关于复 Monge-Ampère 方程的一些研究

张希

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: mathzx@ustc.edu.cn

收稿日期: 2019-09-27; 接受日期: 2020-06-08; 网络出版日期: 2020-07-15

国家自然科学基金 (批准号: 11625106, 11571332 和 11721101) 资助项目

摘要 过去 50 年间, 复 Monge-Ampère 方程是一个被广泛研究的主题, 它在复分析、复几何和 Kähler 几何中有很多重要的应用. 本文首先回顾一些经典结果, 然后着重介绍关于复 Monge-Ampère 方程的 Liouville 定理、 $C^{1,\alpha}$ 估计和 $C^{2,\alpha}$ 估计, 以及其在 Sasakian 几何中的一些应用. 这些结果是和 S. Dinew、管鹏飞、李超、李嘉禹和张享文等合作得到的.

关键词 复 Monge-Ampère 方程 Kähler 几何 Sasakian 几何

MSC (2010) 主题分类 53C07, 58E15

1 引言

复 Monge-Ampère 方程与 Kähler 几何中的 Calabi 猜想和 Kähler-Einstein 度量及其他众多问题有着直接关系. 例如, 丘成桐证明的 Calabi 猜想可以约化成下面的复 Monge-Ampère 方程:

$$(\omega_0 + \partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^f \omega_0^n.$$

Kähler-Einstein 度量的存在性和唯一性是复几何 (特别是 Kähler 几何) 中的重要问题. 它可以约化成

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{F-\lambda\varphi} \omega_0^m, \quad \lambda = 1, 0 \quad \text{或} \quad \lambda = -1,$$

在这个领域, Y. Matsushima、T. Aubin、S. T. Yau、田刚、T. Mabuchi、A. Futaki、S. Bando、陈秀雄、S. Donaldson 和孙崧等做了许多重要的工作. 复 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 问题也被广泛地研究. Chern 等^[1] 开创了对于齐次复 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 问题的研究. 相关正则性问题也被大量地研究 (参见文献 [2–4]). Kähler 空间的测地线方程可以转化成齐次复 Monge-Ampère 方程, 参见 Mabuchi^[5]、Semmes^[6]、Donaldson^[7]、Chen^[8]、Chen 和 Tian^[9] 等工作. 复 Monge-Ampère 方程在弦理论中也有重要应用, Fu 和 Yau^[10] 通过在 $K3$ 曲面上把 Strominger 系统约化成复 Monge-Ampère 方程

英文引用格式: Zhang X. Some results on the complex Monge-Ampère equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1045–1060, doi: 10.1360/SSM-2019-0235

(被称为 Fu-Yau 方程) 构造了此系统的解. Fu-Yau 方程的高维情形可看成带有一个参数的 2-Hessian 方程. 当参数为负时, 该方程被 Phong 等^[11] 解决. 当参数为正时, 该方程被 Chu 等^[12] 和 Phong 等^[13] 独立解决. 复 Monge-Ampère 方程还有很多重要应用和研究结果, 由于篇幅有限, 这里不一一介绍. 本文主要介绍近几年关于复 Monge-Ampère 方程的 Liouville 定理、 $C^{1,\alpha}$ 估计和 $C^{2,\alpha}$ 估计, 以及在 Sasakian 几何中应用的一些研究工作.

2 锥 Kähler-Ricci 孤立子

首先给出锥 Kähler 度量和锥 Kähler-Einstein 度量的定义.

定义 2.1 (锥 Kähler 度量) 假设 M 是 n 维复流形, D 是 M 上的光滑除子. 称闭的正的 $(1,1)$ 流 $\omega \in 2\pi c_1(M)$ 是一个锥 Kähler 度量, 如果 ω 在除子外是光滑 Kähler 度量并且在除子上每一点 $p \in D$ 的一个小邻域 U 上有全纯局部坐标 $(z^1, \dots, z^n)$ 使得 $D = \{z^n = 0\}$, 同时, ω 渐近等价于标准锥度量

$$\sqrt{-1}|z^n|^{2\beta-2}dz^n \wedge d\bar{z}^n + \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n-1} dz^j \wedge d\bar{z}^j.$$

定义 2.2 (锥 Kähler-Einstein 度量) 称 ω 是一个沿着除子 D 锥角为 $2\pi\beta$ 的锥 Kähler-Einstein 度量, 如果它是一个锥 Kähler 度量并且在 M 上满足

$$\text{Ric}(\omega) = \mu\omega + 2\pi(1-\beta)[D], \quad (2.1)$$

其中 $[D]$ 表示沿着 D 积分所定义的流.

注 2.1 方程 (2.1) 在除子 D 外是经典意义下成立, 整体上是流意义下成立.

因为锥 Kähler-Einstein 度量在 Yau-Tian-Donaldson 猜想的证明中扮演者重要角色, 它的研究兴趣再度兴起. 另外锥 Kähler-Einstein 度量的存在性还有其本身的兴趣, 如今已有大量的工作, 例如:

- McOwen^[14] 和 Troyanov^[15] 研究了 Riemann 曲面情形;
- 为了获得某些 Chern 数不等式, Tian^[16] 首先研究了高维情形;
- $\mu < 0$ (参见文献 [17]);
- $\mu = 0$ (参见文献 [18]);
- $0 < \mu < \epsilon$ (参见文献 [19]);
- 一般情形 (参见文献 [20]).

定义 2.3 (Kähler-Ricci 孤立子) 假设 (M, J) 是一个 Fano 流形. 一个 Kähler 度量 $\omega \in 2\pi c_1(M)$ 被称为 M 上关于全纯向量场 X 的 Kähler-Ricci 孤立子, 如果它满足方程

$$\rho(\omega) = \omega + L_X\omega, \quad (2.2)$$

其中 L_X 表示沿着 X 方向的 Lie 导数, $\rho(\omega)$ 为 ω 的 Ricci 形式.

作为 Fano 流形上 Kähler-Einstein 度量的推广, Kähler-Ricci 孤立子已经被 Cao 等^[21] 进行了广泛的研究. Kähler Ricci 孤立子方程可以转化成下面的复 Monge-Ampère 方程:

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{F-\varphi-\theta_X-X(\varphi)}\omega^m.$$

- Tian 和 Zhu^[22] 给出了唯一性.

• 关于存在性, Cao 等^[21] 证明了存在性与修正的 K -Mabuchi 能量的正则性密切相关.

以下介绍扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子. Tian^[23] 和 Chen 等^[24–26] 的关于 Yau-Tian-Donaldson 猜想的证明激发我们考虑带锥奇性的 Kähler-Ricci 孤立子并用一族光滑扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子逼近它. 以下为扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子的定义, 它是 Kähler-Ricci 孤立子的一个自然推广.

定义 2.4 (扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子) 一个 Kähler 形式 $\omega_\eta \in 2\pi c_1(M)$ 被称为关于 $\eta \in 2(1 - \beta)\pi c_1(M)$ 的扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子, 如果

$$\rho(\omega_\eta) = \beta\omega_\eta + \eta + L_X\omega_\eta. \quad (2.3)$$

扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子方程 (2.3) 可以转化成如下关于位势的复 Monge-Ampère 方程:

$$\frac{(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\omega_0^n} = \exp(h_{\omega_0}^\eta - \beta\varphi - \theta_X - X(\varphi)).$$

现在讨论扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子的存在性.

