中国科学 : 数学　2014 年　第 44 卷　第 5 期 : 469 ∼ 476
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

带有限 L^p 函数的一个刻画及其应用

献给陆善镇教授 **75** 华诞

郭紫华*, 彭立中

北京大学数学科学学院, 北京 100871
E-mail: zihuaguo@math.pku.edu.cn, lzpeng@pku.edu.cn

收稿日期: 2013-09-21; 接受日期: 2013-11-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11271023, 11371037 和 10990012) 资助项目

摘要　利用 Shannon-Nyquist 采样定理的思想, 本文给出带有限 L^p 函数类的一个刻画, 并且利用这个刻画得到 Schrödinger 方程的若干估计, 如 Strichartz 型和倒时空 Strichartz 估计等, 同时也给出若干已知估计的简单证明.

关键词　带有限函数　采样定理　Schrödinger 方程
MSC (2010) 主题分类　42B10, 42B35

1　引言

$L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数类在现代分析中起着十分基础的作用, 它是指满足如下条件的函数全体: f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数, 且使得

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

以及 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示本性有界的函数全体. 令 $B_2=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<2\}$, 本文考虑一类带有限 (即 Fourier 变换有紧支集) L^p 函数的刻画, 记为 $\mathcal{L}^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}\hat{f}\subset B_2\},\quad 1\leqslant p<\infty,$$
$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)=\Big\{f\in L^\infty(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}\hat{f}\subset B_2,\lim_{|x|\to\infty}f=0\Big\},$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换:

$$\hat{f}(\xi)=\mathcal{F}f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}dx.$$

对于 $f\notin L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ 以及 $\hat{f}$ 的支集均是按缓增分布的意义来定义的. 值得注意的是, 由于 Fourier 变换具有紧支集, 所有的 $\mathcal{L}^p$ 函数事实上都是光滑的. 关于 Fourier 变换的分布理论, 参见文献 [1].

下面先来阐述本文得到的主要结果. 固定一个非负光滑且径向递减的函数 η 使其满足:

(1) $\operatorname{supp}\eta\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi|\leqslant 3\}$;

英文引用格式: Guo Z H, Peng L Z. A characterization of band-limited L^p function and its applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 469–476, doi: 10.1360/N012013-00141

(2) $\eta(\xi)\equiv 1$, 若 $|\xi|\leqslant 2$.

定义 Fourier 乘子算子 $\Delta_0 f=\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)\eta(\xi)]$. 假设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且满足: 存在 $A>0,\varepsilon>0$, 使得

$$|\varphi(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\varepsilon}\quad \text{且}\quad \eta\cdot\widehat{\varphi}^{-1}\text{ 光滑}. \tag{1.1}$$

一个典型的例子是 $\varphi=\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$. 本文的主要结果如下:

定理 1 设 φ 是给定的满足 (1.1) 的函数, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且设 $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, 则存在一个序列 $\{c_l\}\in l^p(\mathbb{Z}^n)$ (且当 $p=\infty$ 时, $\lim_{|l|\to\infty}c_l=0$) 使得 $f(x)=\Delta_0[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\varphi(x-l)]$, 在 L^p 中收敛. 进一步, 存在常数 $C>c>0$ 与 f 无关, 使得 $c\|\{c_l\}\|_{l^p}\leqslant\|f\|_{L^p}\leqslant C\|\{c_l\}\|_{l^p}$.

定理 1 中的 $\{c_l\}$ 不是唯一的, 有无穷多种选取办法, 我们稍后将在证明中明确说明. 本文的动机主要是源自如下几个方面:

(1) 在调和分析与色散偏微分方程 (PDE) 的研究中, 频率分解 (如 Littlewood-Paley 二进制分解和单位分解) 是十分基本的工具. 利用频率分解结合某些对称性, 很多重要的估计和不等式可以归结为所考虑的函数为带有限的情形, 如 Strichartz 估计和光滑效应估计等.

