中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 11 期: 1675～1686
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

两字母代换序列复杂度的计算

献给余家荣教授 100 华诞

谭波[1], 文志雄[1], 章逸平[2]*

1. 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074;
2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: tanbo@hust.edu.cn, zhi-xiong.wen@hust.edu.cn, ypzhang@whu.edu.cn

收稿日期: 2018-11-04; 接受日期: 2019-06-22; 网络出版日期: 2019-08-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11431007, 11222111 和 11471130) 资助项目

摘要 两字母代换序列的复杂度的计算对于等长代换已经解决, 然而非等长代换的复杂度计算要复杂得多, 此前并没有完全解决. 本文讨论一般的可不等长的两字母代换, 通过研究几种类型的特殊词, 证明只需计算出一些初始值, 复杂度可用相应特征多项式的递归公式完全表示出来.

关键词 代换 特殊词 复杂度

MSC (2010) 主题分类 68R99, 20M35

1 引言

有限字符集上的代换的研究在有限自动机、符号动力系统、形式语言、数论和分形几何等领域有重要意义. 它在准晶理论、复杂度计算和信息学等领域 (参见文献 [1–5] 及其参考文献) 有重要应用. 此外, 它也是组合群论的基本研究对象之一 (参见文献 [6, 7]).

考虑在有限字符集 $\mathbb{A}$ 上的一个无穷序列 $\xi = \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$ $(\xi_i \in \mathbb{A})$, 我们用 $\mathcal{L}_n(\xi)$ 表示 ξ 的长为 n $(n \geqslant 1)$ 的因子的集合 $\{\xi_i\cdots\xi_{i+n-1} \mid i \geqslant 1\}$, 约定 $\mathcal{L}_0(\xi)$ 表示由空词 ε 所构成的单点集. 集 $\mathcal{L}(\xi) = \bigcup_{n\geqslant 0}\mathcal{L}_n(\xi)$ 称为 ξ 的语言, 函数 $p_\xi(n) := \#\mathcal{L}_n(\xi)$ 称为 ξ 的复杂度, 其中 $\#$ 表示一个有限集的元素个数.

设 $\mathbb{A}^*$ 是由 $\mathbb{A}$ 生成的自由模 (以 ε 作为幺元). 一个从 $\mathbb{A}^*$ 到 $\mathbb{A}^*$ 的同态 σ 称为一个代换. 不妨只考虑非消除代换 ($\mathbb{A}$ 中任何字母的像都是非空词), 该代换可自然延拓到 $\mathbb{A}$ 上的无限序列 $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. $\xi \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 称为 σ 的不动点, 若 $\sigma(\xi) = \xi$. 以 ξ_σ 表示 σ 的任何一个不动点 (若存在).

ξ_σ 的复杂度 (亦称 σ 的复杂度) 的研究有悠久的历史. 一般情形下, 对于给定的代换 σ 很难给出 $p_\xi(n)$ 的显式表达, 只能在相关文献中找到某些特殊代换的公式研究. 我们列举一些如下:

(1) 对某正整数 n, $p_\xi(n) \leqslant n$ 当且仅当 ξ 是最终周期的, 此时其复杂度是有界的 (参见文献 [8]);

英文引用格式: Tan B, Wen Z X, Zhang Y P. Calculation of the complexities of substitutive sequences over a binary alphabet (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1675–1686, doi: 10.1360/N012018-00269

(2) 一序列 ξ 的复杂度若满足 $p_\xi(n)=n+1$, 则称该序列为 Sturm 序列, 对 Sturm 序列有大量研究 (参见文献 [4,9,10]);

(3) Rote[11] 利用图法构建了一类序列, 其复杂度为 $2n$;

(4) Mossé[12] 研究了 q- 自动机的情形 (对应于等长代换), 在一些技术性条件下给出了计算 $p(n)$ 的一个线性递归公式;

(5) 在三元字母表上, Arnoux 和 Rauzy[13] 引入了一类复杂度为 $2n+1$ 的 Tribonacci 型的代换, Tan 等[14] 引入了另一类复杂度为 $3n$ 的代换 (Triplex 代换);

(6) 对于某代换的不动点, 其复杂度能且只能有 5 种不同的渐近形式: $\Theta(1)$、$\Theta(n)$、$\Theta(n\log\log n)$、$\Theta(n\log n)$ 或 $\Theta(n^2)$, 其中 $\Theta(g(n))$ 表示满足 $0<\liminf\frac{f(n)}{g(n)}\leqslant\limsup\frac{f(n)}{g(n)}<\infty$ 的函数 $f(n)$ (参见文献 [15]);

(7) 关于多于二元的字母表的词因子的复杂度, 其一般理论综述和计算可参见文献 [16,17].

本文考虑一般的二元字母表上的代换 σ. 应用 Mossé 的可识别理论[12] 和研究各种类型的特殊词[16,18], 我们将证明复杂度 $p(n)$ 能被完整刻画 (当知道一些初始值), 并给出一个可用于计算的递推公式.

2 记号与预备引理

记 $\mathbb{A}=\{a,b\}$ 为由 a 和 b 构成的字母表. 用 $\mathbb{A}^*$ 表示由 $\mathbb{A}$ 生成的自由模 (空词 ε 作为幺元), 用 $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 表示 $\mathbb{A}$ 上的所有无限序列 (亦称无限词) 构成的集合.

若 $w\in\mathbb{A}^*$, $|w|$ 表示其长度, $|w|_a$ (或 $|w|_b$) 表示字母 a (或 b) 在 w 中出现的次数. w 的 Abel Parikh 向量表示为列向量 $L(w)=(|w|_a,|w|_b)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{N}^2$.

称词 v 是词 w 的因子 (记为 $v\in w$), 若存在 $u,u'\in\mathbb{A}^*$, 使得 $w=uvu'$. 我们将使用非常方便的记号 “$\circledast$” 来统一代表某些 (不需要知道其具体字母构成的) 不同的词. 例如, v 是词 w 的因子当且仅当 $w=\circledast v\circledast$. 称 v 是 w 的前缀 (或后缀), 若 $w=v\circledast$ (或 $w=\circledast v$), 我们写作 $v\lhd w$ (或 $v\rhd w$). 两个词 v 和 w 称为可比的, 记作 $v\bowtie w$, 若 $v\rhd w$ 或 $w\rhd v$. 因子和前缀的概念自然能推广到无限词的情形.

我们将使用下述方便的记号: $\mathbb{A}^*v:=\{xv\mid x\in\mathbb{A}^*\}$, $\mathbb{A}^*v\mathbb{A}^*:=\{xvy\mid x,y\in\mathbb{A}^*\}$. 例如, $w\in\mathbb{A}^*v\mathbb{A}^*$ 表示 $v\in w$; $w\in v\mathbb{A}^*$ 表示 $v\lhd w$.