定义 2.5 (扭曲的 modified K - 能量) 定义如下能量泛函:

$$\tilde{\mu}_{\omega_0, \eta}(\varphi) = \frac{\sqrt{-1}n}{2\pi V} \int_0^1 \int_M e^{\theta_X(\omega_{\varphi_t})} \partial(h_{\omega_{\varphi_t}}^\eta - \theta_X(\omega_{\varphi_t})) \wedge \bar{\partial}\dot{\varphi}_t \omega_{\varphi_t}^{n-1} \wedge dt.$$

扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子 ω_η 是 $\tilde{\mu}_{\omega_0, \eta}$ 的临界点. Jin 等^[27] 证明了以下结果:

定理 2.1 假设 $\eta \in (1 - \beta)[\omega_0]$ 是一个光滑 $\text{Im}(X)$ 不变的半正定的 $(1, 1)$ 形式, 如果 $\tilde{\mu}_{\omega_0, \eta}$ 是正则的, 则存在一个扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子 $\omega_\eta \in [\omega_0]$.

根据 Tian 和 Zhu^[22] (Berndtsson^[28] 给出了一个新证明) 的观点, 我们证明了下面的定理:

定理 2.2 (扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子的唯一性) 假设 V 满足 $i_V\eta = 0$ 和 $[X, V] = 0$, 则在模掉一个由全纯向量场 V 诱导的自同态意义下 ω_η 是唯一的. 特别地, 如果假设 η 在一点是严格正的, 那么 ω_η 是唯一的.

定义 2.6 (带锥奇性的 Kähler-Ricci 孤立子) 一个沿着 $(1 - \beta)D$ ($D \in |-\lambda K_M|$) 的 Kähler 度量

$$\omega_\beta = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_\beta \in [\omega_0]$$

称为一个关于 X 的带锥奇性的 Kähler-Ricci 孤立子, 如果它满足

$$\rho(\omega_\beta) = \gamma(\lambda, \beta)\omega_\beta + \beta[D] + L_X\omega_\beta,$$

其中 $\gamma(\lambda, \beta) = 1 - \lambda(1 - \beta)$.

Jin 等^[27] 证明了下面的定理:

定理 2.3 (带锥奇性的 Kähler-Ricci 孤立子的存在性) 假设 $X(\log|s_D|_{H_D}^2)$ 在 $M \setminus D$ 上有界, 如果 $\tilde{\mu}_{\omega_0, (1-\beta)D}$ 是正则的, 则存在一个关于 X 的锥 Kähler-Ricci 孤立子 ω_β . 进而 ω_β 是一些光滑扭曲的 Kähler-Ricci 孤立子的 Gromov-Hausdorff 极限.

• Datar 等^[29] 和 Wang 等^[30] 研究了 toric 情形下的带锥奇性的 Kähler-Ricci 孤立子.

定义 2.7 (Kähler-Ricci 流) 一列单参数的 Kähler 度量满足如下方程:

$$\frac{\partial\omega(t)}{\partial t} = -\text{Ric}(\omega(t)) + \mu\omega(t).$$

• Cao^[31] 通过引进 Kähler-Ricci 流给出了 Calabi-Yau 定理的一个抛物方法的证明. 当 $c_1(M) < 0$ (或 $c_1(M) = 0$) 时, 他证明了长时间解一定收敛到 Kähler-Einstein 度量.

• 关于 Fano 流形, 即 $c_1(M) > 0$, Tian 和 Zhu^[32] 证明了, 如果存在 Kähler-Einstein 度量, 则当初值属于第一 Chern 类时 Kähler-Ricci 流一定 C^∞ 收敛到一个 Kähler-Einstein 度量.

定义 2.8 (带锥奇性的 Kähler-Ricci 流) 一系列单参数的 Kähler 度量满足如下方程:

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = -\text{Ric}(\omega(t)) + \mu \omega(t) + (1 - \beta)[D]. \quad (2.4)$$

为了解决带锥奇性的 Kähler-Einstein 的存在性, 带锥奇性的 Kähler-Ricci 流是一个自然的引入. 它可以转化成下列带奇性的抛物 Monge-Ampère 方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \log \frac{\omega_\varphi^n}{\omega_0^n} + F_0 + \beta(k|s|_h^{2\beta} + \varphi) + \log |s|_h^{2(1-\beta)}.$$

关于这个流有很多的工作, 我们按时间顺序列出它们.

- Mazzeo 等^[33] 和 Yin^[34] 在 Riemann 曲面情形用不同的函数空间研究它.
- 对于高维情形, Chen 和 Wang^[35] 研究了带强锥奇性的 Kähler-Ricci 流并获得了短时间存在性.
- Liu 和 Zhang^[36] 及 Wang^[37] 分别得到了带锥奇性的 Kähler-Ricci 流的长时间存在性. Liu 和 Zhang^[36] 也研究了在这个流在带有正的扭曲的第一 Chern 类的 Fano 流形上的收敛性.
- 当扭曲的第一 Chern 类为负或零时, Chen 和 Wang^[38] 研究带锥奇性的 Kähler-Ricci 流的收敛性.
- Shen^[39] 研究了非规范化的带锥奇性的 Kähler-Ricci 流和它的正则性.
- Edwards^[40] 探究了数量曲率沿着带锥奇性的 Kähler-Ricci 流的有界性.
- Liu 和 Zhang^[41] 研究了带有弱初值的带锥奇性的 Kähler-Ricci 流.
- Liu 和 Zhang^[42] 研究了带尖点的 Kähler-Ricci 流的极限行为.

Liu 和 Zhang^[41] 也给出了存在唯一性定理.

定理 2.4^[41] M 是复维数为 n 的 Fano 流形, $\omega_0 \in c_1(M)$ 是 M 上的光滑度量, 除子 $D \in |-\lambda K_M|$ ($\lambda > 0 \in \mathbb{Q}$), $\hat{\omega} \in c_1(M)$ 是一个关于 ω_0^n 有 L^p ($p > 1$) 密度的 Kähler curren 并且 $\int_M \hat{\omega}^n = \int_M \omega_0^n$. 对任意 $\beta \in (0, 1)$, 对于带锥奇性的 Kähler-Ricci 流 (2.4), 长时间解存在且唯一.

定理 2.5^[36] 如果存在一个沿着除子 D 锥角为 $2\pi\beta$ ($0 < \beta < 1$) 的带锥奇性的 Kähler-Einstein 度量 $\omega_{\beta,D}$, 那么带锥奇性的 Kähler-Ricci 流 (2.4) 一定在除子外 C_{loc}^∞ 收敛到这个带锥奇性的 Kähler-Einstein 度量且整体上在流意义下收敛.

• 我们的收敛性结果可以看成是 Tian 和 Zhu^[32] 的结果从光滑 Kähler-Ricci 流到带锥奇性的 Kähler-Ricci 流的一个推广.

3 Sasakian 几何中的典则度量

由于 Sasakian-Einstein 度量在理论物理中著名的 Ads/CFT 对偶猜想的研究中起到重要作用, 最近 Sasakian 流形的研究兴趣再度兴起. Boyer 和他的合作者、Yau 和他的合作者、Futaki-Ono-Wang 在 Sasakian 几何中已经做了很多重要的工作.

