中国科学 : 数学　2022 年　第 52 卷　第 3 期 : 355 ～ 368
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

张量空间上的仿射变分不等式

李夏, 黄正海*

天津大学数学学院, 天津 300350
E-mail: lixia666@tju.edu.cn, huangzhenghai@tju.edu.cn

收稿日期: 2019-01-07; 接受日期: 2020-03-23; 网络出版日期: 2020-11-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871051) 资助项目

摘要 本文考虑张量空间上的变分不等式并讨论一些基本性质. 特别地, 借助一类张量乘积, 定义一类张量空间上的仿射变分不等式, 讨论这类变分不等式解集的性质, 包括解的存在唯一性和解集的有界性. 最后考察一类寡头垄断市场博弈问题, 将其建模为一个张量空间上的仿射变分不等式, 为此类问题的进一步研究提供动力.

关键词 仿射变分不等式　张量空间　张量积　寡头垄断市场博弈

MSC (2020) 主题分类 90C33, 65K10

1 引言

Euclid 空间上的变分不等式和互补问题因其应用广泛而得到了深入研究 (参见文献 [1–3]). 近年来, 变分不等式和互补问题的几个子类得到广泛关注, 包括张量互补问题 [4–6]、多项式互补问题 [7–9]、张量集合上的互补问题 [10]、随机张量互补问题 [11]、张量变分不等式 [12] 和多项式变分不等式 [13] 等, 其中, 对张量互补问题的研究尤为突出, 在问题的可行性 [14]、解的存在唯一性 [6,15–18]、解集的非空紧性 [4,5,19–24] 和误差界理论 [25,26] 等方面均获得了很多的理论成果. 另外, 张量互补问题的数值求解方法和实际应用也得到了研究 (参见文献 [27–32]). 关于张量互补问题在理论、算法及其应用方面的进展, 参见文献 [33–35].

在大数据时代, 大量的数据被存储为张量, 因而, 许多实际问题可模型化为使用张量表述的数学问题. 上面提到的变分不等式和互补问题的几个子类都是定义在 Euclid 空间上的, 并且其中所涉及的映射都是由张量定义的. 若变分不等式中所涉及的映射是从一个张量空间映到其本身, 则称其为张量空间上的变分不等式. 最近, Barbagallo 和 Guarino Lo Bianco [36] 研究了张量空间上的变分不等式, 在强制性或单调性假设下获得了这类问题解的存在性和唯一性结果, 并将一类寡头垄断市场博弈模型建模为一个变分不等式, 其中所涉及函数的变量是一个张量空间中张量的元素. 另外, Gowda 和 Sossa [37]

英文引用格式: Li X, Huang Z H. Affine variational inequalities over tensor spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 355–368, doi: 10.1360/SCM-2019-0015

研究了一类实 Hilbert 空间上的变分不等式并取得了许多好的理论结果. 当 Hilbert 空间是由所有 m 阶 n 维实张量构成时, 相关问题就是一个张量空间上的变分不等式.

受上述研究的启发, 本文研究张量空间上的变分不等式, 在简要讨论这类问题的一些等价描述之后, 着重研究一类张量空间上的仿射变分不等式, 简称为张量仿射变分不等式. 首先, 将张量与向量间的模式乘积推广到两个张量间的乘积, 并讨论该乘积的一些基本性质. 然后, 借助于这种张量积定义一类张量仿射变分不等式, 并讨论这类问题解集的一些基本性质. 最后, 将一类寡头垄断市场博弈问题建模为一个张量仿射变分不等式, 其中所涉及的变量是张量 (而不是张量的元素), 即给出张量仿射变分不等式的一个具体应用, 为这类问题的进一步研究提供了动力.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节列出后文使用的符号, 并给出张量和变分不等式的相关概念和结论; 主体内容共 3 部分, 分别对应于第 3 至 5 节, 其中第 3 节考虑一类张量积并讨论一些相关性质, 第 4 节考虑张量仿射变分不等式并讨论其解集的一些基本性质, 第 5 节考察一类具体的寡头垄断市场博弈问题, 将其建模为一个张量仿射变分不等式; 第 6 节给出本文的结论.

2 预备知识

在本文中, 假设 $m, n, p, n_1, n_2, \ldots, n_m$ 是正整数且满足 $m, n \geqslant 2$. 令 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{Z}_+$ 表示正整数集, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量集. 张量 (或称为超矩阵) 是矩阵的高维推广. 令 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 表示一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量, 其中 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbb{R}$ 且对于任意的 $j \in [m]$ 都有 $i_j \in [n_j]$. 当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$ 时, 称 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维实张量. 令 $\mathbb{R}^{[m,n]}$ 表示所有 m 阶 n 维实张量的集合, $\mathbb{R}_+^{[m,n]}$ 表示所有 m 阶 n 维非负实张量的集合, $\mathcal{O}$ 表示一个适当阶数和维数的零张量. 对于任意两个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维实张量 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 和 $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i_1 i_2 \cdots i_m})$, 两者的内积定义为

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \mathcal{B}_{i_1 i_2 \cdots i_m},$$

并定义张量范数

$$\|\mathcal{A}\| = \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

显然, 使用上述内积和范数的所有 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维实张量的集合构成一个实 Hilbert 空间. 对于任意的集合 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$, 令 K^∞ 表示其回收锥且 K^* 表示其对偶锥.

张量空间上的变分不等式定义如下.

定义 2.1 对于任意给定的非空闭凸集 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 和连续映射 $F : K \to \mathbb{R}^{[m,n]}$, 张量空间上的变分不等式就是寻找一个张量 $\hat{\mathcal{X}} \in K$, 使得

$$\langle F(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0, \quad \forall \mathcal{Y} \in K. \tag{2.2}$$

以下将此问题记为 $\mathrm{VI}(K, F)$, 并将其解集记为 $\mathrm{SOL}(K, F)$.

文献 [36] 研究了 (2.2). 另外, (2.2) 是文献 [37, 38] 中所研究问题的子类.

下面讨论 (2.2) 与一些相关问题的等价性. 首先, 类似于文献 [39, 定理 3.4.3], 在适当的假设下可证明 (2.2) 等价于一类张量空间上的优化问题.

命题 2.1 令 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是非空闭凸集, 且 $f: K \to \mathbb{R}$ 是连续可微的凸函数, 则 $\hat{\mathcal{X}}$ 是优化问题

$$\min\ f(\mathcal{X}) \quad \text{s.t.}\ \ \mathcal{X} \in K$$

的一个最优解当且仅当 $\hat{\mathcal{X}}$ 满足

$$\langle \nabla f(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0, \quad \forall \mathcal{Y} \in K, \tag{2.3}$$

其中

$$\nabla f(\mathcal{X}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \right) \in \mathbb{R}^{[m,n]}.$$

其次, 类似于文献 [1, 命题 1.1.3], 易证: 当 K 是非空闭凸锥时, $\mathrm{VI}(K, F)$ 等价于一类锥互补问题.

命题 2.2 令 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸锥, 且 $F: K \to \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个连续映射, 则 $\hat{\mathcal{X}} \in K$ 是 (2.2) 的一个解当且仅当 $\hat{\mathcal{X}}$ 是如下互补问题的一个解:

$$\mathcal{X} \in K, \quad F(\mathcal{X}) \in K^*, \quad \langle F(\mathcal{X}), \mathcal{X} \rangle = 0. \tag{2.4}$$

特别地, 当 $K = \mathbb{R}^{[m,n]}_+$ 时, 互补问题 (2.4) 退化为如下问题: 寻找一个张量 $\hat{\mathcal{X}}$, 使得

$$\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{[m,n]}_+, \quad F(\hat{\mathcal{X}}) \in \mathbb{R}^{[m,n]}_+, \quad \langle F(\hat{\mathcal{X}}), \hat{\mathcal{X}} \rangle = 0.$$

当 $m = 1$ 时, 上述问题进一步退化为标准的互补问题: 寻找一个向量 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\hat{x} \geqslant 0, \quad F(\hat{x}) \geqslant 0, \quad \langle F(\hat{x}), \hat{x} \rangle = 0,$$

而张量互补问题是它的一个子类 (参见文献 [33–35]).

