文章编号：1002-0268（2005）05-0071-04

曲线弯梁桥振动理论分析

单德山，李 乔
（西南交通大学土木工程学院桥梁及结构工程系，四川 成都 610031）

摘要：利用广义坐标法和能量原理推导曲线梁桥的振动控制微分方程，解释曲线梁桥振动理论与直线梁振动理论的异同点，在推导质量矩阵的显式表达式过程中考虑截面扭转中心与截面形心的不一致。随后给出了曲线梁动力分析的有限元方法，并完成了相应电算程序的编制。最后通过实例分析并验证本文所提计算理论和计算方法的正确性。

关键词：曲线梁；动力特性；有限元；能量法
中图分类号：U441 文献标识码：A

Analysis of Dynamic Theory for Curved-Girder Bridges

SHAN De-shan, LI Qiao
(Department of Bridge and Structural Engineering, Southwest Jiaotong University, Shichuan Chengdu 610031, China)

Abstract: The dynamic behavior of the curved girder bridge was studied in this paper. The dynamic control equations of curved girder bridges were deduced by using the General Coordinate Method and Energy Theory; and the similarities and differences between the vibration of curved-girder bridges and straight girder bridges were obtained from their dynamic control equations. Then the explicit mass matrix of the curved girder bridge was deduced by using Hamilton Theory. During the deduction the non-coincidence of the section's torsional center and the gravity center are taken into account. Furthermore the dynamic finite element method of the curved girder bridges was developed. Based on the dynamic theory of curved girder bridges, the dynamic analysis software was compiled and the dynamic theory and computational method are verified by a real example curved-girder bridge.

Key words: Curved-girder; Dynamic property; Finite element method; Energy theory

近年来，我国高速公路和城市道路中的立体交通发展迅速，为了满足道路走向和美化景观的需要，已经建成的曲线桥梁日益增多。到目前为止，尽管有很多学者针对曲线梁做了大量的研究，但几乎均是针对曲线梁的静力行为进行分析，对曲线梁的动力行为虽有涉及，但都是采用比较简单或较为近似的分析方法，而质量矩阵几乎都是采用与直线梁相似的惯性矩阵，没有从根本上揭示曲线梁的动力特点。在曲率半径与跨径之比较大时，曲线梁的惯性力耦合较小时是可行的，如曲线梁桥分析系统 ASCB for windows 中的处理。而在大型通用有限元程序 ANSYS 中也没有曲线梁单元，计算时一般采用板单元或实体单元进行模拟，这必然使得计算成本增加。本文利用广义坐标法和能量原理来推导平面曲线箱梁的运动微分方程，解释了曲线梁桥振动理论与直线梁的异同点，并详细推导了曲线梁振动的质量矩阵。

在推导过程中，采用如下基本假设：①曲线梁横截面周边尺寸与跨度相比较小；②梁轴的初始曲率为常数，忽略横截面的畸变变形；③变形满足小变形假设，材料服从虎克定律；④截面扭转中心与截面形心不重合。

1 曲线梁桥的运动方程

图 1 给出了平面曲线梁的坐标系，图中 x、y 轴

收稿日期：2004-03-10

作者简介：单德山（1969—），男，四川大竹人，博士，副教授，主要研究方向为桥梁结构空间静、动力行为.（dsshan@163.com）

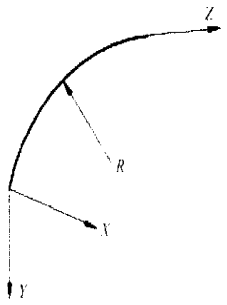

图 1 坐标系

为横截面的惯性主轴，z 轴与 x、y 轴按右手螺旋法则形成柱坐标。按广义坐标法原理，横截面上任一点处的位移为广义位移乘以对应的广义坐标。其中广义位移是沿轴线方向 z 的未知函数；广义坐标是沿横截面周边方向的坐标 s 的函数，根据横截面的变形特征预先取定，它的物理意义是当对应的广义位移为 1 时横截面的位移模式。

(1) 基本未知量

设曲线梁的基本未知量（位移变量）为

$$\{d_z\}=\{u_x(z),u_y(z),u_z(z),\theta_x(z),\theta_y(z),\theta_z(z),w(z)\} \quad (1)$$

