 \geq 0, \quad \frac{1}{2} y_1^T K'_0 y_1 \geq 0.$$

由 (1) 式, 当 $W_1(u, v) = 0$ 时, 必有 $u_x = 0, v_y = 0$, 以及 $u_y + v_x = 0$, 即 u, v 皆为线性函数. 在现在的情形, u, v 不是线性函数, 所以 $W_1(u, v) > 0$, 等号不可能成立. 因此 K_0, K'_0 都是正定矩阵.

三、矩 阵 X

给定 n 维实向量 g , 由定理 1, 它唯一地确定了分块线性解 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 特别地, 位移向量 y_1 由 g 唯一确定.

容易看出, $g \rightarrow y_1$ 是线性变换, 因此存在唯一的 n 阶实矩阵 X , 使

$$y_1 = Xg,$$

又由 S' 的定义, $y_0 = g$, 所以有

$$y_1 = Xy_0. \quad (5)$$

本节需要将实的边界条件推广到复数域, 定义如下:

定义 1. 任给 n 维复向量 $g = (g_1, \dots, g_n)^T$, 记 $g_r = \operatorname{Re}[g]$, $g_i = \operatorname{Im}[g]$, 则

$$u(x, y) = u_r(x, y) + iu_i(x, y) \text{ 与 } v(x, y) = v_r(x, y) + iv_i(x, y)$$

称为对应于边界条件 g 的分块线性解, 其中 $(u_r, v_r), (u_i, v_i)$ 由定理 1 与 g_r, g_i 分别确定.

由定理 1, 对于任给的 n 维复向量 g , 分块线性解 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 是存在且唯一的.

按定义, 对于复数解来说, (5) 式依然成立. 如果我们取第 k 层, 第 $k+1$ 层, 第 $k+2$ 层, $\dots\dots$ 的和, 构成一个区域, 由于它的刚度矩阵与区域 D 上的刚度矩阵无异, 所以如以

$$y_{k-1} = g$$

为边界条件, 则得到的解也完全相同, 即有

$$y_k = Xg,$$

或

$$y_k = Xy_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

归纳得

$$y_k = X^k y_0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

引理 2. 存在常数 $\varepsilon > 0$, 使

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^2 \leq \iint_D (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx dy \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2.$$

证. 任取一个三角形单元, 由图 2, 它必有一边指向 0 点, 设这边长为 L , 以 Δ 记三角形的面积, h 记三角形的最短高长度. 指向 0 点的这一条边的两端点上的 u, v 值为 $(u_i^{(k-1)}, v_i^{(k-1)})$ 与 $(u_i^{(k)}, v_i^{(k)})$, 则有

$$\frac{|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|}{L} \leq |\nabla u| \leq \frac{|y_k| + |y_{k-1}|}{h},$$

$$\frac{|v_i^{(k)} - v_i^{(k-1)}|}{L} \leq |\nabla v| \leq \frac{|y_k| + |y_{k-1}|}{h}.$$

因此

$$\frac{\Delta}{L^2} (|u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|^2 + |v_i^{(k)} - v_i^{(k-1)}|^2) \leq \iint_{\Delta} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx dy \leq \frac{4\Delta}{h^2} (|y_k|^2 + |y_{k-1}|^2).$$

由相似性, $\frac{\Delta}{L^2}$ 与 $\frac{\Delta}{h^2}$ 与 k 无关, 对全体三角形求和, 便得到引理 2 的结论.

引理 3. 如果 λ 为矩阵 X 的特征值, 且有 $|\lambda| \geq 1$, 则 $\lambda = 1$.

证. 设对应于 λ 的特征向量为 g , 以 g 为边界条件, 得唯一的分块线性解 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$, 相应的位移向量为 $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$. 则由

$$Xg = \lambda g,$$

与 $y_0 = g$, 得

$$Xy_0 = \lambda y_0.$$

由 (6) 式有

$$y_k = \lambda^k y_0.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda^k - \lambda^{k-1}|^2 \cdot |y_0|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{2k-2} \cdot |\lambda - 1|^2 \cdot |y_0|^2.$$

由于 $\nabla u, \nabla v \in L_2$, 由引理 2, 此级数收敛. 但 y_0 为非零向量, 如果 $|\lambda| \geq 1$, 且 $\lambda \neq 1$, 则此级数就发散, 因此必须有 $\lambda = 1$. 引理 3 得证.

引理 4. 矩阵 X 对应于特征值 $\lambda = 1$ 的初等因子是一次的.

证. 若不然, 特征值 $\lambda = 1$ 有高于一次的初等因子 $(\lambda - 1)^r$, ($r > 1$), 则有向量 g_0, g , 使

$$(X - I)g_0 = 0, (X - I)g = g_0,$$

其中 I 为单位阵. 即有

$$Xg = g_0 + g,$$

归纳得

$$X^k g = kg_0 + g.$$

以 g 为边界条件作解 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$, 则由 (6) 式得

$$y_k = X^k g = kg_0 + g,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |g_0|^2 = \infty.$$

由引理 2, 与 $\nabla u, \nabla v \in L_2$ 矛盾.

引理 5. X 有两个特征值 $\lambda = 1$, 对应的特征向量是 $\bar{g} = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)^T$ 和 $\tilde{g} = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)^T$.

证. 分别以 $\bar{g}$ 和 $\tilde{g}$ 作为边界条件, 得到常数解, 即 $y_k = \bar{g} (k = 0, 1, \dots)$ 和 $y_k = \tilde{g} (k = 0, 1, \dots)$.

由 (5) 式

$$\bar{g} = X\bar{g}, \quad \tilde{g} = X\tilde{g}.$$

因此, $\bar{g}, \tilde{g}$ 都是矩阵 X 对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量.