3.1 Sasakian 流形

定义 3.1 (Sasakian 流形) 假设 (M, g) 是一个连通可定向 $2m+1$ 维光滑 Riemann 流形, (M, g) 是一个 Sasakian 流形, 如果锥流形 $(C(M), \tilde{g}) = (M \times \mathbb{R}^+, r^2g + dr^2)$ 是 Kähler 的.

定义 3.2 (Sasakian 结构) 假设 (M, g) 是 Sasakian 流形. 定义

$$\xi = J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \eta(Y) = \langle \xi, Y \rangle_g, \quad \Phi(Y) = \nabla_Y \xi.$$

上面的四元组 (ξ, η, Φ, g) 被称为流形 M 上的一个 Sasakian 结构, Killing 向量场 ξ 被称为示性向量场或 Reeb 向量场, η 被称为接触 1- 形式, Φ 是一个 $(1, 1)$ 张量场. 这诱导了一个消灭 ξ 的接触子丛 $\mathcal{D} = \ker \eta$.

定义 3.3 (横截 Kähler-Einstein) 称 Sasakian 流形是横截 Kähler-Einstein 的, 如果存在常数使得

$$\text{Ric}^T = \mu g^T \quad \text{或} \quad \rho^T = \mu \left(\frac{1}{2} d\eta \right),$$

其中 T 表示横截部分.

定义 3.4 (Sasakian-Einstein 流形) (M, ξ, η, Φ, g) 称为 Sasakian-Einstein 流形, 如果 g 是 Riemann Einstein 度量, 即存在常数 c 使得 $\text{Ric}_g = cg$.

注 3.1 Sasakian-Einstein 一定是横截 Kähler-Einstein, 常数 c 一定是 $2m$, 且

$$\text{Ric}^T = (2m+2)g^T \quad \text{或} \quad \rho^T = (m+1)d\eta, \quad (3.1)$$

其中 T 表示横截部分.

3.2 横截 Monge-Ampère 方程

与 (ξ, η, Φ, g) 相容的 Sasakian-Einstein 度量的存在性问题可以转化成解下列横截 Monge-Ampère 方程:

$$\frac{(d\eta + \sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B\varphi)^m \wedge \eta}{(d\eta)^m \wedge \eta} = \exp(h_{d\eta} - (m+1)\varphi), \quad (3.2)$$

其中 $\varphi \in \mathcal{H}(\xi, \eta, \Phi, g)$ 和 $h_{d\eta}$ 是一个光滑的基本函数满足

$$\rho^T = (m+1)d\eta + \sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B h_{d\eta} \quad \text{和} \quad \int_M \exp(h_{d\eta})(d\eta)^m \wedge \eta = \int_M (d\eta)^m \wedge \eta = V.$$

作为 Ding 和 Tian^[43] 关于 Kähler 情形工作的一个推广, 在 Sasakian 几何中, 我们引入横截全纯不变量 α 和 β .

定义 3.5 设 (M, ξ, Φ, η, g) 是 Sasakian 流形. 首先定义

$$\alpha(M, \xi, \eta, \Phi, g) = \sup \left\{ \alpha > 0 \mid \exists C > 0, \text{使得} \int_M e^{-\alpha\phi} \eta \wedge (d\eta)^m \leq C \text{ 对所有的 } \phi \in \mathcal{H}^* \text{ 成立} \right\},$$

这里

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \phi \in C_B^\infty(M, \mathbb{R}) \mid d\eta + \sqrt{-1}\partial_B\bar{\partial}_B\phi \geq 0, \sup_M \phi = 0 \right\}.$$

定义 $\beta(M, \xi, \Phi, \eta, g)$ 为使得下面不等式成立的最小正数 β :

$$\int_M e^{-(m+1)\phi} (d\eta)^m \wedge \eta \leq C \exp \left[\beta J_\eta(\phi) - \frac{m+1}{V} \int_M \phi (d\eta)^m \wedge \eta \right], \quad (3.3)$$

这里

$$\phi \in Q^\epsilon(M, \xi, \eta, \Phi, g), \quad Q^\epsilon(M, \xi, \eta, \Phi, g) = \{\phi \in \mathcal{H}, \rho_\phi^T \geq \epsilon d\eta_\phi\},$$

常数 C 仅依赖于 ϵ 、 β 和 (M, ξ, Φ, η, g) 的相关几何量.

当 $2\pi C_1^B(M, \mathcal{F}_\xi) = (m+1)[d\eta]_B$ 成立时, 定义 α - 和 β - 横截全纯不变量如下:

$$\begin{aligned} \alpha(M, \mathcal{F}_\xi) &:= \alpha(M, \xi, \eta, \Phi, g), \\ \beta(M, \mathcal{F}_\xi) &:= \inf_{(\xi', \eta', \Phi', g')} \{\beta(M, \xi', \eta', \Phi', g')\}, \end{aligned}$$

这里 (ξ', η', Φ', g') 取遍所有与 (ξ, η, Φ, g) 具相同 Reeb 向量场和横截全纯结构的 Sasakian 结构.

定理 3.1 ^[44] 假设 (M, ξ, η, Φ, g) 是一个带有 $2\pi C_1^B(M, \mathcal{F}_\xi) = (m+1)[d\eta]_B$ 的 Sasakian 流形. 如果 $\beta(M, \mathcal{F}_\xi) < m+1$, 则在 N 上存在一个 Sasakian-Einstein 度量. 特别地, 如果 $\alpha(M, \mathcal{F}_\xi) > m$, 则 M 上存在一个 Sasakian-Einstein 度量.

用田刚的观点, 我们证明了 Sasakian-Einstein 度量与对应的能量泛函的正则性有密切相关. 我们给出了下面的定理:

定理 3.2 ^[45] 假设 (M, ξ, η, Φ, g) 是带有 $[d\eta]_B = \frac{2\pi}{m+1} c_1^B(M, \mathcal{F}_\xi)$ 的紧 Sasakian 流形. 如果 $F_{d\eta}$ (或 $\mathcal{V}_{d\eta}$) 在空间 $\mathcal{H}(\xi, \eta, \Phi, g)$ 上是正则的, 则一定存在一个与 (ξ, η, Φ, g) 相容的 Sasakian-Einstein 度量. 进而假设 (M, ξ, η, Φ, g) 没有非平凡的 Hamilton 全纯向量场, 如果 M 有一个与 (ξ, η, Φ, g) 相容的 Sasakian-Einstein 结构, 则对所有 $\varphi \in \mathcal{H}(\xi, \eta, \Phi, g)$, 存在一个一致正常数 C_1 和 C_2 , 使得

$$F_{d\eta}(\varphi) \geq C_1 J_{d\eta}(\varphi) - C_2. \quad (3.4)$$

下面介绍 Sasakian 度量形成的空间.