式中，$u_x(z)$、$u_y(z)$、$u_z(z)$分别为横截面沿 x、y、z 方向的平移；$\theta_x(z)$、$\theta_y(z)$分别为横截面绕 x、y 轴的转角；$\theta_z(z)$为横截面绕扭转中心的扭转角，这 6 个位移的方向与图 1 所示的坐标系的正向一致时为正；$w(z)$为由于扭转引起的横截面翘曲，其正负与相应的广义坐标有关，不需事先假定。根据广义坐标法原理和图 1 所规定的位移方向并注意到基本假定②，即可得到箱壁中面上任意一点沿纵向(z)、切向(s)及法向(ζ)的位移 $u_x(s)$、$u_y(s)$、$u_z(s)$的表达式[1]。

与式(1)所示位移相对应的横截面广义内力为

$$T=\{Q_x,Q_y,N,M_x,M_y,M_z,B\} \quad (2)$$

式中，前 6 个内力分别为沿 x、y、z 方向的力及绕此三轴的力矩，正向与坐标轴方向一致；B 为横截面上的翘曲双力矩。

(2)曲线梁的几何和物理方程

以薄壳理论为基础，推出薄壁曲梁的几何方程如下[1~3]。

$$\begin{cases}\varepsilon_z=a(u'_z-ku_x-k\theta_z y_1)+ax(-u''_x-k^2u_x)+\\ \quad ay(-u''_y+k\theta_z)-W'\omega=\\ \quad a\varepsilon+ax\kappa_y+ay\kappa_x+\kappa_\omega=\varepsilon_T+\varepsilon_{By}+\varepsilon_{Bx}+\varepsilon_\omega\\ \gamma_{zs}=-W\omega'/a+a(\theta'_z-ku'_y)\Psi\end{cases} \quad (3)$$

式中，e 为轴向应变；κ_x、κ_y 分别为 x、y 方向上弯曲的曲率；κ_ω 为截面翘曲的曲率，定义为广义应变[4]。由虎克定律即可得曲梁横截面周边上正应力 σ_z、剪应力 τ_{zs} 如下

$$\begin{cases}\sigma_z=E_1\varepsilon_z=E_1\varepsilon_T+E_1\varepsilon_{BX}+E_1\varepsilon_{BY}+E_1\varepsilon_\omega=\\ \quad \sigma_T+\sigma_{BX}+\sigma_{BY}+\sigma_\omega\\ \tau_{zs}=G\gamma_{zs}\end{cases} \quad (4)$$

式中，$E_1=E/(1-\nu^2)$，ν 为泊桑比，应力符号规定与弹性力学中的规定相同。

(3)曲线梁的惯性力

曲线梁在振动过程中产生的惯性力可由虚功原理得到。惯性力所作虚功(动能)为[4]

$$J=\frac{1}{2}\iiint m a\{[\dot u_x-(y-y_1)\dot\theta]^2+[\dot u_y-(x-x_1)\dot\theta]^2+[\dot u_z-x\dot u'_y-W\dot\omega/a]^2\}\,dx\,dy\,dz \quad (5)$$

惯性力(动能)的变分为[6]

$$\delta J=\int_0^l mA\{(\dot u_x+y_1\dot\theta)\delta\dot u_x+(\dot u_y-x_1\dot\theta)\delta\dot u_y+(\gamma_s^2\dot\theta+y_1\dot u_x-x_1\dot u_y)\delta\dot\theta\}dz+\int_0^l m(I_y\dot u'_y\delta\dot u'_x+I_x\dot u'_y\delta\dot u'_y+A\dot u_z\delta\dot u_z+I_wW\delta\dot W)dz \quad (6)$$

上式中，A、I_y、I_x、I_w、γ_x、γ_y、γ_w 和 γ_s 为广义截面几何参数，其定义请参见文献[4]。

利用哈密顿原理[5]，将动能的变分 δJ 对时间 t 进行分步积分即可得系统的惯性力，写成矩阵形式有

$$\begin{Bmatrix}\bar f_z\\ \bar f_x\\ \bar m_y\\ \bar f_y\\ \bar m_x\\ \bar m_z\\ \bar b_w\end{Bmatrix}=m\begin{bmatrix}A & & & & & & \\ & A & & & & Ay_1 & \\ & & I_y & & & & \\ & & & A & & -Ax_1 & \\ & & & & I_x & & \\ & Ay_1 & & -Ax_1 & & Ar_s^2 & \\ & & & & & & I_w\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot u_z\\ \ddot u_x\\ \ddot u'_x\\ \ddot u_y\\ \ddot u'_y\\ \ddot\theta_z\\ \ddot w\end{Bmatrix}=[\rho]\{\ddot\delta\} \quad (7)$$