当 $\xi=w_1\cdots w_m\cdots\in\mathbb{A}^*\cup\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ $(w_i\in\mathbb{A})$, 我们也写作 $\xi|_1=w_1,\dots,\xi|_m=w_m,\dots$, 以及 $\xi[i,j]=w_iw_{i+1}\cdots w_j$ $(i\leqslant j)$.

如上所述, $\mathbb{A}$ 上的代换 σ 是 $\mathbb{A}^*$ 上的一个同态, 矩阵 $M=(L(\sigma(a)),L(\sigma(b)))$ 称为 σ 的代换矩阵. M 的特征多项式 $\lambda^2-\mathrm{tr}(M)\lambda+\det(M)$ 亦称为 σ 的特征多项式.

若 $\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 有不同的首字母, 称 σ 是 “有标记的”. 若进一步 $\sigma(a)=a\circledast$ 且 $\sigma(b)=b\circledast$, 则称 σ 是 “好标记的”.

本文假设 σ 的不动点 ξ 不是最终周期的, 因为最终周期的情形已由 Séébold[19] 完全解决. 特别地, 当 $\{\sigma(a),\sigma(b)\}$ 是一个编码, σ 对应于一个内自同态 (参见文献 [4]). 此外, 若 ξ_σ 不是最终周期的, 由 Fine-Wilf 定理[20] 可知, 在 σ 的共轭类里, 必有一个是有标记的 (且有相同的语言和复杂度). 又容易看出, 当 σ 是有标记的, 则 σ 和 σ^2 至少其一是好标记的, 相应的不动点、复杂度等是一致的. 因此, 不失一般性, 假设 σ 是好标记的.

称代换 σ 是本原的, 若其代换矩阵 M 是本原的 (对充分大的 n, M^n 的所有分量是正的). 这里指

出, 若 σ 是好标记的但不是本原的, 则 $\sigma(a)=a^n$, $\sigma(b)=b\circledast$ (或 $\sigma(a)=a\circledast$, $\sigma(b)=b^n$), 此时 a^∞ (或 b^∞) 是其不动点, 另一不动点的语言相对而言并不复杂. 本文只讨论本原代换的情形.

显然, 好标记的本原代换拥有不动点 $\sigma^\infty(a)$ 和 $\sigma^\infty(b)$. 下面列举几个本原代换 σ 的熟知性质:

(1) σ 的不动点是常返的, 即它的每个因子会出现无限次, 所有 σ 的不动点具有相同的语言;

(2) 代换 σ 与其幂 σ^n ($n\geqslant 1$) 有相同的不动点, 因此有相同语言;

(3) 若某代换是一个 (相应自由群的) 内自同构与另一代换的复合, 则此二代换有相同语言.

"特殊词" 的概念是计算复杂度的有力工具 (参见文献 [4,5,16,18,21]).

设 W 是 ξ 的一个因子. 若 $\delta\in\mathbb{A}$ 使得 $W\delta$ 是 ξ 因子, 则称 $W\delta$ 是 W 的一个右延拓. 一个词称为是 ξ 的右特殊词 (简称特殊词), 若它满足 $Wa\in\xi$ 和 $Wb\in\xi$. 类似地, 定义 "左延拓" 和 "左特殊词". 容易看出, 特殊 (或左特殊) 词的后缀 (或前缀) 亦是特殊词 (或左特殊词).

用 $\mathcal{S}_n$ (或 $\mathcal{LS}_n$) 表示 ξ 的长度为 n 的特殊词 (或左特殊词) 的集合. 令 $\mathcal{S}=\bigcup_{n\geqslant 0}\mathcal{S}_n$ (或 $\mathcal{LS}=\bigcup\mathcal{LS}_n$). 容易看出

$$s(n):=\#\mathcal{S}_n=\#\mathcal{LS}_n=\Delta p(n+1)\ (:=p(n+1)-p(n)).$$

因此, $p(n)$ 的研究等价于 $s(n)$ 的研究.

综上所述, 本文 (不失一般性地) 假设 σ 是非最终周期、本原、好标记的代换.

2.1　词 W_0 及字母 δ_a 和 δ_b

令 $A=\sigma(a)$, $B=\sigma(b)$, $\{A,B\}^*$ 表示由词 A 和 B 进行有限次连接而生成的词的集合. 如同以前的方便记号, 记 $\{A,B\}^*A:=\{VA\mid V\in\{A,B\}^*\}$. 注意到 σ 是非周期的, 因此, $\{A,B\}$ 是一个编码, 且 $\{A,B\}^*$ 是 $\{A,B\}^*A$ 与 $\{A,B\}^*B$ 的不交并.

由于 σ 是非周期的, 其左无限词 A^∞ $(=\cdots AA\cdots A)$ 与 B^∞ 是不同的. 我们以 W_0 表示 A^∞ 和 B^∞ 的最长公共后缀 (参见文献 [22]). 需要强调的是 W_0 可以是空词.

下述引理是 Fine-Wilf 定理 [20] 的直接推论:

引理 2.1　$|W_0|\leqslant|A|+|B|-2$.

由 W_0 的定义知, 对某满足 $\{\delta_a,\delta_b\}=\{a,b\}$ 的 $\delta_a,\delta_b\in\{a,b\}$, 有

$$A^\infty=\circledast\delta_aW_0\quad 且\quad B^\infty=\circledast\delta_bW_0. \tag{2.1}$$

(2.1) 说明存在 $m\geqslant 0$ 和 $A'\triangleright A$ ($|A'|<|A|$) 使得

$$W_0=A'A^m\quad 且\quad \delta_aA'\triangleright A. \tag{2.2}$$

类似地, $W_0=B'B^k$ 且 $\delta_bB'\triangleright B$.

下述引理本质上来自文献 [22].

引理 2.2　(1) 若 $W\in\{A,B\}^*$, 则 $W_0\bowtie W$. 进一步有,

(2) 若 $W\in\{A,B\}^*A$ (或 $\{A,B\}^*B$) 且 $|W|>|W_0|$, 则 $\delta_aW_0\triangleright W$ (或 $\delta_bW_0\triangleright W$), 其中 δ_a 和 δ_b 如同在 (2.1) 定义.

(3) 设 $W\in\{A,B\}^*$. 若 $\delta_aW_0\triangleright W$ (或 $\delta_bW_0\triangleright W$), 则 $W\in\{A,B\}^*A$ (或 $\{A,B\}^*B$).