下面的概念来自文献 [36, 定义 4.3].

定义 2.2 给定集合 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 和映射 $F: K \to \mathbb{R}^{[m,n]}$. 若对于任意的 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in K$, 都有

$$\langle F(\mathcal{Y}) - F(\mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle \geqslant 0,$$

则称 F 在 K 上是单调的; 若对于任意的 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in K$ 且 $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$, 都有 $\langle F(\mathcal{Y}) - F(\mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle > 0$, 则称 F 在 K 上是严格单调的; 若存在常数 $c > 0$ 使得对于任意的 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in K$, 都有

$$\langle F(\mathcal{Y}) - F(\mathcal{X}), \mathcal{Y} - \mathcal{X} \rangle \geqslant c \|\mathcal{Y} - \mathcal{X}\|^2,$$

则称 F 在 K 上是强单调的. 若 $K = \mathbb{R}^{[m,n]}$, 则分别简称 F 是单调的、严格单调的或者强单调的.

下面的结果将在第 4 节的分析中使用.

命题 2.3 令 $K \subseteq \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, 且 $F: K \to \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个连续且单调的映射, 则 $\hat{\mathcal{X}}$ 是 (2.2) 的一个解当且仅当

$$\hat{\mathcal{X}} \in K \quad 且 \quad \langle F(\mathcal{Y}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0, \quad \forall \mathcal{Y} \in K. \tag{2.5}$$

证明 **必要性** 设 $\hat{\mathcal{X}}$ 是 (2.2) 的解, 则对于任意的 $\mathcal{Y} \in K$ 都有 $\langle F(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0$; 又 F 在 K 上是单调的, 故对于任意的 $\mathcal{Y} \in K$ 都有 $\langle F(\mathcal{Y}) - F(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0$. 因此,

$$\langle F(\mathcal{Y}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant \langle F(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}} \rangle \geqslant 0, \quad \forall \mathcal{Y} \in K,$$

由此可推出 (2.5) 成立.

充分性 设 (2.5) 成立. 任意给定 $\mathcal{Y} \in K$. 由于 K 是一个凸集, 故对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 都有 $\mathcal{Y}(\lambda) := \lambda\mathcal{Y} + (1-\lambda)\hat{\mathcal{X}} \in K$. 将 $\mathcal{Y}(\lambda)$ 代入 (2.5) 中的不等式, 可得

$$\langle F(\mathcal{Y}(\lambda)), \mathcal{Y}(\lambda) - \hat{\mathcal{X}}\rangle = \langle F(\lambda\mathcal{Y} + (1-\lambda)\hat{\mathcal{X}}), \lambda(\mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}})\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, \lambda \in (0,1),$$

则对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 都有 $\langle F(\lambda\mathcal{Y}+(1-\lambda)\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y}-\hat{\mathcal{X}}\rangle \geqslant 0$. 令 λ 趋于 0, 由 F 的连续性可得 $\langle F(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{X}}\rangle \geqslant 0$. 对于任意的 $\mathcal{Y} \in K$, 该不等式都成立, 故 $\hat{\mathcal{X}}$ 是 (2.2) 的一个解. □

3 张量积

张量积是张量分析和张量优化的基础. 已有多种张量积得到研究 (参见文献 [40–43]). 本节将考虑一类张量积并讨论几个基本性质. 下面的定义参见文献 [44, 定义 2.1].

定义 3.1 令 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \cdots \times \hat{n}_p$ 维张量, 且 $p \leqslant m$. 设存在 p 个单调递增的不同整数 $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \ldots, \hat{j}_p \in [m]$, 使对于任意的 $k \in [p]$ 都有 $n_{\hat{j}_k} = \hat{n}_k$. 设 $J(p) := \{\hat{j}_1, \hat{j}_2, \ldots, \hat{j}_p\}$ 和 $I(p) := \{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_{m-p}\}$ 是集合 $[m]$ 的一个分割 (即 $I(p) \cup J(p) = [m]$ 且 $I(p) \cap J(p) = \emptyset$), 并且 $I(p)$ 的元素是单调递增的. 张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 $J(p)$ 模式乘积 (记为 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$) 是一个 $m-p$ 阶 $n_{\hat{i}_1} \times n_{\hat{i}_2} \times \cdots \times n_{\hat{i}_{m-p}}$ 维的张量, 且对于任意的 $i_{\hat{i}_1} \in [n_{\hat{i}_1}], i_{\hat{i}_2} \in [n_{\hat{i}_2}], \ldots, i_{\hat{i}_{m-p}} \in [n_{\hat{i}_{m-p}}]$, 其元素定义为

$$(\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B})_{i_{\hat{i}_1} i_{\hat{i}_2} \cdots i_{\hat{i}_{m-p}}} = \sum_{i_{\hat{j}_1}=1}^{\hat{n}_1} \sum_{i_{\hat{j}_2}=1}^{\hat{n}_2} \cdots \sum_{i_{\hat{j}_p}=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{\mathrm{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \ldots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \ldots, i_{\hat{j}_p}\}} \mathcal{B}_{i_{\hat{j}_1} i_{\hat{j}_2} \cdots i_{\hat{j}_p}},$$

其中 $\mathrm{sort}\{i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \ldots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \ldots, i_{\hat{j}_p}\}$ 表示指标 $i_{\hat{i}_1}, i_{\hat{i}_2}, \ldots, i_{\hat{i}_{m-p}}, i_{\hat{j}_1}, i_{\hat{j}_2}, \ldots, i_{\hat{j}_p}$ 按照其下标 (即 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_{m-p}, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \ldots, \hat{j}_p$) 从小到大的顺序而进行的排序.

当 $m=2$、$p=1$、$J(p)=\{2\}$ 时, $J(p)$ 模式乘积退化为普通的矩阵与向量之间的乘积. 此外, 当 $p=m$、$J(p)=[m]$ 时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 等价于内积 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$.

注 3.1 (i) 设 $J(p) = [m] \backslash [m-p]$, 则 $I(p) = [m-p]$. 此时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 是一个 $m-p$ 阶 $n_1 \times \cdots \times n_{m-p}$ 维张量. 在这种情形下, 将 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 简记为 $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

(ii) 设 $J(p) = [p]$, 则 $I(p) = [m] \setminus [p]$. 此时, $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 是一个 $m-p$ 阶 $n_{p+1} \times \cdots \times n_m$ 维张量. 在这种情形下, 将 $\mathcal{A} \times_{J(p)} \mathcal{B}$ 简记为 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$.

下面讨论 $J(p)$ 模式乘积的性质, 不失一般性, 总假设 $J(p) = [m] \setminus [m-p]$, 其他情形的讨论类似.

命题 3.1 令 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \cdots \times \hat{n}_p$ 维张量, 且 m 和 p 满足 $p \leqslant m$. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 并且对于任意的 $k \in [p]$, 都有 $n_{m-p+k} = \hat{n}_k$, 则

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}\mathcal{X}, \quad \mathcal{A}(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{A}\mathcal{Y}, \quad (\alpha\mathcal{A})\mathcal{X} = \alpha(\mathcal{A}\mathcal{X}), \quad \mathcal{A}(\alpha\mathcal{X}) = \alpha(\mathcal{A}\mathcal{X}).$

证明 参见文献 [44, 命题 2.1]. □

命题 3.2 令 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ 维张量, $\mathcal{B}$ 是一个 p 阶 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 \times \cdots \times \hat{n}_p$ 维张量, 且 m 和 p 满足 $p \leqslant m$. 设对于任意的 $k \in [p]$, 都有 $n_{m-p+k} = \hat{n}_k$, 则 $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|$.