引理 6. 对于任给的复向量 y_0 , $X^k y_0 \rightarrow y_\infty (k \rightarrow \infty)$, 其中

$$y_\infty = \alpha \bar{g} + \beta \tilde{g},$$

α, β 是常数.

证. 由引理 3, 4, $X^k (k \rightarrow \infty)$ 的极限存在^[7], 以 y_∞ 记 $X^k y_0$ 的极限.

以 y_0 作为边界条件, 作分块线性解 u, v , 相应地有 $y_1, \dots, y_k, \dots$. 由 (6) 式有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_\infty.$$

令 $y_\infty = (u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)^T$, 我们证明

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \quad u_2 = u_3, \quad \dots, \quad u_{m-1} = u_m, \\ v_1 &= v_2, \quad v_2 = v_3, \quad \dots, \quad v_{m-1} = v_m. \end{aligned}$$

若不然, 不妨假设 $u_i \neq u_{i+1}$, 令 $\delta = |u_i - u_{i+1}|$, 在第 k 层对应的三角形上, 以 L 记对应的边长, 以 Δ 记三角形的面积, 则有

$$|\nabla u| \geq \frac{|u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)}|}{L},$$

因此

$$\iint_{\Delta} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{\Delta}{L^2} |u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)}|^2.$$

由相似性, $\frac{\Delta}{L^2}$ 与 k 无关, 对 k 求和得

$$\iint_D |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{\Delta}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} |u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)}|^2.$$

由于 $\nabla u \in L_2$, 所以右端级数收敛, 但

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)}|^2 = |u_i - u_{i+1}|^2 = \delta^2 > 0,$$

导致矛盾. 因此

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = \dots = u_m = \alpha, \\ v_1 &= v_2 = \dots = v_m = \beta, \end{aligned}$$

即

$$y_\infty = \alpha \bar{g} + \beta \tilde{g}.$$

引理 6 得证.

引理 7. 矩阵 X 除两个特征值 $\lambda = 1$ 外, 其余特征值的模均小于 1.

证. 若不然, 除引理 5 中的两个特征值 $\lambda = 1$ 外, 还有一个特征值 $\lambda = 1$. 对应于这个特

征值的特征向量记作 g' , 则有

$$Xg' = g'.$$

由引理 6

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^k g' = \alpha \bar{g} + \beta \tilde{g}.$$

但 $X^k g' = g'$, 故有

$$g' = \alpha \bar{g} + \beta \tilde{g}.$$

与 $\bar{g}$, $\tilde{g}$, g' 线性无关矛盾. 引理 7 得证.

引进矩阵 X 是求解无穷阶代数方程组 (4) 的关键. 因为, 以 (5) 式代入方程组 (4) 的第一个方程得

$$(K_0 - A^T X)y_0 = f_0, \quad (7)$$

方程组 (4) 就归结成了 y_0 满足的 n 阶代数方程组 (7). 利用方程组 (4) 的特殊形状, 我们将在下节中导出矩阵 X 满足的方程, 这个方程的解多于一个, 根据本节中对矩阵 X 性质的讨论, 我们就可以从众多的解中唯一地确定矩阵 X .

四、矩 阵 方 程

任取 n 维实向量 g , 以 g 为边界条件, 求得分块线性解 u 与 v , 相应地有 $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$, 则有 $y_0 = g$, 由 (6) 式 $y_1 = Xg$, $y_2 = X^2g$, 代入 (4) 式得

$$KXg - (Ag + A^T X^2g) = 0,$$

即

$$(A^T X^2 - KX + A)g = 0.$$

由 g 的任意性得

$$A^T X^2 - KX + A = 0. \quad (8)$$

它就是矩阵 X 满足的矩阵方程.

定理 2. 确定矩阵 X 的充分必要条件是

- (a) X 满足方程 (8);
- (b) X 有两个特征值 $\lambda = 1$, 对应的初等因子为一次的, 对应的特征向量为 $\bar{g}$, $\tilde{g}$;
- (c) X 的其余特征值的模均小于 1.

证. 由引理 3—7 及 (8) 式, 必要性为显然, 现证明其充分性.

设矩阵 X 满足条件 (a), (b), (c), 对于任给的实向量 g , 令

$$y_0 = g, y_1 = Xy_0, \dots, y_k = Xy_{k-1}, \dots. \quad (9)$$

由条件 (a) 知, 它们满足方程组 (4) (除去第一个方程). 以 $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$ 作为节点上的值, 作分块线性函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 由条件 (b) 和 (c), $X^k (k \rightarrow \infty)$ 的极限存在, 令

$$y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} X^k y_0.$$

由于

$$Xy_\infty = X \lim_{k \rightarrow \infty} X^k y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{k+1} y_0 = y_\infty,$$

所以 y_∞ 是对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量. 因为 y_k 对 k 一致有界, 所以 u, v 是有界函数, 因此 $u, v \in L_2$. 我们只要证明 $\nabla u, \nabla v \in L_2$, 则 u, v 就是定理 1 所确定的唯一解, 由 (9) 式, X 即为所求的矩阵.

令

$$y'_k = y_k - y_\infty,$$

即

$$y_k = y'_k + y_\infty.$$

因为 y_∞ 对应了 $u(x, y) = \text{常数}$, $v(x, y) = \text{常数}$, 所以我们只要证明 y'_k 对应的 $\nabla u, \nabla v \in L_2$ 就够了.