称 φ 是基本函数, 若 $\xi\varphi \equiv 0$. 记 (M, ξ, η, Φ, g) 上所有光滑基本实函数形成的空间为 $C_B^\infty(M, \xi)$. 令

$$\mathcal{H}(\xi, \eta, \Phi, g) = \{\varphi \in C_B^\infty(M, \xi) : \eta_\varphi \wedge (d\eta_\varphi)^n \neq 0\}, \quad (3.5)$$

其中

$$\eta_\varphi = \eta + \sqrt{-1} \frac{1}{2} (\bar{\partial}_B - \partial_B) \varphi, \quad d\eta_\varphi = d\eta + \sqrt{-1} \partial_B \bar{\partial}_B \varphi. \quad (3.6)$$

下面是 Sasakian 度量空间的度量和测地线方程的定义. 在空间 H 上有 Weil-Peterson 度量. 显然, 切空间 $T\mathcal{H}$ 是 $C_B^\infty(M)$. 每个 Sasaki 位势 $\varphi \in \mathcal{H}$ 定义了一个测度 $d\mu_\varphi = \eta_\varphi \wedge (d\eta_\varphi)^n$, 因此在无限维流形 $\mathcal{H}$ 用关于这个测度的 L^2 范数定义了一个 Riemann 度量

$$(\psi_1, \psi_2)_\varphi = \int_M \psi_1 \cdot \psi_2 d\mu_\varphi, \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in C_B^\infty(M). \quad (3.7)$$

对于路径 $\varphi(t) \in \mathcal{H}$ ($0 \leq t \leq 1$), 其长度为

$$\int_0^1 \sqrt{\int_M \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\mu_{\varphi(t)}} dt.$$

这对应的测地方程可以写成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \left| d_B \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{g_\varphi}^2 = 0. \quad (3.8)$$

关键的观察是测地线方程 (3.8) 等价于下列退化 Monge-Ampère 型方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} (\Omega_\psi)^{m+1} = 0, & M \times \left(1, \frac{3}{2}\right), \\ \psi|_{r=1} = \psi_1, \\ \psi|_{r=\frac{3}{2}} = \psi_{\frac{3}{2}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

利用 Yau^[46] 的内部估计和 Guan^[3] 的边界估计, Guan 和 Zhang^[47] 证明了下面的定理:

定理 3.3^[47] 测地线方程 (3.8) 存在唯一的 $C^{1,1}$ 弱解.

用上面测地线方程的结果, 结合 Berman 和 Berndtsson^[48] 对 Kähler 情形的观点, 我们得到了带有常数量曲率的 Sasakian 度量的唯一性, 即下面的定理:

定理 3.4^[49] 假设 g_1 和 g_2 是 $(M, \xi, \bar{J})$ 上常数量曲率的 Sasakian 度量且在同一个基本 Kähler 类, 则在群 $\mathfrak{Aut}(\xi, \mathcal{D}, \bar{J})$ 中存在一个自同构 f 使得 $g_1 = f^*g_2$, 其中 $\mathfrak{Aut}(\xi, \mathcal{D}, \bar{J})$ 包含由所有规范化的横截 Hamilton 全纯向量场生成的作用群.

4 复 Monge-Ampère 方程的 Liouville 型定理

Riebeschl 和 Schulz^[50] 证明了 $\mathbb{C}^n$ 上复 Monge-Ampère 的 Liouville 定理. 用 Kähler 形式有如下表述:

定理 4.1 假设 ω 是 $\mathbb{C}^n$ 上 Kähler 形式并满足 $C^{-1}\omega_0 \leq \omega \leq C\omega_0$ 和 $\omega^n = \omega_0^n$, 其中

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n dz^i \wedge d\bar{z}^i,$$

C 是一个正常数, 则 $\nabla_{\omega_0}\omega = 0$, 或等价地,

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

对某个常 Hermite 矩阵 (A_{ij}) 成立.

上面 Liouville 定理证明的关键是局部 Calabi $\mathcal{C}^3$ 估计, 即关于 $|\nabla_{\omega_0}\omega|_w^2$ 的估计. 然而当在带有非平凡 Riemann 曲率的完备 Kähler 流形上考虑时, Calabi $\mathcal{C}^3$ 估计似乎不能够得出 Liouville 型定理.

Hein^[51] 证明了如下的乘积流形上的复 Monge-Ampère 的 Liouville 定理.

定理 4.2 假设 (Y, ω_{Y_0}) 是一个紧 Ricci 平坦的 Kähler 流形. 令 ω 是 $\mathbb{C}^m \times Y$ 上一个 Ricci 平坦的 Kähler 形式. 假设存在常数 $C > 1$ 使得

$$C^{-1}(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_{Y_0}) \leq \omega \leq C(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_{Y_0}),$$

其中 $\omega_{\mathbb{C}^m}$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上标准平坦 Kähler 形式, 则可以找到 Y 上某个 Kähler 形式 ω_Y 满足 $\nabla_{\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y}\omega = 0$.

Hein 的证明中一个关键步骤是研究一族关于 Kähler 度量 ω_t 的次调和函数 u_t 的收敛性, 其中 Kähler 度量 ω_t 通过 ω 构造. 最近, Li 等^[52] 考虑了 $\text{Ric}(\omega_{Y_0}) \geq 0$ 的情形并建立了如下 Liouville 定理:

定理 4.3^[52] 假设 (Y^n, ω_{Y_0}) 是 n 维带有非负 Ricci 曲率的紧 Kähler 流形, ω 是 $\mathbb{C}^m \times Y$ 上的 Kähler 形式且对某个正常数 C 满足

$$C^{-1}(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_{Y_0}) \leq \omega \leq C(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_{Y_0})$$

和

$$\omega^{n+m} = (\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_{Y_0})^{m+n},$$

则存在一个 Y 上 Kähler 形式 ω_Y 满足 $\text{Ric}(\omega_Y) = \text{Ric}(\omega_{Y_0})$ 并使得 $\nabla_{\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y} \omega = 0$. 进而有 ω 的下列表示:

$$\omega = \hat{\omega}_{\mathbb{C}^n} + \omega_Y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (dz^i \wedge \eta^i + d\bar{z}^i \wedge \bar{\eta}^i), \quad (4.1)$$

其中

$$\hat{\omega}_{\mathbb{C}^n} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m u_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

$(u_{i\bar{j}})$ 为常 Hermite 矩阵, 且任意 η^i 是 ω_Y 平行的 $(0,1)$ 形式.

注 4.1 我们的证明依赖下面的对有界次调和 Hermite 矩阵值函数的一个平均值不等式. 这个不等式与 Hein 的大不相同.

下面是 Li^[53] 的有界次调和函数的平均值不等式. 在带有非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形上, 这个平均值不等式在研究调和函数的线性增长时是一个非常有用的工具.

引理 4.1^[53] 假设 (M, g) 是带有非负 Ricci 曲率的完备流形. 若 f 是一个定义在 (M, g) 上的有界次调和函数, 则对任意 $p \in M$, 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} f dv_g = \sup_M f. \quad (4.2)$$

我们把 Li^[53] 的公式推广到 Hermite 矩阵值函数情形并发现它在研究复 Monge-Ampère 方程的 Liouville 型定理时是有用的.

定义 4.1 一个从 Riemann 流形映到 $\mathbf{Hm}(m)$ 的映射被称为次调和的, 如果任意向量场 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$, $\xi A \xi^* = A_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$ 是一个次调和函数.

根据定义, 容易检验在 Riemann 流形上一个 C^2 Hermite 矩阵值函数 $A = (A_{ij})$ 是次调和的当且仅当 $\Delta A = (\Delta A_{ij})$ 是处处半正定的.