(2) Shannon-Nyquist 采样定理. 关于带有限函数有一个著名的采样定理: 若 f 是带有限的, 则 f 可以被 f 在可数个点的取值重构, 只要采样点足够密. 定理 1 可以看成是采样定理的 "推广", 只是这时 c_l 不是简单的 f 在某些点的取值, 而是由 f 确定的值.

(3) 一些函数空间的离散刻画. 在时频分析领域, 对于函数空间有多种离散刻画, 如利用小波来刻画 Besov 空间和利用 Gabor 框架来刻画模空间等. 带有限的函数均属于这两种类型的空间, 定理 1 相当于给出了带有限情形下简单的刻画, 并利用平移和伸缩变换可以得到一般函数的刻画, 这在应用时通常能带来方便.

在第 3 节, 我们将利用定理 1 给出 Schrödinger 方程的若干估计.

2 主要结论

本节给出定理 1 的证明以及利用它得出若干推论. 证明的想法是借鉴于 Shannon-Nyquist 采样定理的证明, 即利用带有限的条件, 然后借助 Fourier 级数展开得到离散的表达式.

令 $Q=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位方块. 对 $k\in\mathbb{Z}^n$, 令 $Q_k=k+Q$ (即以 k 为中心的单位方块). 用 $A\lesssim B$ 表示存在一个常数 $C>0$ 使得 $A\leqslant CB$.

引理 2 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且存在 $A,\varepsilon>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\varepsilon}$, 则

(1) 若 $1\leqslant q\leqslant r$, 对任意 $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}g(x)f(k-x)dx\right\|_{l^r(\mathbb{Z}^n)}\leqslant C\|g\|_{L^q};$$

(2) 若 $1\leqslant q\leqslant r$, 对任意 $\{c_k\}\in l^q(\mathbb{Z}^n)$,

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k f(x-k)\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\{c_k\}\|_{l^q}.$$

证明 首先证 (1). 任意给定一个序列 $\{c_k\}$, 定义函数 $h(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k 1_{Q_k}(x)$, 则显然有 $\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}=\|\{c_k\}\|_{l^q}$. 因此可得

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}g(x)f(k-x)dx\right\|_{l^r(\mathbb{Z}^n)}\lesssim\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|1_{Q_k}(x)\langle k-y\rangle^{-n-\varepsilon}dy\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \langle x-y\rangle^{-n-\varepsilon} dy \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^q}.$$

对于 (2), 类似可得

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k f(x-k) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \int_{Q_k} \langle x-k\rangle^{-n-1} dy \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k 1_{Q_k}(y) \langle x-y\rangle^{-n-\varepsilon} dy \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\{c_k\}\|_{l^q}. \end{aligned}$$

因此引理得证. □

在定理的证明中, 我们将利用 Fourier 级数的分布理论[1]. 用 $\mathbb{T}^n$ 表示环 $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, $D(\mathbb{T}^n)$ 表示 $\mathbb{T}^n$ 上的光滑函数, $D'(\mathbb{T}^n)$ 表示其上分布 (称为周期分布). 类似于 Fourier 变换的分布理论, 有下面的引理:

引理 3 任意 $f \in D'(\mathbb{T}^n)$, 则

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

其中 $c_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle f, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\rangle$, 级数在 $D'(\mathbb{T}^n)$ 的意义下收敛.

定理 1 的证明 由于 $\eta\widehat{\varphi}^{-1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 令 $\chi = \mathcal{F}^{-1}(\eta\widehat{\varphi}^{-1})$. 定义 $g(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\chi}(\xi)$. 则 g 是一个缓增分布, 且具有紧支集包含于 $(-\pi,\pi)^n$. 现在将 g 按各个变量作 2π 周期延拓, 仍记为 g, 则 $g \in D'(\mathbb{T}^n)$, 从而, 利用引理 3 可得

$$g(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\xi}, \quad \text{在 } D'(\mathbb{T}^n) \text{ 的意义下,}$$

其中

$$c_l = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\chi}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\chi * f(-l).$$

利用引理 2(1), 可得 $\{c_l\} \in l^p(\mathbb{Z}^n)$ 且 $\|\{c_l\}\|_{l^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$.