由 (9) 式有

$$Xy'_{k-1} = X(y_{k-1} - y_\infty) = y_k - y_\infty = y'_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

化 X 为若当标准形

$$X = TJT^{-1}, \quad (11)$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

J_1 由特征值小于 1 的若当块组成. 令

$$z_k = T^{-1}y'_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

则由 (10), (11) 式得

$$z_k = Jz_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

归纳得

$$z_k = J^k z_0,$$

即

$$z_k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} z_0. \quad (12)$$

由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - y_\infty) = 0,$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0.$$

由 (12) 式, z_0 的最后两个分量必为零, 否则 z_k 的极限不为零, 令

$$J' = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

则由 (12) 式得

$$z_k = J'^k z_0.$$

由文献 [7], 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\|J'^k\| \sim \binom{k}{p-1} \alpha^{k-p+1},$$

其中 p 为某个初等因子的阶数, $|\alpha| < 1$, 所以只要 k_0 充分大, 就有

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |z_k|^2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \|J'^k\|^2 \cdot |z_0|^2 \sim \sum_{k=k_0}^{\infty} \left[\binom{k}{p-1} \alpha^{k-p+1} \right]^2 \cdot |z_0|^2,$$

右边级数收敛, 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y'_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |Tz_k|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2.$$

也是收敛的. 由引理 2, y'_k 对应的 $\nabla u, \nabla v \in L_2$, 这样就证明了充分性.

五、组合刚度矩阵

令

$$K_s = K_0 - A^T X, \quad (13)$$

由 (7) 式得

$$K_s y_0 = f_0. \quad (14)$$

定理 3. K_s 是对称正矩阵.

证. 任取 n 维实向量 y_0 , 对应的第 k 层应变能是

$$W_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X^{k-1} y_0 \\ X^k y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_0 - A^T \\ -A \quad K'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{k-1} y_0 \\ X^k y_0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

令

$$K_k = (X^T)^{k-1} (K_0 - A^T X - X^T A + X^T K'_0 X) X^{k-1},$$

则有

$$W_k = \frac{1}{2} y_0^T K_k y_0.$$

由 (1) 式, $W_k \geq 0$, 所以 K_k 是对称正矩阵. 由 (8) 式有

$$\begin{aligned} K_k &= (X^T)^{k-1} (K_0 - A^T X) X^{k-1} + (X^T)^k (-A + K'_0 X) X^{k-1} \\ &= (X^T)^{k-1} (K_0 - A^T X) X^{k-1} - (X^T)^k (K_0 - A^T X) X^k. \end{aligned}$$

由 (13) 式得

$$K_k = (X^T)^{k-1} K_s X^{k-1} - (X^T)^k K_s X^k,$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N K_k &= K_s - (X^T)^N K_s X^N, \\ 2 \sum_{k=1}^N W_k &= y_0^T \sum_{k=1}^N K_k y_0 = y_0^T K_s y_0 - y_0^T (X^T)^N K_s X^N y_0. \end{aligned} \quad (15)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 由引理 6 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_0^T (X^T)^N K_s X^N y_0 = y_\infty^T K_s y_\infty, \quad (16)$$

其中

$$y_\infty = \alpha \bar{g} + \beta \tilde{g}.$$

以 y_∞ 为边界条件, 求得解 $u = \text{常数}$, $v = \text{常数}$, 因此 $W(u, v) = 0$, 特别地, 对于第一层弹性体, 由 (2) 式得

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_{\infty} \\ X y_{\infty} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_0 - A^T \\ -A \quad K'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\infty} \\ X y_{\infty} \end{pmatrix} = 0,$$

即向量 $\begin{pmatrix} y_{\infty} \\ X y_{\infty} \end{pmatrix}$ 是对称正矩阵 $\begin{pmatrix} K_0 - A^T \\ -A \quad K'_0 \end{pmatrix}$ 对应于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量, 因此有

$$\begin{pmatrix} K_0 - A^T \\ -A \quad K'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\infty} \\ X y_{\infty} \end{pmatrix} = 0.$$

从第一行得到

$$K_0 y_{\infty} - A^T X y_{\infty} = 0,$$

即

$$K_z y_{\infty} = 0. \quad (17)$$

由 (15)–(17) 式得

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} W_k = \lim_{N \rightarrow \infty} y_0^T \sum_{k=1}^N K_k y_0 = y_0^T K_z y_0. \quad (18)$$

由 y_0 的任意性

$$K_z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N K_k.$$

K_k 是对称正矩阵, 所以 K_z 也是对称正矩阵. 定理 3 证完.

$\sum_{k=1}^{\infty} W_k$ 是组合单元体上的应变能, (18) 式说明无限剖分的应变能仍表为有限的二次型,

K_z 就是相应的组合刚度矩阵.

由于 K_0 是对称矩阵, 从 (13) 式可得一明显推论:

推论. $A^T X$ 是对称矩阵.

六、矩阵 X 的计算公式

我们利用 (11) 式计算矩阵 X , 由矩阵论知

$$T = (x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{r_2}^{(2)}, \dots, \bar{g}, \tilde{g}), \quad (19)$$

其中 $x_i^{(1)} (i = 1, \dots, r_1)$, $x_i^{(2)} (i = 1, \dots, r_2)$, $\dots$ 是对应于特征值 $|\lambda| < 1$ 的若当链, 即它们是非零向量, 且有 $X x_1^{(1)} = \lambda_1 x_1^{(1)}$, $X x_2^{(1)} = \lambda_1 x_2^{(1)} + x_1^{(1)}$, $\dots$, $X x_{r_i}^{(1)} = \lambda_i x_{r_i}^{(1)} + x_{r_i}^{(1)-1}, \dots$ 等等.