简言之, 任何 $\{A,B\}^*$ 的词是与 W_0 可比较的. 这些词中, $\{A,B\}^*A$ 中的词是与 δ_aW_0 可比较的, $\{A,B\}^*B$ 是与 δ_bW_0 可比较的.

证明 若 $W=A$ 或 $W=B$, 引理结论显然. 现设 $W\in\{A,B\}^*$ 使得 $W_0\bowtie W$, 我们断言 $\delta_a W_0\bowtie WA$ 和 $\delta_b W_0\bowtie WB$. 该二断言的证明类似, 我们只证明第一个. 只需考虑下述两种情形:

情形 1 $W_0\rhd W$. 此时 $W_0A\rhd WA$, 另一方面, $\delta_a W_0\rhd W_0A$ (因为它们均是 A^∞ 的后缀). 从而, $\delta_a W_0\rhd WA$.

情形 2 $W\rhd W_0$. 此时 $WA\rhd W_0A$, 同时 W_0A 是 A^∞ 的后缀, 因此, WA 是 A^∞ 的后缀. 因二者均是 A^∞ 的后缀, 所以, $WA\bowtie\delta_a W_0$. □

推论 2.1 设 $W\in\{A,B\}^*$, 则 $W_0\rhd W_0W$, $\delta_a W_0\rhd W_0WA$, $\delta_b W_0\rhd W_0WB$. 特别地, $\delta_a W_0\rhd W_0A$, $\delta_b W_0\rhd W_0B$.

2.2 自然分解与可识别性

设序列 ξ 是 σ 的一个确定的不动点. 记 $\xi=\xi_1\xi_2\cdots$. 由于 $\sigma(\xi)=\xi$, 我们有下述 ξ 的 "自然分解":

$$\xi=[\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n_2-1}][\xi_{n_2}\cdots\xi_{n_3-1}]\cdots[\xi_{n_k}\cdots\xi_{n_{k+1}-1}][\xi_{n_{k+1}}\cdots, \tag{2.3}$$

其中 $\xi_k\in\mathbb{A}=\{a,b\}$, $\sigma(\xi_k)=\xi_{n_k}\cdots\xi_{n_{k+1}-1}\in\{A,B\}$ $(k\geqslant 1)$, $n_1\ (:=1),\dots,n_k\ (:=|\sigma(\xi[1,k-1])|+1)$, $\dots$ 称为 ξ 的 "切位". 记

$$E_1=\{n_k\mid k\geqslant 1\}. \tag{2.4}$$

现考虑 ξ 的因子. 令 $W=\xi_i\xi_{i+1}\cdots\xi_j\in\xi$, 则 (对照 (2.3)) 存在某些整数 k 和 l 使得 $(n_{k-1}<i\leqslant n_k\leqslant n_l\leqslant n_{l+1}-1\leqslant j<n_{l+2})$, 而且

$$W=\xi_i\cdots\xi_{n_k-1}][\xi_{n_k}\cdots\xi_{n_{k+1}-1}]\cdots[\xi_{n_l}\cdots\xi_{n_{l+1}-1}][\xi_{n_{l+1}}\cdots\xi_j,$$

即观察 W 在 ξ 中的切位, 我们能写出下述 W 的自然分解:

$$W=U\sigma(\xi_k)\cdots\sigma(\xi_l)V=U\sigma(W')V, \tag{2.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
&U=\xi_i\cdots\xi_{n_k-1}\rhd\sigma(\xi_{k-1}),\quad |U|<|\sigma(\xi_{k-1})|,\\
&\sigma(\xi_k)=\xi_{n_k}\cdots\xi_{n_{k+1}-1},\\
&\vdots\\
&\sigma(\xi_l)=\xi_{n_l}\cdots\xi_{n_{l+1}-1},\\
&V=\xi_{n_{l+1}}\cdots\xi_j\lhd\sigma(\xi_{l+1}),\quad |V|<|\sigma(\xi_{l+1})|,\\
&W'=\xi_k\cdots\xi_l\in\xi.
\end{aligned}$$

称 W' (或 ξ_m, $k\leqslant m\leqslant l$) 是 $\sigma(W')$ (或 $\sigma(\xi_m)$) 的祖先, 有时也称 $\xi_{k-1}\xi_k\cdots\xi_l\xi_{l+1}$ 是 W 的祖先.

我们将 "自然分解" 的意义稍加推广: 若 $W=U\sigma(W_1W''W_2)V$ 如 (2.5), 则称 $W=U'\sigma(W'')V'$ 是一个 "自然分解" (其中 $U'=U\sigma(W_1)$, $V'=\sigma(W_2)V$), 并记作 $W=U'[\sigma(W'')]V'$. 等价地, 符号 $U'[\sigma(W'')]V'$ 表示存在 $U'',V''\in\mathbb{A}^*$ 使得

$$U''W''V''\in\xi,\quad U'\rhd\sigma(U''),\quad 且\quad V'\lhd\sigma(V''). \tag{2.6}$$

直观上, $U'[\sigma(W'')]V'$ 出现在 ξ 中时, 以 "[" 和 "]" 标记其自然的切位.

我们称 (2.5) 的分解为 W 的严格自然分解.

注 2.1 自然分解总能延拓成一个严格自然分解, 一般情形下, 一个因子的自然分解并不是唯一的; $U\sigma(W)V \in \xi$ 并不一定意味着可以写成 $U[\sigma(W)]V$.

应用可识别理论, 我们有 (回顾 $\xi[i,j] = \xi_i \cdots \xi_j$) 下面的引理:

引理 2.3[12] 存在只与 σ 有关的正整数 C 使得, 若 $W \in \xi$ 能表示为 $W = \xi[i-C, i+C] = \xi[j-C, j+C]$, 其中 $i \in E_1$, 则 $j \in E_1$.

称 $\xi[i-C, i+C]$ 和 $\xi[j-C, j+C]$ (分别在位置 i 和 j) 有公共的相对切位.

作为推论, 若 W 足够长, 具体说是 $|W| \geqslant L$, 其中

$$L = \max\{2C + \max\{|A|, |B|\}, |A| + |B| - 1\} \quad (> |W_0|), \tag{2.7}$$

该相对切位出现在 ξ 的不同位置: $W = \xi[i_1, i_2] = \xi[j_1, j_2]$, 粗略地, $\xi[i_1, i_2]$ 和 $\xi[j_1, j_2]$ 的中部位置. 它们有一个相对公共切位: 对某 $N \in (|W|/2 - \max\{|A|, |B|\}, |W|/2 + \max\{|A|, |B|\})$, 有 $i_1 + N \in E_1$ 和 $j_1 + N \in E_1$.