证明 由 (2.1) 和命题的条件可得

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|^2 = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{m-p}=1}^{n_{m-p}} \left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p} \mathcal{A}_{i_1 \cdots i_{m-p} j_1 \cdots j_p} \mathcal{B}_{j_1 \cdots j_p} \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_{m-p}=1}^{n_{m-p}}\left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p}\mathcal{A}^2_{i_1\cdots i_{m-p}j_1\cdots j_p}\right)\left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p}\mathcal{B}^2_{j_1\cdots j_p}\right)\\
&\leqslant \left(\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m}\mathcal{A}^2_{i_1\cdots i_m}\right)\left(\sum_{j_1=1}^{\hat{n}_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{\hat{n}_p}\mathcal{B}^2_{j_1\cdots j_p}\right)\\
&= \|\mathcal{A}\|^2\|\mathcal{B}\|^2.
\end{aligned}
$$

因此, $\|\mathcal{AB}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|$. 命题得证. □

下面的命题给出使用 $J(p)$ 模式乘积定义的两类映射的梯度.

命题 3.3 给定 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$ 和 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 则对于任意的 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 都有 $\nabla(\mathcal{QX})=\mathcal{Q}$ 且 $\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{AX})]=\mathcal{A}*\mathcal{X}+\mathcal{AX}$, 其中 $\mathcal{A}*\mathcal{X}$ 中符号 $*$ 的定义见注 3.1(ii).

证明 因为 $\mathcal{QX}=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n}\mathcal{Q}_{i_1i_2\cdots i_m}\mathcal{X}_{i_1i_2\cdots i_m}$, 故对于任意的 $i_l\in[n]$ $(l\in[m])$ 都有

$$
(\nabla(\mathcal{QX}))_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{\partial(\mathcal{QX})}{\partial\mathcal{X}_{i_1i_2\cdots i_m}}=\mathcal{Q}_{i_1i_2\cdots i_m},
$$

由此可推出 $\nabla(\mathcal{QX})=\mathcal{Q}$. 此外, 由于

$$
\mathcal{X}(\mathcal{AX})=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n}\mathcal{X}_{i_1i_2\cdots i_m}\left(\sum_{j_1,j_2,\dots,j_m=1}^{n}\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_m}\mathcal{X}_{j_1j_2\cdots j_m}\right),
$$

故对于任意给定的 $\hat{i}_k\in[n]$ $(k\in[m])$ 都有

$$
\begin{aligned}
(\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{AX})])_{\hat{i}_1\hat{i}_2\cdots\hat{i}_m}&=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_m=1}^{n}\mathcal{A}_{\hat{i}_1\hat{i}_2\cdots\hat{i}_mj_1j_2\cdots j_m}\mathcal{X}_{j_1j_2\cdots j_m}+\sum_{i_1,i_2,\dots,i_m=1}^{n}\mathcal{X}_{i_1i_2\cdots i_m}\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_m\hat{i}_1\hat{i}_2\cdots\hat{i}_m}\\
&=(\mathcal{AX})_{\hat{i}_1\hat{i}_2\cdots\hat{i}_m}+(\mathcal{A}*\mathcal{X})_{\hat{i}_1\hat{i}_2\cdots\hat{i}_m}.
\end{aligned}
$$

由此可推出 $\nabla[\mathcal{X}(\mathcal{AX})]=\mathcal{A}*\mathcal{X}+\mathcal{AX}$. 命题得证. □

下面给出 $J(p)$ 模式乘积对应的张量 (半) 正定的概念并讨论一些基本性质.

定义 3.2 令 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$ 且 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$. 若对于任意的 $\mathcal{X}\in K$ 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{AX})\geqslant 0$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 K 上是半正定的. 若对于任意的 $\mathcal{X}\in K\setminus\{\mathcal{O}\}$ 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{AX})>0$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 K 上是正定的. 若 $K=\mathbb{R}^{[m,n]}$, 则分别简称 $\mathcal{A}$ 是半正定的或者正定的.

命题 3.4 令 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$ 且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$. 设对于任意的 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 都有 $F(\mathcal{X})=\mathcal{AX}+\mathcal{Q}$, 则

(i) F 是单调的当且仅当 $\mathcal{A}$ 是半正定的;

(ii) F 是强单调的当且仅当 $\mathcal{A}$ 是正定的.

证明 (i) 对于任意的 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 都有

$$
\begin{aligned}
\langle F(\mathcal{Y})-F(\mathcal{X}),\mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle&=\langle(\mathcal{AY}+\mathcal{Q})-(\mathcal{AX}+\mathcal{Q}),\mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle\\
&=\langle\mathcal{A}(\mathcal{Y}-\mathcal{X}),\mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle\\
&=(\mathcal{Y}-\mathcal{X})[\mathcal{A}(\mathcal{Y}-\mathcal{X})].
\end{aligned}\tag{3.1}
$$

因此, (i) 成立.

(ii) 一方面, 设 $\mathcal{A}$ 是正定的, 则对任意的 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 由 (3.1) 可得

$$
\langle F(\mathcal{Y})-F(\mathcal{X}),\mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle=(\mathcal{Y}-\mathcal{X})[\mathcal{A}(\mathcal{Y}-\mathcal{X})]>0.\tag{3.2}
$$

令 $\mathcal{Z}=\frac{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}{\|\mathcal{Y}-\mathcal{X}\|}$, 则 $\|\mathcal{Z}\|=1$. 显然, $\min_{\|\mathcal{Z}\|=1}\mathcal{Z}(\mathcal{A}\mathcal{Z})$ 一定有解, 且设该问题的最优值为 c, 则对于任意的 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 由 (3.2) 可得 $\frac{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}{\|\mathcal{Y}-\mathcal{X}\|}(\mathcal{A}\frac{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}{\|\mathcal{Y}-\mathcal{X}\|})=\mathcal{Z}(\mathcal{A}\mathcal{Z})\geqslant c>0$, 即

$$\langle F(\mathcal{Y})-F(\mathcal{X}),\mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle=(\mathcal{Y}-\mathcal{X})[\mathcal{A}(\mathcal{Y}-\mathcal{X})]\geqslant c\|\mathcal{Y}-\mathcal{X}\|^2. \tag{3.3}$$

因此, F 是强单调的. 另一方面, 设 F 是强单调的, 即对于任意的 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, (3.3) 都成立. 若取 $\mathcal{Y}=\mathcal{O}$, 则对于任意的 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{[m,n]}\setminus\{\mathcal{O}\}$ 都有 $\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X})\geqslant c\|\mathcal{X}\|^2>0$. 由此可推出 $\mathcal{A}$ 是正定的.

综上, 命题得证. □

4 张量仿射变分不等式

基于定义 3.1 中的张量积, 本节定义一类张量仿射变分不等式, 它是 Euclid 空间上仿射变分不等式 (参见文献 [45]) 的推广. 特别地, 本节讨论这类变分不等式解集的一些性质.

定义 4.1 给定 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$, $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 以及非空闭凸集 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$, 张量仿射变分不等式就是寻找一个张量 $\hat{\mathcal{X}}\in K$, 使得

$$\langle\mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-\hat{\mathcal{X}}\rangle\geqslant 0,\quad\forall\,\mathcal{Y}\in K. \tag{4.1}$$

以下将此问题记为 AVI$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$, 并将其解集记为 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$.

定理 4.1 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, 并且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$ 是半正定的且 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 非空, 则 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是一个闭凸集.