引理 4.2 假设 (M, g) 带有非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形且 $A = (a_{ij})$ 是 (M, g) 上一个有界次调和 Hermite 矩阵值函数, 则存在一个 Hermite 矩阵 A_0 , 使得在 M 上,

$$A \leq A_0,$$

并且对任意 $p \in M$, 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} A dv_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{B_r(p)} a_{ij} dv_g \right) = A_0. \quad (4.3)$$

推论 4.1 假设 $A : M \rightarrow \mathbf{Hm}(m)$ 满足引理 4.2 中的条件且 $A_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} A$. 若 F 是 $A(M)$ 的闭包的某个邻域上的一个有界函数同时在 A_0 处连续, 则有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} F(A) = F(A_0).$$

下面是 Riebesehl-Schulz 结果^[50]的一个新证明.

证明 • 我们把 ω 写成 $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$, 并记 $u_{i\bar{j}k} = \frac{\partial}{\partial z^k} u_{i\bar{j}}$ 和 $u_{i\bar{j}k\bar{l}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} u_{i\bar{j}k}$. 通过 ω 满足的方程, 有

$$\det(u_{i\bar{j}}) = 1. \quad (4.4)$$

• 通过直接计算可证

$$\Delta_\omega u_{i\bar{j}} = u^{k\bar{l}} u^{p\bar{q}} u_{k\bar{q}i} u_{l\bar{p}j}.$$

这推出了 $(u_{i\bar{j}})$ 是次调和的.

关于 ω 的条件可以推出 $(u_{i\bar{j}})$ 是有界的和 $(\mathbb{C}^n, \omega)$ 是一个完备 Ricci 平坦的 Kähler 流形. 根据引理 4.2 和推论 4.1, 可以发现一个常 Hermite 矩阵 A , 使得

$$(u_{i\bar{j}}) \leq A, \quad (4.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^\omega(O)} \det(u_{i\bar{j}}) \omega^n = \det A$$

和

$$\det A = \det(u_{i\bar{j}}) = 1. \quad (4.6)$$

因为 $(u_{i\bar{j}})$ 是正定的, (4.5) 和 (4.6) 暗示了 $(u_{i\bar{j}})$ 是常函数 A . 证毕. $\square$

下面是定理 4.3 的证明纲要.

• 对任意 $z \in \mathbb{C}^n$, 用 i_z 记从 Y 到 $\mathbb{C}^m \times Y$ 的嵌入

$$y \mapsto (z, y).$$

对于不同的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^m$, 证明

$$[i_{z_1}^* \omega] = [\Theta] = [i_{z_2}^* \omega], \quad (4.7)$$

即所有 $i_z^* \omega$ 在同一 Kähler 类中.

• 根据 Calabi-Yau 定理, 在 Kähler 类 $[\Theta]$ 里存在唯一的 Kähler 形式 ω_Y 满足 $\text{Ric}(\omega_Y) = \text{Ric}(\omega_{Y_0})$, 从而,

$$\omega_Y^n = c \omega_{Y_0}^n$$

对某个正常数 c 成立. 现在可以把关于 ω 的条件写成:

- (1) $C^{-1}(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y) \leq \omega \leq C(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y)$ 对某个正常数 C 成立;
- (2) $\omega^{n+m} = c^{-1}(\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y)^{m+n}$;

(3) 对任意 $z \in \mathbb{C}^m$, $i_z^* \omega$ 和 ω_Y 在同一个 Kähler 类里.

• 记 g_0 和 g 分别为关于 $\omega_{\mathbb{C}^m} + \omega_Y$ 和 ω 的 Riemann 度量. 令 g^{-1} 为 $T^*(\mathbb{C}^m \times Y)$ 上由 g 诱导的度量. 假设 $\{z^i\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上标准的复坐标, 对 $i, j = 1, 2, \dots, m$, 定义

$$u^{i\bar{j}} = \frac{1}{2} g^{-1}(dz^i, d\bar{z}^j), \quad u_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right).$$

使用条件 $\text{Ric}(g_0) \geq 0$, 可以证明 $(u^{i\bar{j}})$ 和 $(u_{i\bar{j}})$ 是有界的且是次调和的.

• 应用引理 4.2 和推论 4.1, 可以找到某个常 Hermite 阵 A 使得

$$(u^{i\bar{j}}) \leq A \quad (4.8)$$

处处成立且

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^\omega(x_0, z_0)} \det(u^{i\bar{j}}) dV_g = \det A. \quad (4.9)$$

• 使用 (4.8) 和 (4.9), 可以证明

$$\det(u^{i\bar{j}}) \leq \det A = c$$

和

$$\det(u^{i\bar{j}}) = \det A = c.$$

由 $(u^{i\bar{j}})$ 是正定的, 再次利用 (4.8), 得到

$$(u^{i\bar{j}}) \equiv A.$$

• 由等式

$$\Delta_\omega u^{i\bar{j}} = g^{a_1 \bar{b}_1} g^{a_2 \bar{b}_2} g^{i \bar{b}_3} g^{a_3 \bar{i}} g_{a_1 \bar{b}_3 a_3} g_{b_1 a_3 \bar{b}_2} + g^{i \bar{b}_3} g^{a_3 \bar{j}} R_{a_3 \bar{b}_3}$$

和

$$\Delta_\omega u_{i\bar{j}} = g^{a_1 \bar{b}_1} g^{a_2 \bar{b}_2} g_{a_1 \bar{b}_2 i} g_{a_2 \bar{b}_1 \bar{j}},$$

容易看出

$$\nabla_{g_0} g \equiv 0.$$

• 定义

$$\eta^i = i_z^* \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \lrcorner \omega \right),$$

其中 $z \in \mathbb{C}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$. 由 $\nabla_{g_0} g = 0$ 知, 这个定义不依赖于 z 的选取且任意 η^i 是 ω_Y 平行的 $(0,1)$ 形式. 在局部坐标下, (4.1) 的表述容易验证. 定理 4.3 的证明完成.

最近 Li 和 Sheng^[54] 得到了关于复 Monge-Ampère 方程 Liouville 定理的重要结果.

5 复 Monge-Ampère 方程的 $C^{2,\alpha}$ 估计

齐次复 Monge-Ampère 方程的正则性问题来自于复分析中的 Chern 等^[1]的内蕴范数, 为了克服这个问题, Bedford 和 Taylor^[55, 56]发展了弱解理论.

以下是 Bedford 和 Taylor 的 $C^{1,1}$ 估计:

定理 5.1^[55] 假设 $B = B_r(x_0) \subset \mathbb{C}^n$, 且 $u \in PSH(B) \cap C(\bar{B})$ 是复 Monge-Ampère 方程的弱解,

$$\begin{cases} \det(u_{i\bar{j}}) = f, & \text{在 } B \text{ 内}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial B \text{ 上}, \end{cases}$$

其中 $f \geq 0$, $f^{\frac{1}{n}} \in C^{1,1}(\bar{B})$ 且 $\varphi \in C^{1,1}(\partial B)$, 则 $u \in C^{1,1}(B)$.