式(7)中$\{\ddot\delta\}$为基本未知量$\{\delta\}$对时间 t 的 2 阶导数。

(4)曲线梁的运动微分方程

曲线梁运动系统的总应变能表达式为

$$V=\frac{1}{2}\int(E_1a^2e^2+E_1a^2x^2\kappa_y^2+E_1a^2y^2\kappa_x^2+E_1\kappa_\omega^2)dv+V_G \quad (8)$$

其中 V_G 为单位长度剪切应变能，并注意广义坐标的表达式和截面几何特性的表达式有

$$2V_G=\int[G\mu_1I_c(\theta'_z-ku'_y-w)^2+GI_k(\theta'_z-ku'_y)^2]\,dz \quad (9)$$

式(9)中 I_c、I_k、μ_1 的定义详见文献[1]。令 $\Phi_w=\theta'_z-ku'_y-w$，$\Phi_k=\theta'_z-ku'_y$，Φ_K、Φ_w 分别为自由扭转剪应变和约束扭转剪应变。那么：$2V_G=\int(M_\omega\Phi_w+M_k\Phi_k)\,\mathrm{d}z$，这里定义 M_ω 为约束扭转力矩，M_K 为纯扭转力矩。

应变能的变分为

$$\delta W=\int[E_1A(u'_z-ku_x-k\theta_zy_1)\,\delta(u'_z-ku_x-k\theta_zy_1)+E_1I_x(-u''_x)\,\delta(-u''_x)+E_1I_w w'\,\delta w'+E_1I_y(-u''_y+k\theta_z)\,\delta(-u''_y+k\theta_z)+G\mu_1I_c(\theta'_z-ku'_u-w)\,\delta(\theta'_z-ku'_y-w)+GI_k(\theta'_z-ku'_y)\,\delta(\theta'_z-ku'_y)]\,\mathrm{d}z \tag{10}$$

若考虑有外荷载 f_x、f_y、f_z、m_x、m_y、m_z 和 b_w，那么外力所做的虚功为

$$\delta W=\int_0^l\{f_x\,\delta u_x+f_y\,\delta u_y+f_z\,\delta u_z+m_x\,\delta u'_y+m_y\,\delta u'_x+m_z\,\delta\theta_z+b_w\,\delta w\}\,\mathrm{d}z \tag{11}$$

由拉格朗日方程：$\delta V-\delta T-\delta W=0$ 即可得到曲线梁的运动控制微分方程。

$$-E_1A(u'_z-ku_x-k\theta_zy_1)k+E_1I_xu_x^4+mA(\ddot{u}_x+y_1\ddot{\theta}_z)+mI_y\ddot{u}''_z=f_x-m'_y \tag{12a}$$

$$E_1I_y(u_y^4-k\theta''_z)+G\mu_1I_ck(\theta''_z-ku''_y-w')+GI_kk(\theta''_z-ku''_y)+mA(\ddot{u}_y-x_1\ddot{\theta})+mI_x\ddot{u}''_y=f_y-m'_x \tag{12b}$$

$$E_1A(u''_z-ku'_x-k\theta'_zy_1)-mA\ddot{u}_z=-f_z \tag{12c}$$

$$kE_1I_y(-u''_y+k\theta_z)-G\mu_1I_c(\theta''_z-ku''_y-w')-GI_k(\theta''_z-ku''_y)+mA(\gamma_s^2\ddot{\theta}+y_1\ddot{u}_x-x_1\ddot{u}_y)-E_1A(u'_z-ku_x-k\theta_zy_1)ky_1=m_2 \tag{12d}$$

$$E_1I_ww+G\mu_1I_c(\theta'_z-ku'_y-w)-mI_w\ddot{w}=-b_w \tag{12e}$$

上式中参数定义如前。显然，上式中拉压、弯曲、扭转完全耦合，这正是与直线梁不同的地方。当 $R\to\infty$时，式(12)所表示的方程和文献[6]中的是一致的。要求得上式的解析解是困难的，必须采用数值方法进行求解。