3 算子 T 和 $\mathcal{LS}$ 的结构

定义 $T : \mathbb{A}^* \to \mathbb{A}^*$:

$$T(W) = W_0\sigma(W).$$

注意到 T 并不是 $\mathbb{A}^*$ 上的一个同态. 容易验证 T 是单射且

$$T^n(W) = W_0\sigma(W_0)\cdots\sigma^{n-1}(W_0)\sigma^n(W). \tag{3.1}$$

引理 3.1 若 $W \in \xi$, 则 $T(W) \in \xi$. 此外, $T(W) = W_0[\sigma(W)]$.

证明 由 σ 的本原性, 这个确定的序列 ξ 是常返的. 因此, 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 对某 $U \in \mathbb{A}^*$ ($|U| = n$), 有 $UW \in \xi$. 再由 ξ 的 σ 不变性, 有 $\sigma(U)\sigma(W) \in \xi$. 当 U 的长度 n 足够大, 由引理 2.2 知, $W_0 \triangleright \sigma(U)$, 因此, $T(W) = W_0[\sigma(W)] \in \xi$. □

引理 3.2 设 $W_1, W_2 \in \mathbb{A}^*$, 则 $T(W_1) = T(W_2)$ 当且仅当 $W_1 = W_2$; $T(W_1) \triangleleft T(W_2)$ 当且仅当 $W_1 \triangleleft W_2$; $T(W_1) \triangleright T(W_2)$ 当且仅当 $W_1 \triangleright W_2$.

证明 因 σ 是好标记的, 故前两个陈述成立. 最后一个由推论 2.1 即得. □

下述引理告诉我们, 若因子 W 出现在有不同自然分解的两个位置, 则除了前缀 $W_0' \triangleright W_0$, 它们有一致的相对切位.

引理 3.3 设 $W \in \xi$, $|W| \geqslant L$ (L 见 (2.7)), 并设 W 出现在 ξ 的两个不同位置, $W = P_1[\sigma(U_1)]Q_1$ 和 $W = P_2[\sigma(U_2)]Q_2$—相应的严格自然分解表示.

以 U 表示 U_1 和 U_2 的最长公共后缀, 写作 $U_1 = U_1'U$, $U_2 = U_2'U$ (这里 U_1' 或 U_2' 可以是空词), 则 U 是非空的, 且

$$P_1\sigma(U_1)Q_1 = W_0'[\sigma(U)]Q = P_2\sigma(U_2)Q_2, \tag{3.2}$$

其中 $Q = Q_1 = Q_2$, $W_0' = P_1\sigma(U_1') = P_2\sigma(U_2') \bowtie W_0$. 更细致地, 要么 $W_0' \triangleright W_0$, 要么 $U_1' = U_2' = \epsilon$ 且对某 $\delta \in \mathbb{A}$, 有 $W_0' \triangleright \sigma(\delta)$.

证明 由引理 2.3 知, 两个不同的严格自然分解有相同的相对切位. 因此, U_1 和 U_2 有公共的非空后缀, 即 U 是非空的; 而且 $Q_1 = Q_2$, 从而, $P_1\sigma(U_1') = P_2\sigma(U_2') \bowtie W_0$, 其中最后一式源于引理 2.2. □

引理 3.4 (1) 若 $W \in \mathcal{LS}$, $|W| \geqslant L$, 则存在唯一 $U \in \mathbb{A}^*$, $\delta \in \mathbb{A}$, $Q \lhd \sigma(\delta)$, $U\delta \in \xi$, $|Q| < |\sigma(\delta)|$, 使得

$$aW = aW_0[\sigma(U)]Q \quad 且 \quad bW = bW_0[\sigma(U)]Q.$$

(2) 若 $W \in \mathcal{S}$, $|W| \geqslant L$, 则存在 $U \in \mathbb{A}^*$, $W_0' \in \mathbb{A}^*$, 要么 $W_0' \rhd W_0$, 要么 $W_0' \rhd \sigma(\delta)$, $|W_0'| < |\sigma(\delta)|$ $(\delta \in \mathbb{A})$, 使得

$$Wa = W_0'[\sigma(U)]a \quad 且 \quad Wb = W_0'[\sigma(U)]b.$$

(3) 若 $W \in \mathcal{LS} \cap \mathcal{S}$, $|W| \geqslant L$, 则存在唯一 $U \in \mathbb{A}^*$ 使得 $W = T(U)$.

注 3.1 $\mathcal{LS} \cap \mathcal{S}$ 中的词 w 称为双特殊词, 参见文献 [18,21].

证明 (1) 考虑 aW 和 bW 的严格自然分解:

$$aW = aP_a[\sigma(U_a)]Q_a \quad 且 \quad bW = bP_b[\sigma(U_b)]Q_b,$$

U 表示 U_a 和 U_b 的最长的公共后缀, $U_a = U_a'U$, $U_b = U_b'U$. 则如同前面的证明, U 是非空的, $Q_a = Q_b$, $P_a\sigma(U_a') = P_b\sigma(U_b')$. 进一步令 $W_0' = P_a\sigma(U_a')$, 则有 $aW_0' \rhd \sigma(W_a)$, $bW_0' \rhd \sigma(W_b)$, 其中 $W_a, W_b \in \mathbb{A}^*$, 且 W_a 和 W_b 的最后字母是不同的. 这些事实, 连同引理 2.2, 说明了 $W_0' = W_0$.

(2) 这部分证明与上面完全类似.

(3) 这是前面两条的推论. □

引理 3.5 (1) $W_0 \in \mathcal{LS}$.

(2) 左特殊词的任一前缀是左特殊词.

(3) 若 $W \in \mathcal{LS}$, 则 $T(W) \in \mathcal{LS}$.

(4) 设 $W \in \mathcal{LS}$, $|W| \geqslant L$, 则存在唯一 $U \in \xi$, $\delta \in \{a, b\}$ 使得 $W = W_0[\sigma(U)]Q = T(U)Q \lhd T(W')$ (见引理 3.4), 其中 $W' = U\delta$. 我们还有 $U, W' \in \mathcal{LS}$.

证明 (1) 和 (2) 是显然的.

(3) 若 $aW \in \xi$, 则由引理 3.1 知, $T(aW) \in \xi$. 由 (2.2) 可知, $\delta_a T(W) = \delta_a W_0 \sigma(W)$ 是 $T(aW) = W_0 A\sigma(W)$ 的后缀, 从而, $\delta_a T(W) \in \xi$. 从这里可以看出 $W \in \mathcal{LS}$ 会导致 $T(W) \in \mathcal{LS}$.