接着, 利用 g 的紧支集性质, 且 η 的支集包含于 $(-\pi,\pi)^n$ 可知,

$$\eta(\xi)g(\xi) = \eta(\xi)\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\xi}, \quad \text{在 } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ 的意义下.}$$

从而得 $\hat{f}(\xi) = \eta(\xi)g(\xi)\widehat{\varphi}$, 于是, 在缓增分布的 Fourier 变换意义下有

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\eta(\xi)g(\xi)\widehat{\varphi}] = \mathcal{F}^{-1}\left[\eta(\xi)\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\xi}\widehat{\varphi}\right] = \Delta_0\left[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \varphi(x-l)\right]. \tag{2.1}$$

由 $\{c_l\} \in l^p$ 知, (2.1) 右端级数事实上在 L^p 中收敛. 再由引理 2(2) 可得 $\|f\|_{L^p} \lesssim \|\{c_l\}\|_{l^p}$.

这样的 $\{c_l\}$ 是不唯一的. 因为 g 的支集包含于球 $\{|x| \leqslant 3\}$, 可以选取一个光滑截断函数 $\tilde{\eta}$, 使其支集包含于球 $\{3 < |x| < \pi\}$. 这样令 $\tilde{g} = g + \|f\|_p\tilde{\eta}$. 在证明中, 用 $\tilde{g}$ 代替 g, 也可以得到一族 $\{\tilde{c}_l\}$ 满足要求, 但显然不同于 $\{c_l\}$. □

我们给出 φ 的几个例子. 定理 1 可以看成是采样定理的推广, 若形式地取 $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{x}$ (此时不满足定理的条件), 则回到了采样定理. 在应用中, 可以有如下几个常见的取法:

(1) φ 为截断函数, $\varphi(x) = \chi_Q(x)$, 其中 $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$. 此时, $\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{\sin 2\xi}{\xi}$, 则显然满足定理的条件.

(2) φ 为光滑截断函数, 如 $\varphi(x)=\eta^2(x)$. 此时, $\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{\eta}*\widehat{\eta}$, 满足定理的条件.

(3) $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$, 此时, $\widehat{\varphi}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}$, 如 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 等都满足定理的条件.

例如, 我们将取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ 来研究 Schrödinger 方程的相关估计. 在这个选取下, Schrödinger 方程的解有非常明确简单的表达式, 这点是受 Gabor 框架启发的, 关于 Gabor 框架应用到 Schrödinger 方程可参见文献 [2]. 另一方面, 在很多的估计中, 由于算子 Δ_0 具有非常好的性质, 而通常可以丢掉, 从而只需考虑如下形式的函数:

$$f(x)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\varphi(x-l).$$

这样的函数同样具有很好的频率局部化性质, 故没有丢掉太多的信息.

接下来, 我们利用伸缩和平移变换, 给出具有一般频率支集的带有限 L^p 函数的刻画. 对 $k\in\mathbb{Z}$, 定义 $\Delta_k=\mathcal{F}^{-1}\eta(\xi/2^k)\mathcal{F}$; 对 $j\in\mathbb{Z}^n$, 定义 $\square_k=\mathcal{F}^{-1}\eta(\xi-j)\mathcal{F}$.

推论 4 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ (当 $p=\infty$ 时, 假设 $\lim_{|x|\to\infty}f=0$), φ 是给定的满足 (1.1) 的函数, 则

(1) 若存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得 $\operatorname{supp}\hat{f}\subset\{|\xi|\sim 2^k\}$, 则存在 $\{c_l\}\in l^p(\mathbb{Z}^n)$ (当 $p=\infty$ 时, 有 $\lim_{|l|\to\infty}c_l=0$) 使得

$$f(x)=\Delta_k\bigg[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l2^{kn/p}\varphi(2^kx-l)\bigg],\quad \text{在 } L^p \text{ 中收敛.}$$