证明 对于任意的 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 令 $F(\mathcal{X}):=\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{Q}$. 因为 $\mathcal{A}$ 是半正定的, 则由命题 3.4 可得 F 是单调的. 对于任意的 $\mathcal{Y}\in K$, 令 $S(\mathcal{Y})$ 表示所有满足 $\langle F(\mathcal{Y}),\mathcal{Y}-\bar{\mathcal{X}}\rangle\geqslant 0$ 的张量 $\bar{\mathcal{X}}$ 的集合. 容易证明 $S(\mathcal{Y})$ 是闭凸集. 此外, 由命题 2.3 可得

$$\mathrm{SOL}(K,F)=\bigcap_{\mathcal{Y}\in K}S(\mathcal{Y}).$$

再结合 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是非空的, 可推出 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是一个闭凸集. 定理得证. □

下面的命题来自文献 [36, 定理 4.6].

命题 4.1 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, 且 $F:K\to\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是连续映射. 若 F 在 K 上是强单调的, 则 (2.2) 有唯一解.

定理 4.2 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, 且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$ 是正定的, 则 AVI$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 有唯一解.

证明 对于任意的 $\mathcal{X}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 令 $F(\mathcal{X}):=\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{Q}$. 因为 $\mathcal{A}$ 是正定的, 则由命题 3.4 可得 F 是强单调的. 再结合命题 4.1 可推出 AVI$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 有唯一解. □

定理 4.3 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$, 且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 则 SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是无界的当且仅当存在非零张量 $\mathcal{Z}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ 和张量 $\mathcal{X}^0\in$ SOL$(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 使得以下 3 个条件同时满足:

(i) $\mathcal{Z}\in K^\infty$, $\mathcal{A}\mathcal{Z}\in(K^\infty)^*$, $\langle\mathcal{Z},\mathcal{A}\mathcal{Z}\rangle=0$;

(ii) $\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle=0$;

(iii) $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Y}-\mathcal{X}^0\rangle\geqslant 0$.

证明　充分性 设存在张量对 $(\mathcal{Z},\mathcal{X}^0)\in\mathbb{R}^{[m,n]}\times\mathbb{R}^{[m,n]}$ 满足 $\mathcal{Z}\neq\mathcal{O}$、$\mathcal{X}^0\in\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 和条件 (i)–(iii). 对于任意的 $t\geqslant 0$, 令 $\mathcal{X}(t):=\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z}$, 则对于任意的 $\mathcal{Y}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 都有

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}\mathcal{X}(t)+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-\mathcal{X}(t)\rangle&=\langle\mathcal{A}(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})\rangle\\&=\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-\mathcal{X}^0\rangle+t\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Y}-\mathcal{X}^0\rangle-t\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle-t^2\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

由此可得对于任意的 $t\geqslant 0$ 都有 $\mathcal{X}(t)\in\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$. 因此, $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是无界的.

必要性 设 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是无界的, 则它必存在一个非零的回收方向 $\mathcal{Z}$, 即存在张量 $\mathcal{X}^0\in\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 使得对于任意的 $t\geqslant 0$ 都有 $\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z}\in\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ (否则 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 的回收锥只包含零元, 此时 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是有界的). 因此,

$$\langle\mathcal{A}(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})\rangle\geqslant 0,\quad\forall\,\mathcal{Y}\in K.\tag{4.2}$$

取 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^0$, 则 $\langle\mathcal{A}(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})+\mathcal{Q},-t\mathcal{Z}\rangle=-t^2\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle-t\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle\geqslant 0$, 因此 $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle\leqslant 0$. 对于任意的 $t\geqslant 0$, 令 $\mathcal{Y}(t):=\mathcal{X}^0+2t\mathcal{Z}$, 类似上述推导得 $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle\geqslant 0$. 因此, $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle=0$. 对于任意的 $\mathcal{V}\in K^\infty$ 和任意的 $t\geqslant 0$, 都有 $\mathcal{Y}(t)=\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z}+\mathcal{V}\in K$. 再结合 (4.2) 得, 对于任意的 $t\geqslant 0$, 都有

$$\langle\mathcal{A}(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})+\mathcal{Q},\mathcal{V}\rangle=t\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{V}\rangle+\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{V}\rangle\geqslant 0.$$

因此, 对于任意的 $\mathcal{V}\in K^\infty$ 有 $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{V}\rangle\geqslant 0$, 即 $\mathcal{A}\mathcal{Z}\in(K^\infty)^*$. 因为 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 的一个回收方向, 所以 $\mathcal{Z}\in K^\infty$. 所以, (i) 成立.

另外, 在 (4.2) 中取 $t=1$ 且 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^0$, 并结合 $\langle\mathcal{Z},\mathcal{A}\mathcal{Z}\rangle=0$, 可推出 $\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle\geqslant 0$; 在 (4.2) 中取 $t=1$ 且 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^0+2\mathcal{Z}$, 可推出 $\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle\leqslant 0$. 因此, $\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle=0$, 即 (ii) 成立.

结合 (4.2)、$\langle\mathcal{A}\mathcal{X}^0+\mathcal{Q},\mathcal{Z}\rangle=0$ 和 $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Z}\rangle=0$, 则对于任意的 $t\geqslant 0$, 都有

$$\langle\mathcal{A}(\mathcal{X}^0+t\mathcal{Z})+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-\mathcal{X}^0\rangle\geqslant 0,\quad\forall\,\mathcal{Y}\in K.$$

由此可得, 对于任意的 $\mathcal{Y}\in K$, 都有 $\langle\mathcal{A}\mathcal{Z},\mathcal{Y}-\mathcal{X}^0\rangle\geqslant 0$. 因此, (iii) 成立. □

推论 4.1 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$, 且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$. 若 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 非空, 且对于任意的 $\mathcal{Z}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 互补问题

$$\mathcal{Z}\in K^\infty,\quad\mathcal{A}\mathcal{Z}\in(K^\infty)^*,\quad\langle\mathcal{Z},\mathcal{A}\mathcal{Z}\rangle=0$$

只有解 $\mathcal{Z}=\mathcal{O}$, 则 $\mathrm{SOL}(K,\mathcal{A},\mathcal{Q})$ 是有界的.

由命题 2.1 和 3.3 可推出一类优化问题与张量仿射变分不等式的关系.

定理 4.4 令 $K\subseteq\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个非空闭凸集, $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[2m,n]}$, 且 $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$, 则 $\hat{\mathcal{X}}$ 是优化问题

$$\min\mathcal{X}(\mathcal{A}\mathcal{X})+\mathcal{Q}\mathcal{X}\quad\text{s.t. }\ \mathcal{X}\in K$$

的一个最优解当且仅当 $\hat{\mathcal{X}}$ 满足

$$\langle\mathcal{A}*\hat{\mathcal{X}}+\mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}+\mathcal{Q},\mathcal{Y}-\hat{\mathcal{X}}\rangle\geqslant 0,\quad\forall\,\mathcal{Y}\in K,$$

其中 $\mathcal{A}*\hat{\mathcal{X}}$ 中符号 $*$ 的定义见注 3.1(ii).

5 张量仿射变分不等式的一个应用

受文献 [36] 中研究的启发, 本节考察一类寡头市场博弈问题, 并将其建模为一个以张量为决策变量的仿射变分不等式, 即给出张量仿射变分不等式的一个具体应用.