(4) 由前一引理的证明即可得到. □

记 $\overline{\mathcal{LS}} = \bigcup_{i=1}^{L} \mathcal{LS}_i$, $\overline{\mathcal{LS}}_n = \{W \mid W \lhd T^n(W'), W' \in \overline{\mathcal{LS}}\}$. 注意 $\overline{\mathcal{LS}}_n$ 是关于 n 单调的. 下述定理是上述引理的直接推论:

定理 3.1 $\mathcal{LS} = \bigcup \overline{\mathcal{LS}}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{LS}}_n$.

注 3.2 上述定理告诉我们, 所有左特殊词 (复杂度是由它们所确定的) 可以通过有限个 $\overline{\mathcal{LS}}$ 中的左特殊词和算子 T 获取.

4 $\mathcal{S}$ 的结构和 $\Delta^2 p(n)$ 的计算

一旦知道了初始特殊词, $p(n)$ 的计算被转化成 $\Delta s(n+1) = \#\mathcal{S}_{n+1} - \#\mathcal{S}_n$ 的计算. 注意到任何特殊词的后缀仍是特殊词, 因此, 若 $W \in \mathcal{S}_{n+1}$, 则 $W = \delta W'$ $(W' \in \mathcal{S}_n$ 和 $\delta \in \{a, b\})$. 这样, 特殊词的集合能清楚地以树形结构显示出来, 即 $\mathcal{S}_{n+1}$ 将由 $\mathcal{S}_n$ 而派生出来 (见后面的例子及图).

按照通用方法, 为研究特殊词之树, 我们将用下述特殊词的概念和记号 (参见文献 [16]):

定义 4.1 设 $W \in \mathcal{S}$. 但 aW 和 bW 均不属于 $\mathcal{S}$, 称 W 是弱特殊词; 若 aW 和 bW 两者均属于 $\mathcal{S}$, 则称 W 是强特殊词. 我们分别以 $\mathcal{S}^0$ 和 $\mathcal{S}^2$ 表示弱特殊词和强特殊词的集合. 另外的特殊词集将记为 $\mathcal{S}^1$.

对 $i \in \{0,1,2\}$, 记 $\mathcal{S}_n^i = \mathcal{S}^i \cap \mathcal{L}_n$. 显然, $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n^0 \cup \mathcal{S}_n^1 \cup \mathcal{S}_n^2$ 且 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^0 \cup \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$.

引理 4.1 (参见文献 [16, 定理 4.5.4]) (1) $\Delta s(n+1) = s(n+1) - s(n) = \#\mathcal{S}_n^2 - \#\mathcal{S}_n^0$.

(2) $\mathcal{S}_n^0 \cup \mathcal{S}_n^2 \subset \mathcal{S}_n \cap \mathcal{L}\mathcal{S}_n$.

证明 (1) 以及 $\mathcal{S}_n^2 \subset \mathcal{L}\mathcal{S}_n$ 是显然的. 剩下只需注意到: 若一个特殊词只有一个左延拓, 则该左延拓也是特殊词. □

引理 4.2 设 $c, d \in \mathbb{A}, W \in \xi$. 若 $cWd \in \xi$, 则 $\delta_c T(W) d \in \xi$. 反之, 若 $\delta_c T(W) d \in \xi$ 且 $|T(W)| \geqslant L$, 则 $cWd \in \xi$.

证明 若 $cWd \in \xi$, 则由引理 3.1 可知, $T(cWd) \in \xi$, 即 $W_0\sigma(c)\sigma(W)\sigma(d) \in \xi$. 这些事实, 连同推论 2.1 和 σ 是好标记的这一事实, 得出 $\delta_c W_0 \sigma(W) d = \delta_c T(W) d \in \xi$.

反之, 若 $\delta_c T(W) d \in \xi$ 且 $|T(W)| \geqslant L$, 则由引理 3.3 知, $\delta_c T(W) d = \delta_c W_0[\sigma(W)]d$ 是一个自然分解. 考虑 $\delta_c T(W) d$ 的祖先, 我们仍由推论 2.1 和 σ 是好标记的这一事实推知 $cWd \in \xi$. □

引理 4.3 若 $W \in \mathcal{S}$, 则 $T(W) \in \mathcal{S}$ (从而 $\sigma(W) \in \mathcal{S}$); 进一步有 $T(W)a = W_0[\sigma(W)]a$, $T(W)b = W_0[\sigma(W)]b$.

反之, 若 $W \in \mathcal{S}$ 且 $|W| \geqslant L$, 则存在 $U \in \mathcal{S}$ 使得 $W \triangleright T(U)$.

证明 设 $W \in \mathcal{S}$, 则 $Wa, Wb \in \xi$. 由引理 3.1 知, $W_0[\sigma(W)]A, W_0[\sigma(W)]B \in \xi$. 由于 $A = a\circledast$ 和 $B = b\circledast$, 引理第一部分获证.

余下部分是引理 3.4(2) 的一个表达形式. □

关于 $\mathcal{S}^2$ 和 $\mathcal{S}^0$ 的结构, 我们还有下面的引理:

引理 4.4 若 $W \in \mathcal{S}^2$, 则 $T(W) \in \mathcal{S}^2$. 反之, 若 $W \in \mathcal{S}^2$, $|W| \geqslant L$, 则存在唯一 $U \in \mathcal{S}^2$ 使得 $W = T(U)$.

证明 设 $W \in \mathcal{S}^2$, 则由定义知,

$$aWa, aWb, bWa, bWb \in \xi. \tag{4.1}$$

再由引理 4.2 知,

$$\delta_a T(W)a, \delta_a T(W)b, \delta_b T(W)a, \delta_b T(W)b \in \xi,$$

即 $T(W) \in \mathcal{S}^2$. 引理第一部分获证.

现设 $W \in \mathcal{S}^2$ 且 $|W| \geqslant L$, 则由引理 4.1(2) 和 3.4(3) 知, $W = T(U)$. 另外, 由引理 4.2, 有 $U \in \mathcal{S}^2$. □

引理 4.5 若 $W \in \mathcal{S}^0$, $|T(W)| \geqslant L$, 则 $T(W) \in \mathcal{S}^0$. 反之, 若 $W \in \mathcal{S}^0$ 且 $|W| \geqslant L$, 则存在唯一 $U \in \mathcal{S}^0$ 使得 $W = T(U)$.