Kołodziej^[57]得到了有关 $f \in L^1$ 可测函数条件下的 u 的 L^∞ -估计. 随后 Kołodziej^[58]又给出了 u 的 C^α -Hölder 估计, 前提条件是 $F \in L^p$, $p > 1$. 以下讨论 $C^{2,\alpha}$ 估计. 首先回顾 Laplace 方程的经典 $C^{2,\alpha}$ 估计.

定理 5.2 假设 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 上是 Laplace 方程的弱解, 即

$$\Delta u = f,$$

且 $f \in C^\alpha(\Omega)$ ($\alpha \in (0, 1)$), 则

$$[u]_{2,\alpha;\Omega}^* \leq C(n, \alpha)(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}^2).$$

假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的区域且 $u \in \text{psh} \cap C(\Omega)$ 是复 Monge-Ampère 方程的弱解,

$$\det(u_{i\bar{j}}) = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}. \quad (5.1)$$

问题 f 和 u 在什么条件下可以得到 u 的内部 $C^{2,\alpha}$ 估计?

猜想 5.1 假设 $u \in \text{psh} \cap C(\Omega)$ 是复 Monge-Ampère 方程 (5.1) 的弱解. 如果 $f \in C^\alpha(\Omega)$ 且 $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ 对 $1 > \beta > 1 - 2/n$ 成立, 则 $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Błocki^[59]的 Pogorelov 型例子说明了这个指标是最佳的.

接下来介绍 Monge-Ampère $C^{2,\alpha}$ 估计的历史.

- Yau^[46]使用 Calabi C^3 估计建立了 $C^{2,\alpha}$ 估计, 这个估计依赖于 f 的三阶导数.
- Siu^[60]用 Evans-Krylov 方法得到了 $C^{2,\alpha}$ 估计, 这个估计依赖于 f 的二阶导数.
- 在假设解是 $C^{1,1}$ 的条件下, Tian^[61]建立了 $C^{2,\alpha}$ 估计依赖于 f 的 Hölder 模和 Δf 的下确界.
- 注 5.1 Tian^[61]的估计可以不依赖于 Δf 的下确界, 而依赖于 f 的 $C^{0,1}$ 范数, 参见文献 [62].
- Błocki^[59]得到了当 $f \in C^{0,1}$ 时整体的 $C^{2,\alpha}$ 估计.
- Chen 和 He^[63]得到了当 f 是 $W^{1,p}$ 且 $p > 2n$ 时 u 的整体 $W^{3,p}$ 估计.
- Dinew 等^[64]得到了 $C^{2,\alpha}$ 估计, 仅依赖于 f 的 C^α 范数和 u 的 $C^{1,1}$ 范数.

注 5.2 这个估计对于 f 的 Hölder 指标是最优的. Zhang 和 Zhang^[65]把上面的估计推广到 Hermite 流形情形.

• Wang^[66]用 Krylov 的技巧把复 Monge-Ampère 方程转化成 Bellman 型方程. 然后他把上面 Dinew 等的估计从 u 的 $C^{1,1}$ 模有界情形推广到 $\Delta u \in L^\infty$ 情形.

- Chen 和 Wang^[67]给出了这种估计的一个新证明.

• Tosatti 等^[68] 和 Chu^[69] 把这种估计推广到复几何中一般非线性椭圆方程.

• 最近, Li 等^[70] 把 $\Delta u \in L^\infty$ 条件减弱到 $u \in \mathcal{C}^{1,\beta}$, 对某个 $\beta < 1$, 对上面的猜想给出了一个特别的回答. 需要指出的是, 这里的 β 远没达到猜想 5.1 中的精确值, 即使在 $f \in C^1$ 条件下猜想 5.1 是否成立目前仍是未知的.

以下是我们的结果:

定理 5.3^[70] 假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域, $u \in \text{psh} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ 是复 Monge-Ampère 方程 (5.1) 的弱解且 $0 < \lambda \leq f \in C^\alpha(\Omega)$ 对某个常数 λ 和 $\alpha \in (0, 1)$ 成立. 如果 $u \in \mathcal{C}^{1,\beta}(\Omega)$, $\beta \in (\beta_0, 1)$, 其中

$$\beta_0 = \beta_0(n, \alpha) = 1 - \frac{\alpha}{n(2+\alpha)-1}, \quad (5.2)$$

则 $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. 进而 u 的 $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ 范数在任意紧子集可以被 $n, \alpha, \beta, \lambda, \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\beta}(\Omega)}, \|f\|_{C^\alpha(\Omega)}$ 和子集到 $\partial\Omega$ 的距离控制.

下面给出这个定理证明的概要.

根据 Dinew 等^[64] 的估计, 我们仅仅需要 u 的 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计. 下面是关键的一个引理.

引理 5.1 假设 $u \in \text{psh} \cap \mathcal{C}(\Omega)$ 是复 Monge-Ampère 方程 (5.1) 的弱解且 $0 < \lambda \leq f \in C^\alpha(\Omega)$ 对某个常数 λ 和某个 $\alpha \in (0, 1]$ 成立. 给定任意 $\delta \in (\beta_0(n, \alpha), 1]$, 如果对任意 $\beta \in (\phi(\delta), 1)$, $u \in \mathcal{C}^{1,\beta}(\Omega)$, 其中

$$\phi(\delta) = \phi_{n,\alpha}(\delta) = 1 - \frac{2((2+\alpha)(2-\delta) - (1+\delta))}{(2+\alpha)(1+\delta)(n+1) + ((2+\alpha)(2-\delta) - (1+\delta))}, \quad (5.3)$$

则必成立 $u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\Omega)$. 进而在任意紧子集上, u 的 $\mathcal{C}^{1,\delta}$ 模可以被 $n, \alpha, \lambda, \beta, \delta, \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\beta}(\Omega)}, \|f\|_{C^\alpha(\Omega)}$ 和集合到边界 $\partial\Omega$ 的距离控制.

容易验证 (5.2) 定义的 β_0 是 ϕ 的不动点, 即 $\phi(\beta_0) = \beta_0$. 进而 ϕ 在 $[\beta_0, 1]$ 上是一个严格增函数且满足

$$\phi(\delta) < \delta$$

对任意 $\delta \in (\beta_0, 1]$ 成立. 我们使用上面的引理证明 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计.

考虑以下定义的序列 $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \phi(1) < 1, \\ \delta_{i+1} &= \phi(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

易得 $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$ 是一个递减的收敛到 β_0 的序列. 因为 $\beta \in (\beta_0, 1)$, 所以可以找到某个 $k \geq 1$, 使得 $\beta > \delta_k$. 我们仅仅需要证明 $u \in \mathcal{C}^{1,1}$ 如果 $\beta \in (\delta_k, 1)$ 对所有 $k \geq 1$ 成立.

以下是 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计的证明:

• 如果 $k = 1$, $\beta > \phi(1)$, 则 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计自然成立, 这是引理 5.1 的直接推论.
 • 假设对某 $l \geq 1$, $u \in \mathcal{C}^{1,1}$ 成立, 即如果弱解 $u \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\Omega)$, $\gamma \in (\delta_l, 1)$, 则 $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$. 如果 $\beta > \delta_{l+1} = \phi(\delta_l)$, 则可以找到 $\gamma \in (\delta_l, 1]$, 使得 $\beta > \phi(\gamma)$. 根据引理 5.1, 有 $u \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\Omega)$. 因而根据假设推出了 $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$.