X 的特征方程是

$$(\lambda I - X)x = 0. \quad (20)$$

由 (8) 式得

$$(A^T X^2 - KX + A)x = 0,$$

以 (20) 式代入得

$$(\lambda^2 A^T - \lambda K + A)x = 0, \quad (21)$$

因此矩阵 X 的特征向量 x 也是方程 (21) 的非零解. 令 $q = \lambda x$, 代入 (21) 式, 得

$$\lambda A^T q - Kq + Ax = 0,$$

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} K - \lambda A^T & -A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ x \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$\left[\begin{pmatrix} K & -A \\ I & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} q \\ x \end{pmatrix} = 0. \quad (22)$$

我们首先讨论行列式 $|A| \neq 0$ 的情形, 令

$$Q = \begin{pmatrix} (A^T)^{-1}K & -(A^T)^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

容易看出, 方程 (22) 等价于

$$(Q - \lambda I) \begin{pmatrix} q \\ x \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

问题已经归结为矩阵 Q 的特征值问题. 将方程组 (20), (21) 的系数行列式记作 $\varphi(\lambda) = |\lambda I - X|$, $f(\lambda) = |\lambda^2 A^T - \lambda K + A|$, 通过直接验算, 不难证明:

引理 8. 矩阵 Q 的特征多项式 $|\lambda I - Q| = |A|^{-1} f(\lambda)$.

下面的引理给出矩阵 X 与矩阵 Q 的特征值之间的关系:

引理 9. $f(\lambda) = \lambda^n |A^T X - K| \cdot \varphi(1/\lambda) \varphi(\lambda)$.

证. 由 (8) 式有

$$\begin{aligned} \lambda^2 A^T - \lambda K + A &= (\lambda^2 A^T - \lambda K) - (A^T X^2 - KX) \\ &= A^T(\lambda^2 I - X^2) - K(\lambda I - X) = [A^T(\lambda I + X) - K](\lambda I - X), \end{aligned}$$

即

$$\lambda^2 A^T - \lambda K + A = (\lambda A^T + A^T X - K)(\lambda I - X). \quad (24)$$

由定理 3 的推论得

$$|\lambda A^T + A^T X - K| = |\lambda A^T + X^T A - K|,$$

将右端转置得

$$|\lambda A^T + A^T X - K| = |\lambda A + A^T X - K|,$$

设 $\lambda \neq 0$, 以 (8) 式代入得

$$\begin{aligned} |\lambda A^T + A^T X - K| &= |\lambda(KX - A^T X^2) + A^T X - K| \\ &= |(A^T X - K)(I - \lambda X)| = \lambda^n |A^T X - K| \cdot \left| \frac{1}{\lambda} I - X \right|, \end{aligned}$$

即

$$|\lambda A^T + A^T X - K| = \lambda^n |A^T X - K| \cdot \varphi(1/\lambda). \quad (25)$$

由 (24) 式有

$$f(\lambda) = |\lambda A^T + A^T X - K| \cdot \varphi(\lambda), \quad (26)$$

由 (25) 式有

$$f(\lambda) = \lambda^n |A^T X - K| \cdot \varphi(1/\lambda) \varphi(\lambda).$$

上式两端均为 λ 的多项式, 因此在 $\lambda = 0$ 时也成立. 引理 9 得证.

引理 9 说明矩阵 Q 的特征值由矩阵 X 的特征值及其倒数所组成. 至于矩阵 X 与矩阵 Q 的若当链之间的关系, 可以证明:

引理 10. 如果 λ 是矩阵 X 的特征值, 对应的初等因子为 r 次, 对应的若当链是 $x_1, \dots$,

x_r , 则向量组 $\begin{pmatrix} Xx_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Xx_r \\ x_r \end{pmatrix}$ 是矩阵 Q 对应于特征值 λ 的若当链. 反之, 如果 $|\lambda| < 1$, λ 是矩阵 Q 的特征值, 对应的初等因子为 r 次, 对应的若当链是 $\begin{pmatrix} q_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_r \\ x_r \end{pmatrix}$, 其中 $x_1, \dots, x_r, q_1, \dots, q_r$ 是 n 维向量, 则有

$$q_i = Xx_i, \dots, q_r = Xx_r,$$

而且 $x_1, \dots, x_r$ 是矩阵 X 对应于特征值 λ 的若当链.

证. 由假设

$$(X - \lambda I)x_i = x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, r),$$

其中 $x_0 = 0$. 由 (8) 式有

$$X(X - \lambda I)x_i = (A^T)^{-1}(A^T X^2 - \lambda A^T X)x_i = (A^T)^{-1}(KX - A - \lambda A^T X)x_i,$$

因此

$$(A^T)^{-1}(KX - A - \lambda A^T X)x_i = Xx_{i-1},$$

不难看出

$$(Q - \lambda I) \begin{pmatrix} Xx_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^T)^{-1}K - \lambda I & -(A^T)^{-1}A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Xx_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xx_{i-1} \\ x_{i-1} \end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix} Xx_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Xx_r \\ x_r \end{pmatrix}$ 是矩阵 Q 的若当链.

反之, 如果有

$$(Q - \lambda I) \begin{pmatrix} q_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^T)^{-1}K - \lambda I & -(A^T)^{-1}A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{i-1} \\ x_{i-1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, r),$$

其中 $x_0 = 0, q_0 = 0$, 展开得

$$\left. \begin{aligned} [(A^T)^{-1}K - \lambda I]q_i - (A^T)^{-1}Ax_i &= q_{i-1}, \\ q_i - \lambda x_i &= x_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

我们归纳证明

$$q_i = Xx_i \quad (i = 0, 1, \dots, r). \quad (28)$$

当 $i = 0$, (28) 式是显然的, 现假设 (28) 式对某个 $i - 1$ 已成立, 即 $q_{i-1} = Xx_{i-1}$, 代入 (27) 式, 并且消去 q_i , 整理得

$$(A^T)^{-1}(-\lambda^2 A^T + \lambda K - A)x_i + (A^T)^{-1}(K - \lambda A^T)x_{i-1} = Xx_{i-1},$$