证明 由引理 4.2, 当 $|T(W)| \geqslant L$ 时, $cWd \in \xi$ 当且仅当 $\delta_c T(W) d \in \xi$. 因此, $W \in \mathcal{S}^0$ 当且仅当 $T(W) \in \mathcal{S}^0$. 剩下的证明与上一引理对应部分类似. □

现记长度小于 L 的强特殊词集为 $\overline{\mathcal{S}^2} = \bigcup_{i=1}^{L} \mathcal{S}_i^2$; $\widetilde{\mathcal{S}^2}$ 表示满足 $W \in \overline{\mathcal{S}^2}$ 和 $|T(W)| > L$ 的词集. 集合 $\overline{\mathcal{S}^0}$ 和 $\widetilde{\mathcal{S}^0}$ 类似定义. 令

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{S}^0} \cup \widetilde{\mathcal{S}^2}, \tag{4.2}$$

其中元素称为 "初始特殊词".

引理 4.6 对 $n > L$, 有

$$\#\mathcal{S}_n^2 = \sum_{W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}} \sum_{k \geqslant 1} \delta(|T^k(W)|, n) \quad \text{且} \quad \#\mathcal{S}_n^0 = \sum_{W \in \widetilde{\mathcal{S}^0}} \sum_{k \geqslant 1} \delta(|T^k(W)|, n),$$

其中 $\delta(i, j)$ 是 Kronecker 符号: $\delta(i, j) = 1$, 若 $i = j$; 否则为 0.

证明 设 $U \in \mathcal{S}_n^2$. 由引理 4.4 可知, 存在唯一的 $k \geqslant 1$ 和 $W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}$, 使得 $U = T^k(W)$. 反之, 若 $|T^k(W)| = n$, $k \geqslant 1$, $W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}$, 则 $T^k(W) \in \mathcal{S}_n^2$. 于是,

$$\mathcal{S}_n^2 = \{U \mid U = T^k(W), |T^k(W)| = n, k \geqslant 1, W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}\},$$

其中 k 和 W 由 $U = T^k(W)$ 唯一确定. 因此, 第一个等式获证. 第二个可类似证明. □

由上述引理和引理 4.1 立即推导出下面的公式:

引理 4.7 对 $n > L$, 有

$$\Delta s(n+1) = s(n+1) - s(n) = \sum_{W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}} \sum_{k \geqslant 1} \delta(|T^k(W)|, n) - \sum_{W \in \widetilde{\mathcal{S}^0}} \sum_{k \geqslant 1} \delta(|T^k(W)|, n).$$

这可以写成

$$\Delta s(n+1) = \sum_{W \in \overline{\mathcal{S}}} \sum_{k \geqslant 1} \mathrm{sgn}(W) \delta(|T^k(W)|, n),$$

其中 $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{i=1}^{L} \mathcal{S}_i$ (长度小于 L 的特殊词), 且

$$\mathrm{sgn}(W) = \begin{cases} -1, & \text{若 } W \in \widetilde{\mathcal{S}^0}, \\ 1, & \text{若 } W \in \widetilde{\mathcal{S}^2}, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases} \tag{4.3}$$

注 4.1 (1) 函数 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 等于某因子的双边多重性 (参见文献 [16]). 更一般情形可参见文献 [16, 定理 4.5.4].

(2) 上述引理告诉我们, 一旦确定特殊词的某有限集 $\overline{\mathcal{S}}$, 复杂度 $p(n)$ $(n \geqslant 1)$ 是可以计算的. 我们将在下节找出一个用于计算的 (非线性) 递归公式.

5 复杂度的递归公式

我们知道, M 为 σ 的代换矩阵, 则 M^2 是 σ^2 的代换矩阵, 它拥有非负特征值. 由于 σ 和 σ^2 拥有相同的不动点序列 ξ, 不失一般性, 可假设 M 的特征值是非负的.

设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0$ 是相应的两个特征值, V_1 和 V_2 是对应的特征向量. 因 M 是本原的, 我们有 $\lambda_1 > \lambda_2$, 且 V_1 是正的.

回顾记号: 对 $W \in \{a, b\}^*$, 有 $L(W) = (|W|_a, |W|_b)^{\mathrm{T}}$,

$$|\sigma^n(W)| = (1, 1) M^n L(W). \tag{5.1}$$

引理 5.1 设 $X, Y \in \mathbb{R}^2$, 则存在 $N = N(X, Y) \geqslant 1$ 使得 $(1, 1) M^{N+n}(X - Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ 是常符号的, 即对任何 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $(1, 1) M^{N+n} X >$ (或 $=$、$<$) $(1, 1) M^{N+n} Y$.

证明 设 $X-Y=\mu_1V_1+\mu_2V_2$, 其中 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, 则对 $k\geqslant 1$, 有

$$(1,1)M^k(X-Y)=\lambda_1^k\mu_1(1,1)V_1+\lambda_2^k\mu_2(1,1)V_2.$$

情形 1 $\mu_1=0$. 则 $(1,1)M^k(X-Y)=\lambda_2^k\mu_2(1,1)V_2$, 这显然是 $\lambda_2\mu_2(1,1)V_2$ 的符号, 与 $k\geqslant 1$ 无关.

情形 2 $\mu_1>0$. 由于 $\lambda_1>0$, $(1,1)V_1>0$ 且 $\lambda_1>\lambda_2\geqslant 0$, 存在 $N\geqslant 1$ 使得对 $k\geqslant N$, 成立 $\lambda_1^k\mu_1(1,1)V_1+\lambda_2^k\mu_2(1,1)V_2>0$.

情形 3 $\mu_1<0$. 证明与上述情形类似. □

推论 5.1 设 $W_1,W_2\in\mathbb{A}^*$, 则存在 $N=N(W_1,W_2)$ 因子 $|T^{N+n}(W_1)|-|T^{N+n}(W_2)|$ $(n\in\mathbb{N})$ 是常符号的. 该符号 (称为最终符号) 将记为 $\mathrm{SGN}\{W_1,W_2\}$.

证明 这是上述引理和 (5.1) 的直接推论. □

事实上, 我们还有下面的推论:

推论 5.2 设 $W_1,W_2\in\mathbb{A}^*$, 则存在 $m_1=m_1(W_1,W_2)$, $m_2=m_2(W_1,W_2)\in\mathbb{N}$ 使得下述二者之一成立:

(1) $|T^{m_1}(W_1)|=|T^{m_2}(W_2)|<|T^{m_1+1}(W_1)|=|T^{m_2+1}(W_2)|<|T^{m_1+2}(W_1)|=|T^{m_2+2}(W_2)|<\cdots$;

(2) $|T^{m_1}(W_1)|<|T^{m_2}(W_2)|<|T^{m_1+1}(W_1)|<|T^{m_2+1}(W_2)|<|T^{m_1+2}(W_1)|<|T^{m_2+2}(W_2)|<\cdots$.

证明 若对某整数对 $m,n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathrm{SGN}(T^m(W_1),T^n(W_2))=0$, 则 (1) 自然成立.