考虑如下的寡头垄断市场博弈问题: 有彼此之间是地域分离的 m 个公司和 n 个市场. 设每一个公司都生产特定的 l 种不同的商品, 且这些商品是每一个市场所需求的. 对于任意的 $i \in [m]$, $j \in [n]$, $k \in [l]$, 令 $\mathbf{C}_i$ 表示第 i 个公司, $\mathbf{M}_j$ 表示第 j 个市场, $p_i \geqslant 0$ 和 $d_j \geqslant 0$ 分别表示公司 $\mathbf{C}_i$ 生产 l 种商品的总产量和市场 $\mathbf{M}_j$ 对 l 种商品的总需求量, $p_{ik} \geqslant 0$ 和 $d_{jk} \geqslant 0$ 分别表示公司 $\mathbf{C}_i$ 生产第 k 种商品的产量和市场 $\mathbf{M}_j$ 对第 k 种商品的需求量, $\mathcal{X}_{ijk} \geqslant 0$ 表示从公司 $\mathbf{C}_i$ 运输第 k 种商品到市场 $\mathbf{M}_j$ 的运输量, $\mathcal{L}_{ijk} \geqslant 0$ 和 $\mathcal{U}_{ijk} \geqslant 0$ 分别表示具体问题中 $\mathcal{X}_{ijk}$ 取值的下界和上界. 此外, 令 $\mathbb{R}^{m\times n\times l}$ 表示所有 3 阶 $m \times n \times l$ 维实张量的集合, 并且令

$$K := \{\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{ijk}) \in \mathbb{R}^{m\times n\times l} : \mathcal{L}_{ijk} \leqslant \mathcal{X}_{ijk} \leqslant \mathcal{U}_{ijk}\}.$$

关于公司的产量、市场的需求量和各个公司与市场之间的运输量, 有如下几个基本假设:

(A1) 设所有 m 个公司生产的所有商品都被这 n 个市场所消费, 即 $\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{j=1}^n d_j$;

(A2) 设公司 $\mathbf{C}_i$ 生产第 k 种商品的产量等于从公司 $\mathbf{C}_i$ 运输第 k 种商品到所有 n 个市场的运输量的总和, 即 $p_{ik} = \sum_{j=1}^n \mathcal{X}_{ijk}$ $(i \in [m], k \in [l])$;

(A3) 设市场 $\mathbf{M}_j$ 对第 k 种商品的需求量等于从所有 m 个公司运输第 k 种商品到市场 $\mathbf{M}_j$ 的运输量的总和, 即 $d_{jk} = \sum_{i=1}^m \mathcal{X}_{ijk}$ $(j \in [n], k \in [l])$.

由 (A2) 知, 公司 $\mathbf{C}_i$ 生产所有种类商品的总产量满足 $p_i = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n \mathcal{X}_{ijk}$ $(i \in [m])$; 由 (A3) 知, 市场 $\mathbf{M}_j$ 对所有种类商品的总需求量满足 $d_j = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m \mathcal{X}_{ijk}$ $(j \in [n])$.

令 f_{ik} 表示公司 $\mathbf{C}_i$ 生产第 k 种商品的生产成本, g_{jk} 表示市场 $\mathbf{M}_j$ 对第 k 种商品的需求价格. 根据文献 [46–48] 中的理论, 设生产成本和需求价格分别是整个生产分布和整个消费分布的仿射函数, 再结合假设 (A2) 和 (A3), 有

$$f_{ik} = f_{ik}(p_{ik}) = f_{ik}(\mathcal{X}) = a_{ik}\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{X}_{ijk}\right) + b_{ik}, \tag{5.1}$$

$$g_{jk} = g_{jk}(d_{jk}) = g_{jk}(\mathcal{X}) = -w_{jk}\left(\sum_{i=1}^m \mathcal{X}_{ijk}\right) + v_{jk}, \tag{5.2}$$

其中参数 $a_{ik}, b_{ik}, w_{jk}, v_{jk} \geqslant 0$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [l])$.

令 h_{ijk} 表示从公司 $\mathbf{C}_i$ 运输第 k 种商品到市场 $\mathbf{M}_j$ 的运输成本. 依据文献 [47] 中的理论, 设运输成本是整个运输分布的仿射函数, 即

$$h_{ijk} = h_{ijk}(\mathcal{X}) = s_{ijk}\mathcal{X}_{ijk} + t_{ijk}, \tag{5.3}$$

其中参数 $s_{ijk}, t_{ijk} \geqslant 0$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [l])$.

此外, 令 θ_i 表示公司 $\mathbf{C}_i$ 的利润. 由于利润等于销售额减生产成本再减运输成本, 故有

$$\theta_i(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^l \left[\sum_{j=1}^n g_{jk}(\mathcal{X})\mathcal{X}_{ijk} - f_{ik}(\mathcal{X}) - \sum_{j=1}^n h_{ijk}(\mathcal{X})\right]. \tag{5.4}$$

将 (5.1)–(5.3) 代入 (5.4), 可得

$$\begin{aligned}\theta_i(\mathcal{X}) &= \sum_{k=1}^{l}\bigg\{\sum_{j=1}^{n}\bigg[-w_{jk}\bigg(\sum_{i=1}^{m}\mathcal{X}_{ijk}\bigg)+v_{jk}\bigg]\mathcal{X}_{ijk}-\bigg[a_{ik}\bigg(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{X}_{ijk}\bigg)+b_{ik}\bigg]-\sum_{j=1}^{n}(s_{ijk}\mathcal{X}_{ijk}+t_{ijk})\bigg\}\\ &= \sum_{k=1}^{l}\bigg\{-b_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\bigg[-t_{ijk}+(v_{jk}-a_{ik}-s_{ijk})\mathcal{X}_{ijk}-\mathcal{X}_{ijk}w_{jk}\bigg(\sum_{i=1}^{m}\mathcal{X}_{ijk}\bigg)\bigg]\bigg\}.\end{aligned}$$

令矩阵 $\mathcal{X}_i=(\mathcal{X}_{ijk})\in\mathbb{R}^{n\times l}$ 表示张量 $\mathcal{X}$ 的第 i 个正面切片, $\mathcal{X}_{-i}=(\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_{i-1},\mathcal{X}_{i+1},\ldots,\mathcal{X}_m)$ 表示张量 $\mathcal{X}$ 除 $\mathcal{X}_i$ 之外的所有其他正面切片, 且 K_i 表示与 $\mathcal{X}_i$ 相关联的可行集, 则有

$$K=\prod_{i\in[m]}K_i\subseteq\mathbb{R}^{n\times l}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n\times l}=\mathbb{R}^{m\times n\times l}.$$

此外, 对于给定的 $\bar{\mathcal{X}}_{-i}$ 和任意的 $\mathcal{X}_i\in K_i$, 有

$$\begin{aligned}\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i}) = \sum_{k=1}^{l}\bigg\{-b_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\bigg[&-t_{ijk}+\bigg(v_{jk}-a_{ik}-s_{ijk}-w_{jk}\bigg(\sum_{\bar{i}\neq i}\bar{\mathcal{X}}_{\bar{i}jk}\bigg)\bigg)\mathcal{X}_{ijk}\\ &-w_{jk}\mathcal{X}_{ijk}^2\bigg]\bigg\}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

在其他公司的运输量给定的情形下, 每一个公司 $\mathbf{C}_i$ $(i\in[m])$ 的目标是通过调整从自身出发运输 l 种商品到 n 个市场的运输量, 以使得利润最大化, 即在其他公司的运输策略 $\bar{\mathcal{X}}_{-i}$ 给定的情形下, 每一个公司 $\mathbf{C}_i$ 通过解决如下的优化问题来做出决策:

$$\max\ \theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})\quad \text{s.t.}\ \mathcal{X}_i\in K_i.$$

上述问题等价于

$$\min\ -\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})\quad \text{s.t.}\ \mathcal{X}_i\in K_i.\tag{5.6}$$

因此, 以下讨论时考虑问题 (5.6).