现在证明引理 5.1, 证明基于下列一族辅助函数 φ_{t,x_0} .

任意一点 $x_0 \in \Omega$, 考虑下面的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \det((\varphi_{t,x_0})_{i\bar{j}}) = f(x_0), & \text{在 } B_{dt}(x_0) \text{ 内,} \\ \varphi_{t,x_0} = \rho_{dt^\mu} * u, & \text{在 } \partial B_{dt}(x_0) \text{ 上,} \end{cases} \quad (5.4)$$

其中 ρ 是非负对称磨光核, 常数 $d \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, $\mu > 1$.

- Caffarelli 等^[2]的结果确保了上述 Dirichlet 问题光滑解 φ_{t,x_0} 的存在性.
- 根据 Bedford 和 Taylor^[55]的内部 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计, 我们分析了当 $t \rightarrow 0$ 时 φ_{t,x_0} 的渐近行为.

下面是证明中的一些关键的估计. 我们证明了

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \nabla \varphi_{t,x_0}(x_0) &= \nabla u(x_0), \\ |\nabla \varphi_{t,x_0}(x_0) - \nabla u(x_0)| &\leq C(dt)^\delta. \end{aligned}$$

(2) 对任意 $x, y \in B_{\frac{1}{4}dt}(x_0)$, 有

$$|\nabla \varphi_{t,x_0}(x) - \nabla \varphi_{t,x_0}(y)| \leq C|x - y|^\delta.$$

(3) 假设 $x_0, y_0 \in \Omega$, $d \leq \min\{\text{dist}(x_0, \partial\Omega), \text{dist}(y_0, \partial\Omega)\}$. 如果

$$|x_0 - y_0| \leq \frac{1}{8}dt \quad \text{且} \quad B_{\frac{1}{4}dt}(z) \subset B_{\frac{1}{2}dt}(x_0) \cap B_{\frac{1}{2}dt}(y_0),$$

则在 $B_{\frac{1}{8}dt}(z)$ 上, 有

$$|\nabla \varphi_{t,x_0} - \nabla \varphi_{t,y_0}| \leq C(dt)^\delta.$$

- 使用上面的估计, 我们证明了引理 5.1, 从而得到了 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计.

我们希望我们的方法能够对解决上面关于 Monge-Ampère 的最优 $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ 估计的猜想有帮助.

以下是 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ 估计. 根据上面的观点, 我们认为把 Bedford-Taylor 内部 $\mathcal{C}^{1,1}$ 估计推广到 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ 情形是十分有趣的.

定理 5.4^[71] 假设 $B_r(0) \subset \mathbb{C}^n$. 如果 $u \in PSH(B_r(0)) \cap \mathcal{C}(\bar{B}_r(0))$ 是 Dirichlet 问题的解:

$$\begin{cases} \det(u_{i\bar{j}}) = f, & \text{在 } B_r(0) \text{ 内,} \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial B_r(0) \text{ 上,} \end{cases} \quad (5.5)$$

其中 $\varphi \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial B_r(0))$, $f \geq 0$ 且 $f^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar{B}_r(0))$, $\alpha \in (0, 1)$, 则 $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(B_r(0))$. 进而对任意的 $t \in (0, 1)$, 有

$$[u]_{1,\alpha;B_{(1-t)r}(0)} \leq C(n, \alpha, t)([\varphi]_{1,\alpha;\partial B_r(0)} + r^{1-\alpha}|f^{\frac{1}{n}}|'_{1,\alpha;B_r(0)}),$$

其中常数 $C(n, \alpha, t)$ 仅依赖于 n, α 和 t .

参考文献

- 1 Chern S S, Levine H, Nirenberg L. Intrinsic norms on a complex manifold. In: Global Analysis. Tokyo: University Tokyo Press, 1969, 119–139

- 2 Caffarelli L, Kohn J J, Nirenberg L, et al. The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations. *Comm Pure Appl Math*, 1985, 38: 209–252
- 3 Guan B. The Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations and regularity of the pluri-complex Green function. *Comm Anal Geom*, 1998, 6: 687–703
- 4 Guan P. The extremal function associated to intrinsic norms. *Ann of Math (2)*, 2002, 156: 197–211
- 5 Mabuchi T. Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I. *Osaka J Math*, 1987, 24: 227–252
- 6 Semmes S. Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds. *Amer J Math*, 1992, 114: 495–550
- 7 Donaldson S. Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology. In: *Fields Medallists' Lectures*. World Scientific Series in 20th Century Mathematics. River Edge: World Scientific, 1997, 384–403
- 8 Chen X. The space of Kähler metrics. *J Differential Geom*, 2000, 56: 189–234
- 9 Chen X, Tian G. Partial regularity for homogeneous complex Monge-Ampère equations. *C R Math Acad Sci Paris*, 2005, 340: 337–340
- 10 Fu J X, Yau S T. The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation. *J Differential Geom*, 2008, 78: 369–428
- 11 Phong D H, Picard S, Zhang X. The Fu-Yau equation with negative slope parameter. *Invent Math*, 2017, 209: 541–576
- 12 Chu J, Huang L, Zhu X. The Fu-Yau equation in higher dimensions. *Peking Math J*, 2019, 2: 71–97
- 13 Phong D H, Picard S, Zhang X W. Fu-Yau Hessian equations. *ArXiv:1801.09842*, 2018
- 14 McOwen R C. Point singularities and conformal metrics on Riemann surfaces. *Proc Amer Math Soc*, 1988, 103: 222–224
- 15 Troyanov M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans Amer Math Soc*, 1991, 324: 793–821
- 16 Tian G. *Canonical Metrics in Kähler Geometry*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Basel: Birkhäuser, 2000
- 17 Eyssidieux P, Guedj V, Zeriahi A. Singular Kähler-Einstein metrics. *J Amer Math Soc*, 2009, 22: 607–639
- 18 Brendle S. Ricci flat Kähler metrics with edge singularities. *Int Math Res Not IMRN*, 2013, 2013: 5727–5766
- 19 Berman R J. A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics. *Adv Math*, 2013, 248: 1254–1297
- 20 Jeffres T, Mazzeo R, Rubinstein Y. Kähler-Einstein metrics with edge singularities. *Ann of Math (2)*, 2016, 183: 95–176
- 21 Cao H D, Tian G, Zhu X. Kähler-Ricci solitons on compact complex manifolds with $C_1(M) > 0$. *Geom Funct Anal*, 2005, 15: 697–719
- 22 Tian G, Zhu X. Uniqueness of Kähler-Ricci solitons. *Acta Math*, 2000, 184: 271–305
- 23 Tian G. K-stability and Kähler-Einstein metrics. *Comm Pure Appl Math*, 2015, 68: 1085–1156
- 24 Chen X X, Donaldson S, Sun S. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I: Approximation of metrics with cone singularities. *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 183–197
- 25 Chen X X, Donaldson S, Sun S. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, II: Limits with cone angle less than 2π . *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 199–234
- 26 Chen X X, Donaldson S, Sun S. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: Limits with cone angle approach 2π and completion of the main proof. *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 235–278
- 27 Jin X, Liu J, Zhang X. Twisted and conical Kähler-Ricci solitons on Fano manifolds. *J Funct Anal*, 2016, 271: 2396–2421
- 28 Berndtsson B. A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry. *Invent Math*, 2015, 200: 149–200
- 29 Datar V, Guo B, Song J, et al. Connecting toric manifolds by conical Kähler-Einstein metrics. *Adv Math*, 2018, 323: 38–83
- 30 Wang F, Zhou B, Zhu X. Modified Futaki invariant and equivariant Riemann-Roch formula. *Adv Math*, 2016, 289: 1205–1235
- 31 Cao H D. Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds. *Invent Math*, 1985, 81: 359–372
- 32 Tian G, Zhu X. Convergence of Kähler-Ricci flow. *J Amer Math Soc*, 2007, 20: 675–699
- 33 Mazzeo R, Rubinstein Y, Sesum N. Ricci flow on surfaces with conic singularities. *Anal PDE*, 2015, 8: 839–882
- 34 Yin H. Ricci flow on surfaces with conical singularities. *J Geom Anal*, 2010, 20: 970–995
- 35 Chen X, Wang Y. Bessel functions, heat kernel and the conical Kähler-Ricci flow. *J Funct Anal*, 2015, 269: 551–632