否则, 对任何 $m,n\in\mathbb{N}$, 均有 $\mathrm{SGN}(T^m(W_1),T^n(W_2))\neq 0$. 不失一般性, 可设 $\mathrm{SGN}(W_1,W_2)=-1$. 由于本原性可知, 当 l 足够大时, W_2 必是 $T^l(W_1)$ 的因子, 于是, $\mathrm{SGN}(T^l(W_1),W_2)=1$. 另外, 显然, $m\mapsto\mathrm{SGN}(T^m(W_1),W_2)$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\{-1,1\}$ 的单调增满射, 因此存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{SGN}(T^m(W_1),W_2)=-1$, 同时 $\mathrm{SGN}(T^{m+1}(W_1),W_2)=1$. 因此, 若取

$$m_2=\max\{N(T^m(W_1),W_2),N(T^{m+1}(W_1),W_2)\},\quad m_1=m+m_2,$$

则 (2) 成立. □

现在我们能由上述引理推导出复杂度的递归性. 首先, 令 $\widetilde{\mathcal{S}}=\{S_1,S_2,\dots,S_K\}$, 记

$$n_1-1=\max\{\max\{m_1(W_1,W_2),m_2(W_1,W_2)\}\mid W_1,W_2\in\widetilde{\mathcal{S}}\},$$

其中 $m_1(W_1,W_2)$ 和 $m_2(W_1,W_2)$ 在推论 5.2 中定义.

我们从 $T^{n_1}(S_1)$ 开始. 由推论 5.2 可知, 对任何 $j=2,3,\dots,K$, 存在唯一 $n_j\in\mathbb{N}$ 使得 $|T^{n_1}(S_1)|\leqslant|T^{n_j}(S_j)|<|T^{n_1+1}(S_1)|$. 不失一般性, 可假设

$$|T^{n_1}(S_1)|\leqslant|T^{n_2}(S_2)|\leqslant\cdots\leqslant|T^{n_K}(S_K)|\leqslant|T^{n_1+1}(S_1)|.$$

为简便计, 令 $N_k^j=|T^j(T^{n_k}(S_k))|$ $(1\leqslant k\leqslant K,\ j\in\mathbb{N})$. 由推论 5.2 有下述 " $|T^i(W_k)|$ 之跳" 的同步性:

$$N_1^0\leqslant N_2^0\leqslant\cdots\leqslant N_K^0\leqslant N_1^1\leqslant N_2^1\leqslant\cdots\leqslant N_K^1\leqslant\cdots\leqslant N_1^j\leqslant N_2^j\leqslant\cdots\leqslant N_K^j\leqslant N_1^{j+1}\leqslant\cdots. \tag{5.2}$$

现在给出复杂度的递归计算公式.

令 $\chi_{[m,n)}$ 表示整数区间 $[m,n)$ 的示性函数. 记 $I^j=[N_1^j,N_1^{j+1})$, $j\in\mathbb{N}$. 容易看出 I^j 是子区间 $I_k^j=[N_k^j,N_{k+1}^j)$ $(j\in\mathbb{N},\ k\in\{1,2,\dots,K\})$ 的不交并, 其中 $N_{K+1}^j=N_1^{j+1}$, 即

$$[N_1^0,\infty)=\bigcup_{j=0}^{\infty}I^j,\quad I^j=\bigcup_{k=1}^{K}I_k^j.$$

5.1 复杂度的初始值

下面推导复杂度公式. 令 $c_k = \sum_{i=1}^{K} \mathrm{sgn}(S_i)\delta(|T^{n_i}(S_i)|, |T^{n_k}(S_k)|)$ $(k=1,\dots,K)$, 其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 由 (4.3) 所定义, 则由引理 4.7, 有 $\Delta s(n+1) = c_k$, 若 $n = |T^{n_k}(S_k)|$ $(k=1,\dots,K)$, 否则等于 0. 换言之, $n \mapsto s(n+1)$ $(n \in I^0)$ 是一阶梯函数, 其在 $n = N_k^0$ 处的跳为 c_k $(k \in \{1,2,\dots,K\})$:

$$s(n+1) = s(N_1^0) + \sum_{k=1}^{K}(c_1 + \cdots + c_k)\chi_{I_k^0}(n) \quad (n \in I^0). \tag{5.3}$$

5.2 I^j 上 $s(\cdot+1)$ 的递推公式

$I^j = \bigcup_{k=1}^{K} I_k^j$ $(j \in \mathbb{N})$ 可以直接计算或用如下的简单的递归公式表达:

命题 5.1 任给 $W \in \mathbb{A}^*$, $n \in \mathbb{N}$, 有

(1) $|\sigma^{n+2}(W)| = \mathrm{tr}(M)|\sigma^{n+1}(W)| - \det(M)|\sigma^n(W)|$, $|T^{n+2}(W)| = \mathrm{tr}(M)|T^{n+1}(W)| - \det(M) \times |T^n(W)| + a$, 其中 $a = |\sigma(W_0)| - (\mathrm{tr}(M)-1)|W_0|$;

(2) 若 $L(W) = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$, 则 $|\sigma^n(W)| = \lambda_1^n \mu_1(1,1)V_1 + \lambda_2^n \mu_2(1,1)V_2$, $|T^n(W)| = \lambda_1^n \mu_1(1,1)V_1 + \lambda_2^n \mu_2(1,1)V_2 + b_n$, 其中 b_n $(n \in \mathbb{N})$ 是由 $L(W_0)$ 和 M 所显式给出的一个确定序列.

证明 这些结论全由 (3.1)、(5.1) 和 Cayley-Hamilton 公式 (I 表示单位矩阵) 所导出: $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - \det(M)I$. □

这样, 我们已获得区间 I_j $(j \in \mathbb{N})$ 的递归性质. 仍旧利用引理 4.7 和 (5.2), 我们看到 $s(n+1)$ $(n \in I^j, j \in \mathbb{N})$ 与 $s(n+1)$ $(n \in I^0)$ 具有类似的递推关系. 这样, 类似于 (5.3), 我们已证明下述定理:

定理 5.1 设 σ 是好标记的、本原的、拥有非负特征值的非周期代换, 则对 $n \in [N_1^0, \infty) = \bigcup_{j=0}^{\infty} I^j$, 下述递推公式成立:

$$s(n+1) = s(N_1^j) + \sum_{k=1}^{K}(c_1 + \cdots + c_k)\chi_{I_k^j}(n) \quad (n \in I^j, \quad j \geqslant 0).$$

注 5.1 (1) 前面已说明 "好标记的、本原的、拥有非负特征值" 这些条件不是本质的.