即

$$(A^T)^{-1}\{(-\lambda^2 A^T + \lambda K - A)x_i - (\lambda A^T - K + A^T X)x_{i-1}\} = 0.$$

由 (24) 式

$$-(A^T)^{-1}(\lambda A^T + A^T X - K)\{(\lambda I - X)x_i + x_{i-1}\} = 0.$$

由假设, $|\lambda| < 1$, 所以 $1/\lambda$ 不是矩阵 X 的特征值, 由 (25) 式得行列式 $|\lambda A^T + A^T X - K| \neq 0$, 以 $(A^T)^{-1}(\lambda A^T + A^T X - K)$ 的逆矩阵左乘上式得

$$(\lambda I - X)x_i + x_{i-1} = 0,$$

即

$$Xx_i = \lambda x_i + x_{i-1}. \quad (29)$$

以(29)式代入(27)式的第二式,得 $q_i = Xx_i$, 因此(28)式对 i 也成立. 这样, (28)(29)式对 $i = 1, \dots, r$ 都成立. 引理10证完.

下面讨论行列式 $|A| = 0$ 的情形, 任取实数 λ_0 , 使 $f(\lambda_0) \neq 0$, 由引理9, $\varphi(\lambda_0) \neq 0$. 令

$$Z = \lambda_0 X(\lambda_0 I - X)^{-1}, \quad (30)$$

它的特征多项式是 $\varphi_1(\mu) = |\mu I - Z|$.

引理11. $-\lambda_0$ 不是矩阵 Z 的特征值.

证.

$$\begin{aligned} \varphi_1(-\lambda_0) &= |-\lambda_0 I - Z| = |-\lambda_0 I - \lambda_0 X(\lambda_0 I - X)^{-1}| \\ &= |-\lambda_0(\lambda_0 I - X) - \lambda_0 X|/|\lambda_0 I - X| = \lambda_0^2 \varphi(\lambda_0). \end{aligned}$$

因为 λ_0 不是 $f(\lambda)$ 的零点, 所以 $\lambda_0 \neq 0$, 因此

$$\varphi_1(-\lambda_0) \neq 0.$$

引理11证毕.

由引理11, 矩阵 $\lambda_0 I + Z$ 有逆, 由(30)式解得

$$X = \lambda_0(\lambda_0 I + Z)^{-1}Z. \quad (31)$$

代入(8)式得

$$A^T[\lambda_0(\lambda_0 I + Z)^{-1}Z]^2 - K[\lambda_0(\lambda_0 I + Z)^{-1}Z] + A = 0,$$

以矩阵 $(\lambda_0 I + Z)^2$ 右乘之, 并且令

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_0^2 A^T - \lambda_0 K + A, \\ B_1 &= \lambda_0^2 K - 2\lambda_0 A, \end{aligned}$$

则有

$$A_1 Z^2 - B_1 Z + \lambda_0^2 A = 0. \quad (32)$$

方程(32)与方程(8)形状是类似的, 令

$$P = \begin{pmatrix} A_1^{-1}B_1 & -\lambda_0^2 A_1^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

对于矩阵 Z 和 P , 有类似于引理10的关系, 此处从略. 至于矩阵 X 和矩阵 Z 之间的关系, 可以证明:

引理12. 如果 μ 是矩阵 Z 的特征值, 对应的若当链为 $z_1, \dots, z_r$, 则

$$x_i = \sum_{j=1}^i b_{ij} z_j \quad (i = 1, \dots, r) \quad (33)$$

是矩阵 X 对应于特征值 λ 的若当链, 其中

$$\lambda = \frac{\lambda_0 \mu}{\lambda_0 + \mu}, \quad (34)$$

b_{ij} 由以下的递推公式所决定:

$$\left. \begin{aligned} b_{ii} &= \left(\frac{\lambda_0 + \mu}{\lambda_0} \right)^{2i-2} \quad (i = 1, \dots, r), \\ b_{i1} &= 0 \quad (i = 2, \dots, r), \\ b_{ij} &= \frac{\lambda_0 + \mu}{\lambda_0^2} [(\lambda_0 + \mu)b_{i-1,j-1} + b_{i-1,j}] \quad (i = 3, \dots, r, j = 2, \dots, i-1). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

证. 由假设

$$(Z - \mu I)z_i = z_{i-1} \quad (i = 1, \cdots, r), \quad (36)$$

其中 $z_0 = 0$. 令

$$x'_{i-1} = (X - \lambda I)x_i.$$

由 (31) 式

$$x'_{i-1} = [\lambda_0(\lambda_0 I + Z)^{-1}Z - \lambda I]x_i,$$

以 (33) (34) 式代入得

$$x'_{i-1} = \left[\lambda_0(\lambda_0 I + Z)^{-1}Z - \frac{\lambda_0 \mu}{\lambda_0 + \mu} I \right] \sum_{j=1}^i b_{ij} z_j,$$

以矩阵 $\lambda_0 I + Z$ 左乘之得到:

$$(\lambda_0 I + Z)x'_{i-1} = \left[\lambda_0 Z - \frac{\lambda_0 \mu}{\lambda_0 + \mu} (\lambda_0 I + Z) \right] \sum_{j=1}^i b_{ij} z_j = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \mu} (Z - \mu I) \sum_{j=1}^i b_{ij} z_j,$$

以 (36) 式代入得

$$(\lambda_0 I + Z)x'_{i-1} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \mu} \sum_{j=1}^i b_{ij} z_{j-1}. \quad (37)$$

另一方面, 由 (33) 式

$$(\lambda_0 I + Z)x_{i-1} = (\lambda_0 I + Z) \sum_{j=1}^{i-1} b_{i-1,j} z_j \quad (i = 2, \cdots, r),$$