进一步, 存在常数 $c,C>0$ 与 f 无关, 使得

$$c\|\{c_l\}\|_{l^p}\leqslant\|f\|_{L^p}\leqslant C\|\{c_l\}\|_{l^p}.$$

(2) 若存在 $k\in\mathbb{Z}^n$, 使得 $\operatorname{supp}\hat{f}\subset k+Q$, 则存在 $\{c_l\}\in l^p(\mathbb{Z}^n)$ (当 $p=\infty$ 时, 有 $\lim_{|l|\to\infty}c_l=0$) 使得

$$f(x)=\square_k\bigg[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\varphi(x-l)\bigg],\quad \text{在 } L^p \text{ 中收敛.}$$

进一步, 存在常数 $c,C>0$ 与 f 无关, 使得

$$c\|\{c_l\}\|_{l^p}\leqslant\|f\|_{L^p}\leqslant C\|\{c_l\}\|_{l^p}.$$

证明 对于 (1), 令 $\tilde{f}=2^{-kn/p}f(2^{-k}x)$, 则 $\tilde{f}\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|\tilde{f}\|_p\sim\|f\|_p$. 对 $\tilde{f}$ 应用定理 1 可知, 存在 $\{c_l\}$ 使得

$$\tilde{f}(x)=\Delta_0\bigg[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\varphi(x-l)\bigg].$$

再作伸缩变换即得. 类似地, 对于 (2), 令 $g=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}f(x)$, 则 $g\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|g\|_p\sim\|f\|_p$. 对 g 应用定理 1 再作频率平移变换即得. □

3 若干应用

本节取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$, 然后用定理 1 来回顾 Schrödinger 方程的解的相关估计. 用这个刻画的优势是, Schrödinger 方程的解有一个简单的表达式. 考虑 (非椭圆型) Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t+\Delta_{\pm}u=g,\quad u(0)=f,$$

其中 $\Delta_\pm = \varepsilon_1\partial_{x_1}^2 + \cdots + \varepsilon_n\partial_{x_n}^2$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, 则

$$u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm} f - \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta_\pm} g(s)ds.$$

通过直接的计算[2], 可得如下引理:

引理 5 设 $k \in \mathbb{Z}^n$, $f(x) = \square_k[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-|x-l|^2/2}]$, 则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm} f = \square_k\Big[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|k|_\pm^2}\prod_{j=1}^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j+2t\varepsilon_j k_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)^{1/2}}\Big]. \tag{3.1}$$

特别地, 当 $k = (0, \ldots, 0)$ 时,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm} f = \Delta_0\Big[\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \prod_{j=1}^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)^{1/2}}\Big].$$

下面考虑 Schrödinger 方程的几个基本估计. 首先重新得到一个 Schrödinger 半群在带有限的 L^p 中的有界性, 这个结果最早由文献 [3] 得到下面的引理:

引理 6 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\square_k f\|_{L_x^p} \lesssim (1+|t|)^{|n(1/2-1/p)|}\|\square_k f\|_p. \tag{3.2}$$

证明 $p = 2$ 显然. 由对偶和插值, 只需再考虑 $p = 1$. 由推论 4 和引理 5, 只需证明

$$\Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|k|_\pm^2}\prod_{j=1}^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j+2t\varepsilon_j k_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)^{1/2}}\Big\|_{L_x^1} \lesssim (1+|t|)^{|n(1/2-1/p)|}\|\{c_l\}\|_{l^1}. \tag{3.3}$$

事实上,

$$(3.3)\text{ 的左边} \lesssim \Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} |c_l|(1+|t|)^{-n/2}\prod_{j=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j+2t\varepsilon_j k_j|^2}{2(1+4t^2)}}\Big\|_{L_x^1} \lesssim (1+|t|)^{n/2}\|\{c_l\}\|_{l^1}.$$

引理得证. □

3.1 Strichartz 型估计

在非线性 Schrödinger 方程的研究中, Strichartz 估计起着十分基础的作用. 它们是指如下齐次和非齐次的时空估计:

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm} f\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_2, \tag{3.4}$$

$$\Big\|\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta_\pm} g(s)ds\Big\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|g\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}, \tag{3.5}$$

其中 p' 表示共轭数 $p' = \frac{p}{p-1}$. 现在知道 (3.4) 成立的最佳范围是可容许条件, 即 (q, r) 满足

$$2 \leqslant q, r \leqslant \infty, \quad \frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}, \quad (q, r, d) \neq (2, \infty, 2). \tag{3.6}$$

当 (q, r) 和 $(\tilde{q}, \tilde{r})$ 均满足 (3.6) 时, (3.5) 成立, 但是 (3.5) 成立的最佳范围至今还是一个具有挑战性的公开问题, 关于 Strichartz 估计可参见文献 [4].

我们现在用引理 5 得到如下的命题:

命题 7 设 $k\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{Z}^n$, (q,r) 满足 $1\leqslant q,r\leqslant\infty$, $\frac{1}{q}<n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})$. 则

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Delta_k f\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim 2^{k(n-\frac{n}{r}-\frac{2}{q})}\|\Delta_k f\|_1,\quad \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Box_j f\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|\Box_j f\|_1. \tag{3.7}$$

证明 先看第一个估计. 因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Delta_k f=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{2k}t\Delta_\pm}\Delta_0\tilde{f}_k(2^kx)$, 其中 $\tilde{f}_k=\mathcal{F}^{-1}2^{kn}\hat{f}(2^kx)$. 由伸缩变换不变性, 可以假设 $k=0$. 由推论 4 和引理 5, 只需证明

$$\left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\prod_{j=1}^n\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)^{1/2}}\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|\{c_l\}\|_{l^1}. \tag{3.8}$$

事实上,

$$(3.8)\text{的左边}\lesssim\left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}|c_l|(1+|t|)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-l|^2}{2(1+4t^2)}}\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|\{c_l\}\|_{l^1}.$$

第二个估计类似可得. □

注 8 在上面的命题中, 我们假设了 $f\in L^1$. 在这个假设下, 由 (3.1) 给出的表达式不需要考虑振荡性就能得到最佳的估计, 因为可以假设 c_l 只取值在某个 l_0. 根据振荡积分可知, 当 $1\ll|x|\lesssim|t|$ 时,

$$\left|\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\eta(\xi)d\xi\right|\sim|t|^{-n/2},$$

从而, $\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\eta(\xi)d\xi\in L_t^qL_x^r(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $\frac{1}{q}<n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})$, 这说明上述命题关于 (q,r) 的范围是最佳的.

当 $f\notin L^1$ 时, 我们还需要开发 (3.1) 中的振荡性, 这是以后思考的一个问题. 在二进制分解情形, 我们可以借助伸缩不变性, 结合经典的 Strichartz 估计, 利用插值定理, 可以得到更多的最佳估计. 但在方块分解情形, 这样做会损失正则性, 似乎只能带着频率指标 j.

注 9 利用 Littlewood-Paley 二进制分解、伸缩不变性和 Minkowski 不等式可知, 要考虑 (3.5), 可以先考虑频率局部化的情形

$$\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta_\pm}\Delta_0 g(s)ds\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|g\|_{L_t^{\tilde{q}'}L_x^{\tilde{r}'}}. \tag{3.9}$$

对 $\Delta_0 g$ 使用引理 3, (3.9) 进一步等价于

$$\left\|\int_0^t\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l(s)\prod_{j=1}^n\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j(t-s))}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j(t-s))^{1/2}}ds\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|\{c_l(t)\}\|_{L_t^{\tilde{q}'}l_l^{\tilde{r}'}}. \tag{3.10}$$

例如, 如果取 $\tilde{r}=\infty$, 很容易验证, 当 $1\leqslant q,\tilde{q},r\leqslant\infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{\tilde{q}}<\frac{n}{2}-\frac{n}{r}$ 时, 有

$$\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta_\pm}\Delta_0 g(s)ds\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\|g\|_{L_t^{\tilde{q}'}L_x^1}. \tag{3.11}$$

我们期望利用离散的形式, 对非齐次的 Strichartz 估计能有帮助.