(2) $s(N_1^{j+1}) - s(N_1^j) \equiv c_1 + \cdots + c_K$ $(j \in \mathbb{N})$. 这说明对充分大的 n, 有 $s(\lambda_1^n) \approx n(c_1 + \cdots + c_K)$.

(3) 尽管前面述及的 N_1^0 在定理证明中或多或少能被控制, 但如何有效地给出这个数 (或上界) 仍是一个开问题.

最后, 简短地给出一个说明性例子: 考虑代换 $\sigma = (aab, ba)$, 即 $a \mapsto aab, b \mapsto ba$.

对该代换, 有 $W_0 = \varepsilon$, 此时, $T = \sigma$. 相应代换矩阵是 $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, 其特征多项式是 $\lambda^2 - 3\lambda + 1$. 其不动点是

$$\xi = aabaabbaaabaabbabaaabaabaabbaaabaabbabaaabbaaabaab\cdots,$$

其特殊词的树结构由图 1 表述.

强和弱特殊词列表如下 (这里 σ^0 表示恒等映射):

$$\mathcal{S}^0 = \{abaa, aabbaaabaab, \dots\} = \{\sigma^n(abaa) \mid n = 0,1,2,\dots\},$$

$$\mathcal{S}^2 = \{\varepsilon, a, aab, aabaabba, \dots\} = \{\varepsilon\} \cup \{\sigma^n(a) \mid n = 0,1,2,\dots\}.$$

特殊词的结构、个数 $s(n)$ 和复杂度 $p(n)$ 的刻画见表 1.

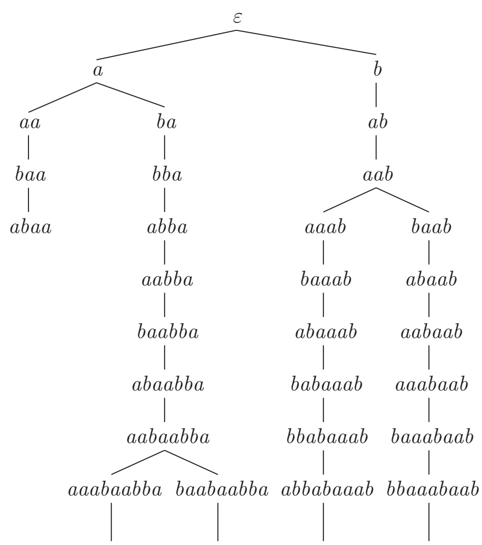

图 1　特殊词的树状结构

表 1　特殊词与复杂度列表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$s(n)$	1	2	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	$\cdots$
$p(n)$	1	2	4	7	10	14	17	20	23	26	30	34	38	41	44	47	$\cdots$

按上述定理, 可将 $s(n)$ 表达成

$$s(n)=\begin{cases}1, & 若\ n=0,\\ 2, & 若\ n=1,\\ 3, & 若\ n\in\{2,3\}\cup\bigcup\limits_{k\geqslant 0}[d(k)+1,g(k+1)],\\ 4, & 若\ n\in\bigcup\limits_{k\geqslant 0}[g(k)+1,d(k)],\end{cases}$$

其中数值序列 $g(k)$ 和 $d(k)$ 是如下定义的:

$$g(k)=(1,1)M^k(2,1)^{\mathrm{T}},\quad d(k)=(1,1)M^k(3,1)^{\mathrm{T}},$$

它们满足同样的递归性质:

$$\begin{cases}g(k+2)=3g(k+1)-g(k),\\ d(k+2)=3d(k+1)-d(k),\end{cases}$$

其中 $g(0)=3$, $g(1)=8$, $d(0)=4$, $d(1)=11$.

参考文献

1 Allouche J P. Automates finis en théorie des nombres. Expo Math, 1987, 5: 239–266

2 Arnoux P, Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals. Journées Montoises d'Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000). Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2001, 8: 181–207

3 Cobham A. Uniform tag sequences. Math Systems Theory, 1972, 6: 164–192
4 Lothaire M. Combinatorics on Words. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
5 Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 90. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
6 Lyndon R C, Schupp P E. Combinatorial Group Theory. New York: Springer-Verlag, 1977
7 Magnus W, Karrass A, Solitar D. Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, 2nd ed. Mineola: Dover Publications, 1976
8 Morse M, Hedlund G A. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. Amer J Math, 1940, 62: 1–42
9 Séébold P. Fibonacci morphisms and Sturmian words. Theoret Comput Sci, 1991, 88: 365–384
10 Wen Z X, Wen Z Y. Local isomorphisms of invertible substitutions. C R Math Acad Sci Paris, 1994, 318: 299–304
11 Rote G. Sequences with subword complexity $2n$. J Number Theory, 1994, 46: 196–213
12 Mossé B. Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques. Bull Soc Math France, 1996, 124: 329–346
13 Arnoux P, Rauzy G. Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$. Bull Soc Math France, 1991, 119: 199–215
14 Tan B, Wen Z X, Zhang Y. On the triplex substitution-combinatorial properties. C R Math Acad Sci Paris, 2008, 346: 813–818
15 Pansiot J J. Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés. In: Automata, Languages and Programming (Antwerp, 1984). Lecture Notes in Computer Science, vol. 172. Berlin: Springer, 1984, 380–389
16 Cassaigne J, Nicolas F. Factor complexity. Combinatorics, automata and number theory. Encyclopedia Math Appl, 2010, 135: 163–247
17 Frid A E. On the subword complexity of iteratively generated infinite words. Discrete Appl Math, 2001, 114: 115–120
18 Cassaigne J. Complexité et facteurs spéciaux. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 1997, 4: 67–88
19 Séébold P. An effective solution to the DOL periodicity problem in the binary case. Bull Eur Assoc Theor Comput Sci EATCS, 1988, 36: 137–151
20 Pytheas Fogg N. Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794. New York: Springer, 2002
21 Cassaigne J. Special factors of sequences with linear subword complexity. In: Developments in Language Theory II (DLT'95). Singapore: World Scientific, 1996, 25–34
22 Tan B, Wen Z Y. Invertible substitutions and Sturmian sequences. European J Combin, 2003, 24: 983–1002

Calculation of the complexities of substitutive sequences over a binary alphabet

Bo Tan, Zhixiong Wen & Yiping Zhang

Abstract We consider the complexities of substitutive sequences over a binary alphabet. By studying various types of special words, we show that, knowing some initial values, its complexity can be completely formulated via a recurrence formula determined by the characteristic polynomial.

Keywords **substitution, special word, complexity**

MSC(2010) **68R99, 20M35**

doi: 10.1360/N012018-00269