定义 5.1 商品运输量分布 $\hat{\mathcal{X}}=(\hat{\mathcal{X}}_1,\hat{\mathcal{X}}_2,\ldots,\hat{\mathcal{X}}_m)\in K$ 被称作是一个广义 Cournot-Nash 均衡当且仅当对于任意的 $i\in[m]$, 都有 $\theta_i(\hat{\mathcal{X}})\geqslant\theta_i(\mathcal{X}_i,\hat{\mathcal{X}}_{-i})$, 即 $\hat{\mathcal{X}}_i\in\arg\min_{\mathcal{X}_i\in K_i}-\theta_i(\mathcal{X}_i,\hat{\mathcal{X}}_{-i})$.

因此, 上述寡头垄断市场博弈问题的目标就是寻找一个广义 Cournot-Nash 均衡. 下面将这一问题转化为求解一个张量仿射变分不等式. 对于任意的 $i\in[m]$, 考虑偏导数

$$\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_i}=\bigg(\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_{ijk}}\bigg)\in\mathbb{R}^{n\times l},\quad j\in[n],\quad k\in[l].\tag{5.7}$$

特别地, 若令 $i=i_0$, $j=j_0$ 且 $k=k_0$, 则

$$\bigg(\frac{\partial\theta_{i_0}(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_{i_0jk}}\bigg)_{j_0k_0}=v_{j_0k_0}-a_{i_0k_0}-s_{i_0j_0k_0}-w_{j_0k_0}\bigg(\sum_{i\neq i_0}\bar{\mathcal{X}}_{ij_0k_0}\bigg)-2w_{j_0k_0}\mathcal{X}_{i_0j_0k_0}.$$

使用 (5.7) 定义的偏导数, 对于任意给定的 $\bar{\mathcal{X}}_{-i}$, $\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})$ 关于 $\mathcal{X}_i$ 都是连续可微的. 此外, K_i 是 $\mathbb{R}^{n\times l}$ 的非空闭凸子集. 下证对于任意给定的 $\bar{\mathcal{X}}_{-i}$, $\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})$ 都是关于 $\mathcal{X}_i$ 的凹函数, 即对于任意的 $\mathcal{X}_i=(\mathcal{X}_{ijk})$, $\mathcal{Z}_i=(\mathcal{Z}_{ijk})\in K_i$ $(j\in[n], k\in[l])$ 和任意的 $\lambda\in(0,1)$, 都有

$$\theta_i(\lambda\mathcal{X}_i+(1-\lambda)\mathcal{Z}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})\geqslant\lambda\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})+(1-\lambda)\theta_i(\mathcal{Z}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i}).$$

事实上, 因为 $\lambda\in(0,1)$ 且 $w_{jk},\mathcal{X}_{ijk},\mathcal{Z}_{ijk}\geqslant 0$, 所以,

$$\begin{aligned}&\bigg(v_{jk}-a_{ik}-s_{ijk}-w_{jk}\bigg(\sum_{\bar{i}\neq i}\bar{\mathcal{X}}_{\bar{i}jk}\bigg)\bigg)(\lambda\mathcal{X}_{ijk}+(1-\lambda)\mathcal{Z}_{ijk})\\&=\lambda\bigg(v_{jk}-a_{ik}-s_{ijk}-w_{jk}\bigg(\sum_{\bar{i}\neq i}\bar{\mathcal{X}}_{\bar{i}jk}\bigg)\bigg)\mathcal{X}_{ijk}\\&\quad+(1-\lambda)\bigg(v_{jk}-a_{ik}-s_{ijk}-w_{jk}\bigg(\sum_{\bar{i}\neq i}\bar{\mathcal{X}}_{\bar{i}jk}\bigg)\bigg)\mathcal{Z}_{ijk},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&-w_{jk}[\lambda\mathcal{X}_{ijk}+(1-\lambda)\mathcal{Z}_{ijk}]^2-[\lambda(-w_{jk}\mathcal{X}_{ijk}^2)+(1-\lambda)(-w_{jk}\mathcal{Z}_{ijk}^2)]\\&\quad=-w_{jk}\{(\lambda^2-\lambda)\mathcal{X}_{ijk}^2+2\lambda(1-\lambda)\mathcal{X}_{ijk}\mathcal{Z}_{ijk}+[(1-\lambda)^2-(1-\lambda)]\mathcal{Z}_{ijk}^2\}\\&\quad=w_{jk}\lambda(1-\lambda)(\mathcal{X}_{ijk}^2-2\mathcal{X}_{ijk}\mathcal{Z}_{ijk}+\mathcal{Z}_{ijk}^2)\\&\quad=w_{jk}\lambda(1-\lambda)(\mathcal{X}_{ijk}-\mathcal{Z}_{ijk})^2\\&\quad\geqslant 0.\end{aligned}$$

再结合 (5.5) 可推出 $\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})$ 是关于 $\mathcal{X}_i$ 的凹函数, 即函数 $-\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})$ 是关于 $\mathcal{X}_i$ 的凸函数. 综上所述, 对于任意的 $i\in[m]$, K_i 是非空闭凸集, 且 $-\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})$ 关于 $\mathcal{X}_i$ 是连续可微的凸函数, 则由命题 2.1 可得下面的结论.

命题 5.1 对于任意的 $i\in[m]$, $\hat{\mathcal{X}}_i$ 是优化问题

$$\min\ -\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})\quad \text{s.t.}\ \ \mathcal{X}_i\in K_i$$

的一个最优解当且仅当 $\hat{\mathcal{X}}_i$ 满足

$$\bigg\langle-\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\bar{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_i}\bigg|_{\mathcal{X}_i=\hat{\mathcal{X}}_i},\mathcal{Y}_i-\hat{\mathcal{X}}_i\bigg\rangle\geqslant 0,\quad\forall\,\mathcal{Y}_i\in K_i.$$

下面构造定义张量仿射变分不等式所需的两个张量. 令 6 阶 $m\times n\times l\times m\times n\times l$ 维张量 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6})$ 定义如下: 对于任意的 $i_1,i_4\in[m]$, $i_2,i_5\in[n]$ 和 $i_3,i_6\in[l]$, 有

$$\mathcal{A}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}=\begin{cases}2w_{i_2i_3}, & \text{如果 } i_1=i_4,\quad i_2=i_5,\quad i_3=i_6,\\ w_{i_2i_3}, & \text{如果 } i_1\neq i_4,\quad i_2=i_5,\quad i_3=i_6,\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}\tag{5.8}$$

并且令 3 阶 $m\times n\times l$ 维张量 $\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}_{i_1i_2i_3})$ 定义如下:

$$\mathcal{Q}_{i_1i_2i_3}=-v_{i_2i_3}+a_{i_1i_3}+s_{i_1i_2i_3},\quad\forall\,i_1\in[m],\quad i_2\in[n],\quad i_3\in[l].\tag{5.9}$$

令 $\tilde{\nabla}\theta(\mathcal{X})=(\frac{\partial\theta_1}{\partial\mathcal{X}_1},\frac{\partial\theta_2}{\partial\mathcal{X}_2},\ldots,\frac{\partial\theta_m}{\partial\mathcal{X}_m})=(\frac{\partial\theta_i}{\partial\mathcal{X}_{ijk}})\in\mathbb{R}^{m\times n\times l}$, 则结合 (5.8) 和 (5.9) 可得

$$-\tilde{\nabla}\theta(\mathcal{X})=\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{Q}.\tag{5.10}$$

由命题 5.1 及上述讨论, 类似于文献 [1, 命题 1.4.2], 可得如下定理.