3.2 光滑效应与极大函数估计

接下来考虑另外一类估计: 光滑效应估计, 或者称为倒时空估计. 这类估计在处理非线性项含有导数时非常有用. 用 $L_x^qL_t^r$ 和 $L_{x_i}^qL_{\bar{x}_i,t}^r$ 分别表示具有如下范数的 Banach 空间:

$$\|f\|_{L_x^qL_t^r}=\|\|f(\cdot,x)\|_{L_t^r}\|_{L_x^q},\quad \|f\|_{L_{x_i}^qL_{\bar{x}_i,t}^r}=\|\|f(\cdot,\ldots,x_i,\ldots)\|_{L_{x_1,\ldots x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n,t}^r}\|_{L_{x_i}^q}.$$

假设初始值 f 在 Sobolev 空间 $\dot{H}^s$ 中, 文献 [5] 得到了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}f$ 的倒时空 $L_x^qL_t^r$ 估计的最佳范围. 我们可以得到初值在 L^1 中的一些新的估计.

命题 10 设 $k\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant q,r\leqslant\infty$, $q>2/n$, $1/q<n(1/2-1/r)$, 则

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Delta_k f\|_{L_x^rL_t^q}\lesssim 2^{k(n-\frac{n}{r}-\frac{2}{q})}\|\Delta_k f\|_1. \tag{3.12}$$

证明 由伸缩变换不变性, 可以假设 $k=0$. 由推论 4 和引理 5, 只需证明

$$\Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}c_l\prod_{j=1}^n\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j|^2}{2(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)}}}{(1-2\mathrm{i}\varepsilon_j t)^{1/2}}\Big\|_{L_x^rL_t^q}\lesssim\|\{c_l\}\|_{l^1}. \tag{3.13}$$

事实上,

$$(3.13)\text{ 的左边}\lesssim\Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}|c_l|(1+|t|)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-l|^2}{2(1+4t^2)}}\Big\|_{L_x^rL_t^q}.$$

从而只要证

$$\|(1+|t|)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-l|^2}{2(1+4t^2)}}\|_{L_x^rL_t^q}\lesssim 1$$

关于 $l\in\mathbb{Z}^n$ 一致成立.

将上式左边分解成三个区域 A_i 的部分, 记为 I_i, $i=1,2,3$, 其中 $A_1=\{|x-l|\lesssim 1\}$, $A_2=\{1\lesssim|x-l|\lesssim 1+|t|\}$, $A_3=\{|x-l|\gtrsim 1+|t|\}$. 首先, 显然只要 $q>2/n$, 则 $I_1\lesssim 1$. 再来看 I_2 和 I_3. 当 $q>2/n$, $1/q<n(1/2-1/r)$,

$$\begin{aligned}
&I_2\lesssim\||t|^{-n/2}\chi_{A_2}(x,t)\|_{L_x^rL_t^q}\lesssim\||x-l|^{1/q-n/2}\|_{L_x^r}\lesssim 1,\\
&I_3\lesssim\Big\|\Big\||t|^{-n/2}\chi_{A_3}(x,t)\Big(\frac{|x-l|}{1+|t|}\Big)^{-100}\Big\|_{L_t^q}\Big\|_{L_x^r}\lesssim\||x-l|^{1/q-n/2}\|_{L_x^r}\lesssim 1.
\end{aligned}$$

命题得证. □

接下来看各向异性的时空范数估计. 下面这个命题的结论首先由文献 [2] 证明, 在文献 [2] 中关于非线性方程的研究起着关键的作用, 我们这里给出一个相对简单的证明.