以 (36) 式代入得

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I + Z)x_{i-1} &= \sum_{j=1}^{i-1} b_{i-1,j} [(\lambda_0 + \mu)z_j + z_{j-1}] \\ &= \sum_{j=2}^i b_{i-1,j-1} (\lambda_0 + \mu)z_{j-1} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{i-1,j} z_{j-1}, \end{aligned}$$

由 (35) 式并利用 $z_0 = 0$, 得

$$(\lambda_0 I + Z)x_{i-1} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \mu} \sum_{j=1}^i b_{ij} z_{j-1}. \quad (38)$$

比较 (37) (38) 两式得

$$x'_{i-1} = x_{i-1},$$

因此

$$(X - \lambda I)x_i = x_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, r).$$

当 $i = 1$, 由 (37) 式, $x'_{i-1} = 0$, 从而有

$$(X - \lambda I)x_1 = 0.$$

这样, 我们已经证明了 $x_1, \cdots, x_r$ 确是矩阵 X 对应于特征值 λ 的若当链.

综合以上各引理, 我们得

定理 4. 当行列式 $|A| \neq 0$, 设矩阵 Q 所有模小于 1 的特征值所对应的若当链是 $\begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ x_1^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} q_{r_1}^{(1)} \\ x_{r_1}^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} q_1^{(s)} \\ x_1^{(s)} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} q_{r_s}^{(s)} \\ x_{r_s}^{(s)} \end{pmatrix}$, 则

$$x_1^{(1)}, \cdots, x_{r_1}^{(1)}, \cdots, x_1^{(s)}, \cdots, x_{r_s}^{(s)}, \bar{g}, \tilde{g},$$

构成 (11) 式中矩阵 T 的各列向量; 当行列式 $|A| = 0$, 设矩阵 P 所有满足不等式

$$\left| \frac{\lambda_0 \mu}{\lambda_0 + \mu} \right| < 1$$

的特征值所对应的若当链是 $\begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ z_1^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_{r_1}^{(1)} \\ z_{r_1}^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_1^{(s)} \\ z_1^{(s)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_{r_s}^{(s)} \\ z_{r_s}^{(s)} \end{pmatrix}$, 则

$$x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}, \bar{g}, \tilde{g},$$

同样构成 (11) 式中矩阵 T 的各列向量, 其中 $x_1^{(1)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}$ 由 $z_1^{(1)}, \dots, z_{r_s}^{(s)}$ 和公式 (33) 所确定。

下面叙述定理 4 的一个推论。在应用上, 各初等因子往往都是一次的。这时, 求解 X 的过程可以大为简化, 我们只要计算特征值和特征向量就够了, 并且可以避免复运算。

如果 λ_i 是实特征值, 对应的特征向量为 x_i , 则有

$$Xx_i = \lambda_i x_i.$$

如果 $\lambda_i = \beta_i + i\omega_i$ 是复特征值, 由于特征值必成对共轭出现, 可以只取其中之一, 例如为确定起见, 取 $\omega_i > 0$, 又设对应的特征向量为 $x_i = a_i + ib_i$, 则有

$$X(a_i + ib_i) = (\beta_i + i\omega_i)(a_i + ib_i),$$

分离实部与虚部得

$$Xa_i = \beta_i a_i - \omega_i b_i,$$

$$Xb_i = \omega_i a_i + \beta_i b_i.$$

作矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$\begin{array}{|cc|} \hline \beta_i & \omega_i \\ \hline -\omega_i & \beta_i \\ \hline \end{array}$

它由位于主对角线上的元素 λ_i 以及用虚线表示的二阶矩阵构成, 其余元素为零。再作矩阵

$$T = (\dots, x_i, \dots, a_i, b_i, \dots, \bar{g}, \tilde{g}).$$

则有

$$X = TAT^{-1}. \quad (39)$$

七、应力强度因子的计算

以 (r, θ) 记平面上点的极坐标, 在 0 点附近真解可以表为:

$$w(r, \theta) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} r^{j/2} [a_1^{(j)} w_1^{(j)}(\theta) + a_2^{(j)} w_2^{(j)}(\theta)], \quad (40)$$

I, II 分别表示对称与反对称分量。当取

$$w_1^{(1)}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{8\pi\mu}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi\mu}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \end{cases}, \quad (41)$$

$$w_{II}^{(1)}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{8\pi\mu}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{8\pi\mu}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 - 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \end{cases}, \quad (42)$$

时,

$$a_I^{(1)} = K_I, \quad a_{II}^{(1)} = K_{II},$$

其中 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, 对于平面应变情形 $\kappa = 3 - 4\nu$, K_I , K_{II} 就是通常所谓的应力强度因子^[8].

设第 k 个多边形在极坐标下的方程为 $r = R_k(\theta)$ ($k = 0, 1, \dots$), 则由第一节

$$R_k(\theta) = \xi^k R_0(\theta),$$

令

$$w_k = w(R_k(\theta), \theta),$$

它表示第 k 个多边形上的位移函数.

如果给定 $R_0(\theta)$ 上的位移函数 w_0 , 由解的存在唯一性, $w(r, \theta)$ 被唯一确定, 特别地, w_1 由 w_0 唯一确定, 因此存在线性算子 V , 使

$$w_1 = V w_0.$$

由相似性

$$w_k = V w_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

也都成立, 从而有

$$w_k = V^k w_0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(40) 式中的每一项都对应了算子 V 的一个特征值与特征函数. 例如, 当 $j = 0$, 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 特征函数是 $w_I^{(0)}(\theta)$ 和 $w_{II}^{(0)}(\theta)$, 它们对应平移; 当 $j = 1$, 特征值 $\lambda_3 = \lambda_4 = \xi^{1/2}$, 特征函数是 $R_0^{1/2}(\theta)w_I^{(1)}(\theta)$ 和 $R_0^{1/2}(\theta)w_{II}^{(1)}(\theta)$, 它们对应对称和反对称基本奇解; 当 $j = 2$, 特征值 $\lambda_5 = \lambda_6 = \xi$, 特征函数是 $R_0(\theta)w_I^{(2)}(\theta)$ 和 $R_0(\theta)w_{II}^{(2)}(\theta)$, 它们对应旋转和沿 x 方向的简单拉伸; 等等.