定理 5.1 $\hat{\mathcal{X}}$ 是一个广义 Cournot-Nash 均衡当且仅当 $\hat{\mathcal{X}}$ 是以下张量仿射变分不等式的解:

$$\langle -\tilde{\nabla}\theta(\mathcal{X}), \mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle = \langle \mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{Q}, \mathcal{Y}-\mathcal{X}\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, \mathcal{Y}\in K. \tag{5.11}$$

证明 **必要性** 设 $\hat{\mathcal{X}}$ 是一个广义 Cournot-Nash 均衡, 则由定义 5.1、命题 5.1 和 (5.10) 可得

$$\left\langle -\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\hat{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_i}\bigg|_{\mathcal{X}_i=\hat{\mathcal{X}}_i}, \mathcal{Y}_i-\hat{\mathcal{X}}_i\right\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, \mathcal{Y}_i\in K_i, \quad \forall\, i\in[m].$$

将上述 m 个不等式相加可推出

$$\langle -\tilde{\nabla}\theta(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y}-\hat{\mathcal{X}}\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, \mathcal{Y}:=(\mathcal{Y}_1,\ldots,\mathcal{Y}_m)\in K,$$

即 $\hat{\mathcal{X}}$ 满足 (5.11).

充分性 设 $\hat{\mathcal{X}}$ 满足 (5.11). 对任意的 $i\in[m]$ 和 $\mathcal{Y}_i\in K_i$, 令 $\mathcal{Y}:=(\hat{\mathcal{X}}_1,\ldots,\hat{\mathcal{X}}_{i-1},\mathcal{Y}_i,\hat{\mathcal{X}}_{i+1},\ldots,\hat{\mathcal{X}}_m)$, 并将 $\mathcal{Y}$ 代入 (5.11) 可得

$$\langle -\tilde{\nabla}\theta(\hat{\mathcal{X}}), \mathcal{Y}-\hat{\mathcal{X}}\rangle = \left\langle -\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\hat{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_i}\bigg|_{\mathcal{X}_i=\hat{\mathcal{X}}_i}, \mathcal{Y}_i-\hat{\mathcal{X}}_i\right\rangle \geqslant 0,$$

即对任意的 $i\in[m]$, 都有

$$\left\langle -\frac{\partial\theta_i(\mathcal{X}_i,\hat{\mathcal{X}}_{-i})}{\partial\mathcal{X}_i}\bigg|_{\mathcal{X}_i=\hat{\mathcal{X}}_i}, \mathcal{Y}_i-\hat{\mathcal{X}}_i\right\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, \mathcal{Y}_i\in K_i.$$

因此, 结合定义 5.1、命题 5.1、(5.10) 和 (5.11), 可推出 $\hat{\mathcal{X}}$ 是一个广义 Cournot-Nash 均衡. □

最后, 给出一个简单的例子.

例 5.1 考虑地域分离的两家公司和两个市场, 其中两家公司都生产这两个市场需求的两种相同商品, 且满足假设 (A1)–(A3). 以下符号与本节开始的叙述一致. 这两家公司生产两种商品的产出矩阵以及两个市场对这两种商品的需求矩阵为

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 24.5 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 22.5 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

令 $K:=\{\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{ijk})\in\mathbb{R}^{2\times2\times2}: 0\leqslant\mathcal{X}_{ijk}\leqslant 20\}$, 且两家公司生产两种商品的生产成本函数、两个市场对两种商品的需求价格函数以及两家公司运送两种商品到两个市场的运输成本函数分别为

$$\begin{aligned}
&f_{11}(\mathcal{X}) = 0.6(\mathcal{X}_{111}+\mathcal{X}_{121})+4, \quad f_{12}(\mathcal{X}) = 2.2(\mathcal{X}_{112}+\mathcal{X}_{122})+6,\\
&f_{21}(\mathcal{X}) = 1.5(\mathcal{X}_{211}+\mathcal{X}_{221})+2, \quad f_{22}(\mathcal{X}) = 3.4(\mathcal{X}_{212}+\mathcal{X}_{222})+3,\\
&g_{11}(\mathcal{X}) = -0.1(\mathcal{X}_{111}+\mathcal{X}_{211})+5, \quad g_{12}(\mathcal{X}) = -0.2(\mathcal{X}_{112}+\mathcal{X}_{212})+10,\\
&g_{21}(\mathcal{X}) = -0.1(\mathcal{X}_{121}+\mathcal{X}_{221})+4, \quad g_{22}(\mathcal{X}) = -0.2(\mathcal{X}_{122}+\mathcal{X}_{222})+9,\\
&h_{111}(\mathcal{X}) = 2, \quad h_{112}(\mathcal{X}) = 4, \quad h_{221}(\mathcal{X}) = 10, \quad h_{222}(\mathcal{X}) = 10,\\
&h_{121}(\mathcal{X}) = 1.4\mathcal{X}_{121}+1, \quad h_{122}(\mathcal{X}) = 1.6\mathcal{X}_{122}+1,\\
&h_{211}(\mathcal{X}) = 0.7\mathcal{X}_{211}+2, \quad h_{212}(\mathcal{X}) = 0.9\mathcal{X}_{212}+2,
\end{aligned}$$

则可推出两家公司的利润函数分别为

$$\begin{aligned}\theta_1(\mathcal{X}) =& -0.1\mathcal{X}_{111}^2 - 0.1\mathcal{X}_{111}\mathcal{X}_{211} + 4.4\mathcal{X}_{111} - 0.1\mathcal{X}_{121}^2 - 0.1\mathcal{X}_{121}\mathcal{X}_{221} + 2\mathcal{X}_{121} \\ & - 0.2\mathcal{X}_{112}^2 - 0.2\mathcal{X}_{112}\mathcal{X}_{212} + 7.8\mathcal{X}_{112} - 0.2\mathcal{X}_{122}^2 - 0.2\mathcal{X}_{122}\mathcal{X}_{222} + 5.2\mathcal{X}_{122} - 18, \\ \theta_2(\mathcal{X}) =& -0.1\mathcal{X}_{211}^2 - 0.1\mathcal{X}_{111}\mathcal{X}_{211} + 2.8\mathcal{X}_{211} - 0.1\mathcal{X}_{221}^2 - 0.1\mathcal{X}_{121}\mathcal{X}_{221} + 2.5\mathcal{X}_{221} \\ & - 0.2\mathcal{X}_{212}^2 - 0.2\mathcal{X}_{112}\mathcal{X}_{212} + 5.7\mathcal{X}_{212} - 0.2\mathcal{X}_{222}^2 - 0.2\mathcal{X}_{122}\mathcal{X}_{222} + 5.6\mathcal{X}_{222} - 29.\end{aligned}$$

通过求解对应的张量仿射变分不等式, 可得其唯一解为 $\hat{\mathcal{X}} = (\hat{\mathcal{X}}_{ijk}) \in \mathbb{R}^{2\times2\times2}$, 其中元素分别为

$$\hat{\mathcal{X}}_{111} = 20, \quad \hat{\mathcal{X}}_{112} = 16.5, \quad \hat{\mathcal{X}}_{121} = 5, \quad \hat{\mathcal{X}}_{122} = 8, \quad \hat{\mathcal{X}}_{211} = 4, \quad \hat{\mathcal{X}}_{212} = 6, \quad \hat{\mathcal{X}}_{221} = 10, \quad \hat{\mathcal{X}}_{222} = 10,$$

且两家公司的最优利润分别为 $\theta_1(\hat{\mathcal{X}}) = 91.75$ 和 $\theta_2(\hat{\mathcal{X}}) = 9.8$.

6 结论

本文考察了张量空间上的变分不等式, 特别是借助于一种张量积, 定义了一类张量空间上的仿射变分不等式, 讨论了这类问题解的存在性、唯一性和解集的有界性, 并给出了一个具体的应用, 即将一类寡头垄断市场博弈问题重构为一类以张量为变量的仿射变分不等式.

实际上, 本文只对张量空间上的变分不等式做了初步的研究, 有很多方面值得进一步探究:

(i) 众所周知, 张量积在张量分析与张量优化领域有重要的作用. 因此, 可进一步探究本文提出的张量积更多的性质. 特别地, 值得研究其在张量分析和张量优化中的不同应用.