- 36 Liu J, Zhang X. Conical Kähler-Ricci flows on Fano manifolds. *Adv Math*, 2017, 307: 1324–1371
- 37 Wang Y. Smooth approximations of the conical Kähler-Ricci flows. *Math Ann*, 2016, 365: 835–856
- 38 Chen X X, Wang Y. On the long time behaviour of the conical Kähler-Ricci flows. *J Reine Angew Math*, 2018, 744: 165–199
- 39 Shen L. The $C^{2,\alpha;\beta}$ -estimate for conical Kähler-Ricci flow. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2018, 57: 33
- 40 Edwards G. A scalar curvature bound along the conical Kähler-Ricci flow. *J Geom Anal*, 2018, 28: 225–252
- 41 Liu J, Zhang X. The conical Kähler-Ricci flow with weak initial data on Fano manifolds. *Int Math Res Not IMRN*, 2017, 2017: 5343–5384
- 42 Liu J, Zhang X. Cusp Kähler-Ricci flow on compact Kähler manifolds. *Ann Mat Pura Appl (4)*, 2019, 198: 289–306
- 43 Ding W, Tian G. Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant. *Invent Math*, 1992, 110: 315–335
- 44 Zhang X. Some invariants in Sasakian geometry. *Int Math Res Not IMRN*, 2011, 2011: 3335–3367
- 45 Zhang X. Energy properness and Sasakian-Einstein metrics. *Comm Math Phys*, 2011, 306: 229–260
- 46 Yau S T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. *Comm Pure Appl Math*, 1978, 31: 339–411
- 47 Guan P, Zhang X. Regularity of the geodesic equation in the space of Sasakian metrics. *Adv Math*, 2012, 230: 321–371
- 48 Berman R J, Berndtsson B. Convexity of the K -energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics. *J Amer Math Soc*, 2017, 30: 1165–1196
- 49 Jin X, Zhang X. Uniqueness of constant scalar curvature Sasakian metrics. *Ann Global Anal Geom*, 2016, 49: 309–328
- 50 Riebeschl D, Schulz F. A priori estimates and a Liouville theorem for complex Monge-Ampère equations. *Math Z*, 1984, 186: 57–66
- 51 Hein H J. A Liouville theorem for the complex Monge-Ampère equation on product manifolds. *Comm Pure Appl Math*, 2019, 72: 122–135
- 52 Li C, Li J, Zhang X. A mean value formula and a Liouville theorem for the complex Monge-Ampère equation. *ArXiv:1709.05754*, 2017
- 53 Li P. Harmonic functions of linear growth on Kähler manifolds with nonnegative Ricci curvature. *Math Res Lett*, 1995, 2: 79–94
- 54 Li A M, Sheng L. A Liouville theorem on the PDE $\det(f_{i\bar{j}}) = 1$. *ArXiv:1809.00824*, 2018
- 55 Bedford E, Taylor B A. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. *Invent Math*, 1976, 37: 1–44
- 56 Bedford E, Taylor B A. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math*, 1982, 149: 1–40
- 57 Kołodziej S. The complex Monge-Ampère equation. *Acta Math*, 1998, 180: 69–117
- 58 Kołodziej S. Hölder continuity of solutions to the complex Monge-Ampère equation with the right-hand side in L^p : The case of compact Kähler manifolds. *Math Ann*, 2008, 342: 379–386
- 59 Blocki Z. Interior regularity of the complex Monge-Ampère equation in convex domains. *Duke Math J*, 2000, 105: 167–181
- 60 Siu Y. Lectures on Hermitian-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein Metrics. *DMV Seminar*, vol. 8. Basel: Birkhäuser, 1987
- 61 Tian G. On the existence of solutions of a class of Monge-Ampère equations. *Acta Math Sin*, 1988, 4: 250–265
- 62 Huang L. A $C^{2,\alpha,\beta}$ Estimate for Conic Monge-Ampère Equations. *Surveys in Geometric Analysis*. Beijing: Science Press, 2017
- 63 Chen X, He W. The complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds. *Math Ann*, 2012, 354: 1583–1600
- 64 Dinew S, Zhang X, Zhang X W. The $C^{2,\alpha}$ estimate of complex Monge-Ampère equation. *Indiana Univ Math J*, 2011, 60: 1713–1722
- 65 Zhang X, Zhang X. Regularity estimates of solutions to complex Monge-Ampère equations on Hermitian manifolds. *J Funct Anal*, 2011, 260: 2004–2026
- 66 Wang Y. On the $C^{2,\alpha}$ regularity of the complex Monge-Ampère equation. *Math Res Lett*, 2012, 19: 939–946
- 67 Chen X, Wang Y. $C^{2,\alpha}$ -estimate for Monge-Ampère equations with Hölder-continuous right hand side. *Ann Global Anal Geom*, 2016, 49: 195–204
- 68 Tosatti V, Wang Y, Weinkove B, et al. $C^{2,\alpha}$ estimates for nonlinear elliptic equations in complex and almost complex geometry. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 431–453
- 69 Chu J. $C^{2,\alpha}$ regularities and estimates for nonlinear elliptic and parabolic equations in geometry. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 8
- 70 Li C, Li J, Zhang X. A $C^{2,\alpha}$ estimate of the complex Monge-Ampère equation. *J Funct Anal*, 2018, 275: 149–169

- 71 Li C, Li J, Zhang X. Some interior regularity estimates for solutions of complex Monge-Ampère equations on a ball. ArXiv:1809.07919, 2018

Some results on the complex Monge-Ampère equation

Xi Zhang

Abstract The complex Monge-Ampère equation has been the subject of intensive studies in the past fifty years, since its significant applications in complex analysis, complex geometry and Kähler geometry. In this paper, we will introduce our recent work on the Liouville type theorem, $C^{1,\alpha}$ and $C^{2,\alpha}$ estimates of the complex Monge-Ampère equation and its applications in Sasakian geometry. These works are joint with S. Dinew, P. F. Guan, C. Li, J. Y. Li and X. W. Zhang.

Keywords complex Monge-Ampère equation, Kähler geometry, Sasakian geometry

MSC(2010) 53C07, 58E15

doi: 10.1360/SSM-2019-0235