命题 11 设 $1\leqslant q,r\leqslant\infty$, $\frac{1}{r}<n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})$, $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}^n$, 则

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Delta_j f\|_{L_{x_1}^rL_{\tilde{x}_1,t}^q}\lesssim 2^{j(n-\frac{n+1}{q}-\frac{1}{r})}\|\Delta_j f\|_1,\quad \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_\pm}\Box_k f\|_{L_{x_1}^rL_{\tilde{x}_1,t}^q}\lesssim(1+|k_1|)^{1/2}\|\Box_k f\|_1. \tag{3.14}$$

证明 对于第一个估计, 由伸缩不变性, 不妨设 $j=0$, 这对应于第二个估计 $k=(0,\dots,0)$ 的情形, 因此只要证明第二个估计. 由推论 4 和引理 5, 只需证明

$$\Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}|c_l|(1+|t|)^{-n/2}\prod_{j=1}^n\mathrm{e}^{-\frac{|x_j-l_j+2t\varepsilon_j k_j|^2}{2(1+4t^2)}}\Big\|_{L_{x_1}^rL_{\tilde{x}_1,t}^q}\lesssim\|\{c_l\}\|_{l^1}. \tag{3.15}$$

进一步, 只需要证

$$\|(1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_1+2t\varepsilon_1k_1|^2}{2(1+4t^2)}}\|_{L_{x_1}^rL_t^q}\lesssim(1+|k_1|)^{1/r}. \tag{3.16}$$

情形 1 $k_1=0$. 只要证

$$\|(1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|^2}{2(1+4t^2)}}\|_{L_{x_1}^rL_t^q}\lesssim 1.$$

将被积函数分解成 $|x| \lesssim |t|$ 和 $|x| \gtrsim |t|$ 两部分, 易得当 $\frac{1}{r} < n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ 时, 上式成立.

情形 2 $k_1 \neq 0$. 分解成三部分

$$\begin{aligned}(1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x_1+2\varepsilon_1 k_1 t|^2}{2(1+4t^2)}} &\lesssim (1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}} \chi_{|x_1| \lesssim |k_1|} + (1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}} \chi_{|k_1| \lesssim |x_1| \lesssim |t||k_1|} \\ &\quad + (1+|t|)^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}} \chi_{|x_1| \gg |t||k_1|} \mathrm{e}^{-\frac{|x_1|^2}{2(1+4t^2)}} \\ &=: I + II + III.\end{aligned}$$

对 I 和 II 显然有, 当 $\frac{1}{r} < n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ 时, $\|I\|_{L^r_{x_1} L^q_t} + \|II\|_{L^r_{x_1} L^q_t} \lesssim (1+|k_1|)^{1/r}$. 对于 III 有

$$III \lesssim |t|^{\frac{n-1}{q}-\frac{n}{2}} \chi_{|x_1| \gg |t||k_1|} |x_1|^{-M} |t|^M,$$

从而可知, 当 $\frac{1}{r} < n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ 时, $\|III\|_{L^r_{x_1} L^q_t} \lesssim (1+|k_1|)^{1/r}$. □

参考文献

1 Schwartz L. Théorie des Distributions. Paris: Hermann, 1957
2 Wang B. Sharp global well-posedness for non-elliptic derivative Schrödinger equations with small rough data. ArXiv:1012.0370
3 Gröchenig K, Heil C. Modulation spaces and pseudodifferential operators. Integral Equations Operator Theory, 1999, 34: 439–457
4 Keel M, Tao T. Endpoint Strichartz estimates. Amer J Math, 1998, 120: 955–980
5 Lee S, Rogers K, Vargas A. An endpoint space-time estimate for the Schrödinger equation. Adv Math, 2011, 226: 4266–4285

A characterization of band-limited L^p function and its applications

GUO ZiHua & PENG LiZhong

Abstract Using the ideas of Shannon-Nyquist sampling theorem, we give a characterization for the band-limited L^p functions. As applications, we obtain some new estimates for the Schrödinger equation such as Strichartz type estimate and reverse Strichartz type estimate, and simple proof for some known estimates.

Keywords band-limited function, sampling theorem, Schrödinger equation

MSC(2010) 42B10, 42B35

doi: 10.1360/N012013-00141