矩阵 X 是算子 V 的离散化模型, 所以在适当剖分之下, X 前几个特征值应该近似地与 V 的特征值相等:

$$\lambda_{2j+1} \doteq \xi^j, \quad \lambda_{2j+2} \doteq \xi^j.$$

在第三节中已证明了 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 所以近似式精确地成立. 另外, 由于三角形单元上插值函数的线性性质, 可以证明, $\lambda_5 = \lambda_6 = \xi$ 也是精确地成立的.

设 $w(r, \theta)$ 为真解, 令

$$w^{(1)}(r, \theta) = K_I r^{\frac{1}{2}} w_I^{(1)}(\theta) + K_{II} r^{\frac{1}{2}} w_{II}^{(1)}(\theta), \quad (43)$$

它是解的奇性分量. 设 y_0 是分块线性解的位移向量, 将 y_0 按矩阵 T 的各列作分解:

$$y_0 = a_1 g^{(1)} + a_2 g^{(2)} + \dots + a_n g^{(n)},$$

此处已假定 $g^{(1)}, \dots, g^{(n)}$ 按特征值模递减次序排列. 令

$$g = a_3 g^{(3)} + a_4 g^{(4)},$$

它是分块线性解的奇性分量. $w^{(1)}(r, \theta)$ 是由 g 来自动体现的, 利用已知的向量 g 可以求得近

似的 K_I 与 K_{II} 值.

设多边形 D 的各顶点为 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, m$), 它们的极坐标为 (r_i, θ_i) . 又设向量 $(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$ 的极坐标为 (s_i, α_i) ($i = 1, \dots, m-1$). 以 (43) 代入 (I) 式, 并利用 (41) (42) 式, 经过一些计算, 得到奇性分量对应的应变能

$$W = \frac{1}{8\pi\mu} \{K_I^2 I_1 - 2K_I K_{II} I_2 + K_{II}^2 I_3\}, \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{s_i} \left\{ \left(1 - 2\nu + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_i \right) \log \frac{1 - \cos(\alpha_i - \theta_i)}{1 - \cos(\alpha_i - \theta_{i+1})} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (3 - 4\nu - \cos \alpha_i)(1 + \cos \alpha_i) \log \frac{r_i}{r_{i+1}} - (1 - 2\nu)(\theta_{i+1} - \theta_i) \sin \alpha_i \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos(\alpha_i + \theta_{i+1}) - \frac{1}{2} \cos(\alpha_i + \theta_i) \right\}, \\ I_2 &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{s_i} \left\{ \left[(1 - 2\nu) \sin \alpha_i - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_i \right] \log \frac{r_{i+1}}{r_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_i \log \frac{1 - \cos(\alpha_i - \theta_i)}{1 - \cos(\alpha_i - \theta_{i+1})} - (1 - 2\nu)(\theta_{i+1} - \theta_i) \cos \alpha_i \\ &\quad \left. + \sin(\alpha_i + \theta_i) - \sin(\alpha_i + \theta_{i+1}) \right\}, \\ I_3 &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{s_i} \left\{ \left(3 - 2\nu - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha_i \right) \log \frac{1 - \cos(\alpha_i - \theta_i)}{1 - \cos(\alpha_i - \theta_{i+1})} \right. \\ &\quad + \left[3 - 2\nu - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha_i - (1 - 2\nu) \cos \alpha_i \right] \log \frac{r_i}{r_{i+1}} \\ &\quad \left. + (1 - 2\nu)(\theta_{i+1} - \theta_i) \sin \alpha_i - \frac{3}{2} \cos(\alpha_i + \theta_{i+1}) + \frac{3}{2} \cos(\alpha_i + \theta_i) \right\}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 (18) 式有

$$W = \frac{1}{2} g^T K_z g. \quad (45)$$

(44) (45) 两式中的应变能近似地相等, 合并两式, 我们得到应力强度因子 K_I 、 K_{II} 满足的一个二次代数方程. 为了求出 K_I 和 K_{II} , 我们还需要找出它们的一个关系式. 利用 (41) (42) 式, 可求出 $w^{(1)}(r, \theta)$ 在正 x 轴上的跃度:

$$w^{(1)}(r, 0) - w^{(1)}(r, 2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} r^{\frac{1}{2}} (k+1) \begin{pmatrix} -K_{II} \\ K_I \end{pmatrix}.$$

令 $g = (g_1, \dots, g_n)^T$, 则近似解的跃度为 $(g_1 - g_{n-1}, g_2 - g_n)^T$. 两个跃度近似地相等, 我们又得到 K_I 、 K_{II} 满足的一个关系式:

$$K_I : K_{II} = (g_2 - g_n) : (g_{n-1} - g_1). \quad (46)$$

以 (46) 代入 (44) 式, 解得

$$K_I = 2 \left(\frac{\pi E W}{1 + \nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{g_2 - g_n}{[(g_2 - g_n)^2 I_1 + 2(g_2 - g_n)(g_1 - g_{n-1}) I_2 + (g_1 - g_{n-1})^2 I_3]^{\frac{1}{2}}},$$

$$K_{II} = 2 \left(\frac{\pi E W}{1 + \nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{g_{n-1} - g_1}{[(g_2 - g_n)^2 I_1 + 2(g_2 - g_n)(g_1 - g_{n-1}) I_2 + (g_1 - g_{n-1})^2 I_3]^{\frac{1}{2}}},$$