2　曲线梁有限元计算方法

采用有限元法对曲线梁动力问题进行计算。图 2 为一标准的曲线梁单元，该单元共有 3 个节点，其中 I、J 为端节点，K 为中间节点。由式(1)可知两端节点上各有7 个自由度，用$\{\delta\}^e$ 表示；中间节点上共有 10 个自由度，用$\{\delta\}^e$ 表示；一个曲线梁单元共有24 个自由度，用$\{\delta\}^e$ 表示。

$$\{\delta\}^e=\{u_{zi},\ u_{xi},\ \theta_{yi},\ u_{yi},\ \theta_{xi},\ w_i,\ \theta_{zi},\ u_{zj},\ u_{xj},\ \theta_{yj},\ u_{yj},\ \theta_{xj},\ w_j,\ \theta_{zj}\} \tag{13}$$

$$\{\delta\}^e=\{u_{zk},\ u'_{zk},\ u_{xk},\ \theta_{yk},\ u_{yk},\ \theta_{xk},\ w_k,\ w_k',\ \theta_{zk},\ \theta_{zk}'\} \tag{14}$$

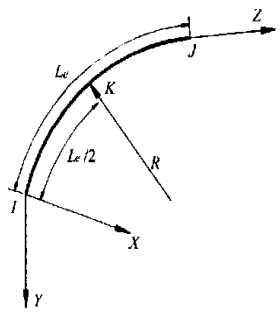

图 **2**　曲线梁单元

上两式中，u_{xi}、u_{yi}、u_{zi} 分别为节点 I 沿 x、y、z 方向的平移；θ_{xi}、θ_{yi} 分别为节点 I 绕 x、y 轴的转角；θ_{zi} 为横截面绕扭转中心的扭转角；w_i 为横截面绕节点 I 的翘曲；u_{xj}、u_{yj}、u_{zj} 分别为节点 J 沿 x、y、z 方向的平移；θ_{xj}、θ_{yj} 分别为节点 J 绕 x、y 轴的转角；θ_{zj} 为横截面绕扭转中心的扭转角；w_j 为横截面绕节点 J 的翘曲；u_{xk}、u_{yk}、u_{zk} 分别为中间节点 K 沿 x、y、z 方向的平移；θ_{xk}、θ_{yk} 分别为中间节点 K 绕 x、y 轴的转角；θ_{zk} 为横截面绕扭转中心的扭转角；w_k 为横截面绕节点 K 的翘曲；u'_{zk}、w'_k 分别表示中间节点 K 的纵向位移 u_{zk} 和截面翘曲 w_k 对坐标 z 的一阶导数。

对于 u_x、u_y 采用 5 次多项式插值函数，而对其他位移采用 3 次多项式插值函数。确定了插值函数后，利用虚功原理即可得到相应的刚度矩阵和质量矩阵。按有限元理论，利用变分原理 δV、δT、δW 可以分别得到刚度矩阵、质量矩阵和荷载列阵[4]。利用上述方法得到的质量矩阵是一致质量矩阵，在推导过程中将会发现由于插值函数的阶数不一样而带来的困难，也就是说要得到一致质量矩阵是比较困难的，因此采用集中质量矩阵。若认为每一单元是等截面(这与静力分析是一致的)的并注意到式(9)有

$$M=\frac{1}{2}\int_0^l\rho\,\mathrm{d}z=\frac{L}{2}\rho \tag{15}$$

式中，ρ 如式(7)所示，由式(7)和式(15)可知，就算采用集中质量矩阵，曲线梁的质量矩阵也是互相耦合的。

单元刚度矩阵

设广义内力向量$\{\sigma\}$、广义应变向量$\{\varepsilon\}$和广义弹性矩阵$[D]$的表达式如下

$$\{\sigma\}=\{N\ M_x\ M_y\ M_k\ M_w\ B\} \tag{16a}$$

$$\{\varepsilon\}=\{e\ \kappa_x\ \kappa_y\ \Phi_k\ \Phi_w\ \kappa_w\} \tag{16b}$$

$$[D]^{6\times6}=\mathrm{diag}[E_1A\ E_1I_x\ E_1I_y\ GI_k\ GI_c\ E_1I_w] \tag{16c}$$