(ii) 需要进一步探究张量空间上 (仿射) 变分不等式的理论结果. 尤其值得研究如何设计有效的算法求解此类问题并将其应用到实际问题中.

(iii) 在适当的假设下, 张量空间上的变分不等式等价于一类张量空间上的优化问题. 此外, 当相关集合是一个非空闭凸锥时, 张量空间上的变分不等式等价于一类锥互补问题. 因此, 张量空间上的优化问题和张量空间上互补问题的理论、算法和应用值得进一步研究.

致谢 感谢审稿人仔细地阅读手稿并给予宝贵的修改意见.

参考文献

1 Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume I. New York: Springer, 2003
2 Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume II. New York: Springer, 2003
3 Han J, Xiu N, Qi H D. Nonlinear Complementarity Theory and Algorithms (in Chinese). Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 2006 [韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法. 上海: 上海科学技术出版社, 2006]
4 Song Y, Qi L. Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors. Ann Appl Math, 2017, 33: 308–323
5 Che M, Qi L, Wei Y. Positive-definite tensors to nonlinear complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2016, 168: 475–487
6 Song Y, Qi L. Tensor complementarity problem and semi-positive tensors. J Optim Theory Appl, 2016, 169: 1069–1078
7 Gowda M S. Polynomial complementarity problems. Pac J Optim, 2017, 13: 227–241
8 Ling L, He H, Ling C. On error bounds of polynomial complementarity problems with structured tensors. Optimization, 2018, 67: 341–358
9 Wang J, Hu S, Huang Z H. Solution sets of quadratic complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2018, 176: 120–136

10 Tawhid M A, Rahmati S. Complementarity problems over a hypermatrix (tensor) set. Optim Lett, 2018, 12: 1443–1454
11 Che M, Qi L, Wei Y. Stochastic R_0 tensors to stochastic tensor complementarity problems. Optim Lett, 2019, 13: 261–279
12 Wang Y, Huang Z H, Qi L. Global uniqueness and solvability of tensor variational inequalities. J Optim Theory Appl, 2018, 177: 137–152
13 Hieu V T. Solution maps of polynomial variational inequalities. J Global Optim, 2020, 77: 807–824
14 Guo Q, Zheng M M, Huang Z H. Properties of S-tensors. Linear Multilinear Algebra, 2019, 67: 685–696
15 Bai X L, Huang Z H, Wang Y. Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2016, 170: 72–84
16 Balaji R, Palpandi K. Positive definite and Gram tensor complementarity problems. Optim Lett, 2018, 12: 639–648
17 Chen H, Qi L, Song Y. Column sufficient tensors and tensor complementarity problems. Front Math China, 2018, 13: 255–276
18 Liu D D, Li W, Vong S W. Tensor complementarity problems: The GUS-property and an algorithm. Linear Multilinear Algebra, 2018, 66: 1726–1749
19 Song Y, Mei W. Structural properties of tensors and complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2018, 176: 289–305
20 Song Y, Qi L. Strictly semi-positive tensors and the boundedness of tensor complementarity problems. Optim Lett, 2017, 11: 1407–1426
21 Song Y, Yu G. Properties of solution set of tensor complementarity problem. J Optim Theory Appl, 2016, 170: 85–96
22 Luo Z, Qi L, Xiu N. The sparsest solutions to Z-tensor complementarity problems. Optim Lett, 2017, 11: 471–482
23 Wang X, Chen H, Wang Y. Solution structures of tensor complementarity problem. Front Math China, 2018, 13: 935–945
24 Wang Y, Huang Z H, Bai X L. Exceptionally regular tensors and tensor complementarity problems. Optim Methods Softw, 2016, 31: 815–828
25 Hu S, Wang J, Huang Z H. Error bounds for the solution sets of quadratic complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2018, 179: 983–1000
26 Zheng M M, Zhang Y, Huang Z H. Global error bounds for the tensor complementarity problem with a P-tensor. J Ind Manag Optim, 2019, 15: 933–946
27 Du S, Zhang L. A mixed integer programming approach to the tensor complementarity problem. J Global Optim, 2019, 73: 789–800
28 Han L. A continuation method for tensor complementarity problems. J Optim Theory Appl, 2019, 180: 949–963
29 Xie S L, Li D H, Xu H R. An iterative method for finding the least solution to the tensor complementarity problem. J Optim Theory Appl, 2017, 175: 119–136
30 Zhang K, Chen H, Zhao P. A potential reduction method for tensor complementarity problems. J Ind Manag Optim, 2019, 15: 429–443
31 Zhao X, Fan J. A semidefinite method for tensor complementarity problems. Optim Methods Softw, 2019, 34: 758–769
32 Huang Z H, Qi L. Formulating an n-person noncooperative game as a tensor complementarity problem. Comput Optim Appl, 2017, 66: 557–576
33 Huang Z H, Qi L. Tensor complementarity problems—part I: Basic theory. J Optim Theory Appl, 2019, 183: 1–23
34 Qi L, Huang Z H. Tensor complementarity problems—part II: Solution methods. J Optim Theory Appl, 2019, 183: 365–385
35 Huang Z H, Qi L. Tensor complementarity problems—part III: Applications. J Optim Theory Appl, 2019, 183: 771–791
36 Barbagallo A, Guarino Lo Bianco S. Variational inequalities on a class of structured tensors. J Nonlinear Convex Anal, 2018, 19: 711–729
37 Gowda M S, Sossa D. Weakly homogeneous variational inequalities and solvability of nonlinear equations over cones. Math Program, 2019, 177: 149–171
38 Ma X X, Zheng M M, Huang Z H. A note on the nonemptiness and compactness of solution sets of weakly homogeneous variational inequalities. SIAM J Optim, 2020, 30: 132–148
39 Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013
40 Du S, Zhang L, Chen C, et al. Tensor absolute value equations. Sci China Math, 2018, 61: 1695–1710
41 Qi L, Luo Z. Tensor Analysis: Spectral Theory and Special Tensors. Philadelphia: SIAM, 2017
42 Shao J Y. A general product of tensors with applications. Linear Algebra Appl, 2013, 439: 2350–2366
43 Bu C, Zhang X, Zhou J, et al. The inverse, rank and product of tensors. Linear Algebra Appl, 2014, 446: 269–280
44 Li X, Huang Z H. Linear complementarity problem over tensor spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1169–1182

[李夏, 黄正海. 张量空间上的线性互补问题. 中国科学: 数学, 2020, 50: 1169–1182]
45 Lee G M, Tam N N, Yen N D. Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities: A Qualitative Study. New York: Springer, 2005
46 Hobbs B F, Pang J S. Spatial oligopolistic equilibria with arbitrage, shared resources, and price function conjectures. Math Program Ser A, 2004, 101: 57–94
47 Nagurney A. Computational comparisons of spatial price equilibrium methods. J Regional Sci, 1987, 27: 55–76
48 Zorkaltsev V I, Kiseleva M A. Interacting oligopolistic and oligopsonistic Cournot markets. Autom Remote Control, 2017, 78: 953–959

Affine variational inequalities over tensor spaces

Xia Li & Zhenghai Huang

Abstract In this paper, we consider variational inequalities over tensor spaces and discuss some basic properties. In particular, we introduce a type of product between two tensors, and with this tensor product, we define a class of affine variational inequalities over tensor spaces. Then, we discuss some properties of the solution set of the affine variational inequality, including existence and uniqueness of the solution and boundedness of the solution set. Finally, we investigate a class of oligopolistic market games and transform it into an affine variational inequality over a tensor space, which provides important impetus for further study for this class of problems.

Keywords **affine variational inequality, tensor space, tensor product, oligopolistic market game**

MSC(2020) **90C33, 65K10**

doi: 10.1360/SCM-2019-0015