其中 W 由 (45) 给出。

八、关于对称情形的一点注解

如果区域及边界条件对 x 轴都对称,则此时仅存在 K_I 值,利用对称性可仅考虑上半平面。

在上半平面取组合单元体,它的第一层如图 3 所示。

设此组合单元体除 x 轴以外的边界共有 $m-1$ 个直线段,则对位于负 x 轴的第 m 个顶点应该加边界条件 $v = 0$ 。取位移向量 $y_k = (u_1^{(k)}, v_1^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}, v_{m-1}^{(k)}, u_m^{(k)})^T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 它是一个 n 维向量,此时

$$n = 2m - 1.$$

前几节的推理几乎可以完全不变地用于现在的情形,所不同的一点是:矩阵 X 只有一个特征值 $\lambda = 1$, 它的特征向量是 $(1, 0, 1, 0, \dots, 1)^T$, 这是因为边界条件限制了沿 y 方向的平移。

在计算应力强度因子的公式中,由于 $K_{II} = 0$, 所以只要计算 I_1 就够了,而应力强度因子的计算公式为:

$$K_I = 2 \left[\frac{\pi E W}{(1 + \nu) I_1} \right]^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$W = g^T K_s g = (a_2 g^{(2)})^T K_s (a_2 g^{(2)}).$$

它表示了上半平面以及与之对称的下半平面上的组合单元体上的总应变能。

九、计算步骤与举例

对于平面上的有裂纹的弹性体,我们把它分割成若干个三角形单元,而每个裂纹尖端包含在一个组合单元体中。对于每个组合单元体,计算矩阵 A , K_0 与 K , 这只要在一层中计算三角形单元的刚度矩阵即可得到(计算公式可参看文献 [6])。

作出矩阵 Q 或 P , 并且求出它的特征值以及若当链。根据计算实践,我们发现矩阵 X 所有的初等因子都是一次,因此只要求出 Q 或 P 的特征值和特征向量就够了,我们采用了 QR 方法。

利用 (39) 式求出矩阵 X , 再用 (13) 式得到组合刚度矩阵 K_s 。将 K_s 和其他三角形单元的刚度矩阵构成总刚度矩阵,然后在给定外力和位移的条件下,解此代数方程组,得到各点的位移,再用第七节中的公式求出应力强度因子。定理 3 保证了通常有限元方法中使用的代数解法在这里都适用,并且还可以利用 K_s 的对称性检验计算结果的正确性和精确度。

按以上步骤,在 6912 型电子计算机上编制了语言程序,并作了计算。现举一例。

考虑矩形三点弯曲试样,其长度为 s , 宽度为 W , 在长度 $s/2$ 处有一边缘裂纹长为 a , 厚度 $B = 1$, 计算应力强度因子 K_I (图 4)。

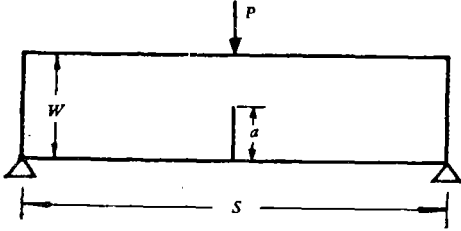


图 4



图 5

我们取作用力 $P = 2$, $s = 8$, $W = 2$, $a = 1$, $\nu = 0.3$, 这时弯矩 $M = \frac{1}{4}Ps = 4$. 由于对称性, 只要计算一半就够了, 实际参与计算的节点只取了 16 个, 如图 5 所示, 图上双线内部表示组合单元体, 比例常数取 $\xi = 0.85$, 在组合单元体内部, 我们只画了一层三角形单元.

对组合单元体, 我们算出 X 的特征值为:

$$\lambda = 1.00000, 0.91898, 0.85000, \dots$$

相应的准确值是 $\lambda = 1$; $\lambda = \sqrt{0.85} \approx 0.92195$ (近似值相对误差 0.3%); $\lambda = 0.85$. 计算结果证实了第七节中的论断. 由 (13) 式得到组合刚度矩阵, 它在六位有效数字范围内是对称的, 由此可见, 整个计算 K_s 的过程是可靠的, 并且有足够的准确度.

计算得应力强度因子 $K_I = 14.703$, 对应的无量纲值为:

$$\frac{K_I BW^{3/2}}{M} = 10.397.$$

在文献 [9] 中, 给出了用边界配位法计算同一问题所得的结果:

$$\frac{K_I BW^{3/2}}{M} = 10.62.$$

两者符合得很好, 仅相差 2.1%, 因此互相都得到了验证. 这一事实, 说明用我们的方法计算应力强度因子, 可以达到减少节点数目和提高精确度的目的.

参 考 文 献

- [1] Chan, S. K., Tuba, I. S. & Wilson, W. K., *Eng. Fract. Mech.*, 2 (1970), 1.
- [2] Tracey, D. M., *Eng. Fract. Mech.*, 3 (1971), 255.
- [3] Byskov, E., *Int. J. Fract. Mech.*, 6 (1970), 2, 159.
- [4] 冯 康, 应用数学与计算数学, 2 (1965), 4, 238.
- [5] Aziz, A. K., *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York and London, 1972.
- [6] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1971.
- [7] R. S. 瓦格, 矩阵迭代分析 (中译本), 上海科学技术出版社, 1966.
- [8] Liebowitz, H., *Fracture*, Vol. 2, Academic Press, New York and London, 1968.
- [9] 陈 饒, 力学, 1974, 3, 121.