式中，N、M_x、M_y、M_k、M_w、B 为广义内力。其中 N 为轴向力；M_x、M_y 分别为 x、y 方向上的弯矩；M_k 为约束扭转力矩，M_w 为纯扭转力矩；B 为截面上的双力矩。

利用单元节点位移来表示广义应变向量 $\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e$，式中 $[B]$ 为应变矩阵，其元素由插值函数和一些系数构成，具体表达式请参见文献[4]。得到应变矩阵 $[B]$ 后，应用有限元方法即可得到单元刚度矩阵[4]

$$[k]^e=\int_{-1}^{1}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\frac{l_e}{2}\mathrm{d}\zeta \tag{17}$$

同理可得等效节点力[4]

$$\{p\}^e=\int_{-1}^{1}[N]^{\mathrm{T}}\{q\}\frac{l_e}{2}\mathrm{d}\zeta \tag{18}$$

式中，$\{q\}=\{f_z\ f_z\ m_y\ f_y\ m_x\ b_w\ m_z\}$ 表示作用在单元上的外荷载，$[N]$ 为形函数矩阵[4]。

3 数值试验

按照前面所述的计算理论和有限元方法，编制相应的计算程序。为了验证程序和计算理论的正确性，选择某高速公路大型立交桥中的一联匝道桥进行自振特性分析，并将计算结果与大型通用有限元程序 ANSYS 的板单元模型及曲线梁桥分析系统 ASCB for windows Ver. 4.65 的计算结果进行比较。该匝道桥位于曲线半径 $R=280$m 的圆曲线上，为 3 跨连续梁，其跨径组成为 25.97m＋35m＋25.97m，桥面宽为 10m，主梁高为 1.6m 的单箱单室预应力混凝土箱形梁，墩高 11.6m。计算模型如图 3 所示。

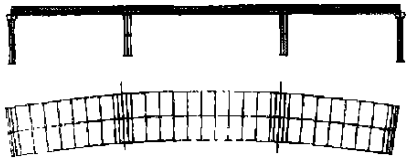

图 3 计算模型

表 1 列出了该桥前 10 阶自振特性的计算结果。由表中可以看出，3 种计算模型前 10 阶计算的频率非常接近，振型一致。

表 1 自振特性比较表 Hz

序号	本文空间曲梁模型	ASCB 模型	ANSYS 空间板模型	与 ASCB 相对误差/%	与 ANSYS 相对误差/%	振型描述
1	3.0162	3.1334	3.0376	－3.7400	－0.7045	6#墩顶梁的横摆
2	3.0248	3.2384	3.1527	－6.5950	－4.0568	9#墩顶梁的横摆
3	3.7981	4.2868	3.8966	－11.3999	－2.5278	一阶对称竖弯＋纵漂
4	4.2243	4.5406	4.3868	－6.9658	－3.7043	扭转＋对称竖弯
5	5.2584	5.4998	4.8400	－4.3891	8.6446	主梁对称扭转
6	7.0802	6.6210	6.7700	6.9350	4.5820	反对称竖弯
7	7.5289	7.7702	7.1923	－3.1055	4.6800	主梁横弯＋扭转
8	8.3568	8.5444	7.6239	－2.1960	9.6132	对称竖弯＋扭转
9	9.6894	9.7563	9.6051	－0.6855	0.8777	反对称扭转＋横弯
10	12.5380	12.1557	10.9340	3.1450	14.6698	6#墩的纵摆

4 结论

（1）本文提出的计算理论及有限元方法是正确合理的，程序的计算结果是可靠的。

（2）本文明确解释了曲线梁桥与直线梁桥在振动问题上的异同点。

（3）文中给出了曲线梁桥质量矩阵的显示表达式。

参考文献：

[1] 李乔. 薄壁曲箱梁的空间分析理论 [D]. 成都：西南交通大学博士学位论文，1987.

[2] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析（上）[M]. 北京：中国铁道出版社，1983.

[3] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析-曲线梁与斜支箱形梁 [M]. 北京：中国铁道出版社，1998.

[4] 单德山. 高速铁路曲线梁桥车桥耦合振动分析及大跨度曲线梁桥设计研究 [D]. 成都：西南交通大学博士学位论文，1999.

[5] 倪振华. 振动力学 [M]. 西安：西安交通大学出版社，1989.

[6] 川井忠彦. 振动矩阵分析方法 [M]. 北京：中国建筑工业出版社，1982.