多面体块稀疏表示和非凸压缩感知

周琚, 黄尉*

合肥工业大学数学学院, 合肥 230009

E-mail: 1812253174@qq.com, whuang@hfut.edu.cn

收稿日期: 2018-06-15; 接受日期: 2019-12-25; 网络出版日期: 2020-08-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 91538112) 资助项目

摘要 压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论表明稀疏信号可以从欠定系统中被准确恢复, 但在很多实际应用中, 信号不一定有标准稀疏性而可能拥有一些其他的结构特点, 典型的一种就是块稀疏信号, 它的非零元仅在很少的一些块中出现. 本文考虑从很少的线性测量中恢复块稀疏信号, 并得到经混合 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 最小化准确重构块稀疏信号时, 测量矩阵需满足的充分条件, 同时进一步给出带噪声时稳定恢复的紧性分析.

关键词 压缩感知 限制等距性质 块-限制等距性质 块稀疏 混合 l_2/l_q 最小化

MSC (2020) 主题分类 90C25, 90C59

1 引言

压缩感知的概念是由 Donoho^[1]、Candès 等^[2]、Candès 和 Tao^[3] 提出的一种全新的基于稀疏信号的采样理论, 利用未知信号的可压缩性获得信号的必要信息. 此理论现在被广泛应用于医学成像^[4]、模式识别^[5] 和图像处理^[6] 等诸多领域. 一般地, 考虑如下模型:

$$y = Ax + z,$$

其中 A 代表已知的 $M \times N$ 阶测量矩阵 ($M \ll N$), $z \in \mathbb{R}^M$ 为测量误差, 目标是期望从测量值 y 和测量矩阵 A 中恢复未知信号 $x \in \mathbb{R}^N$. 解决此问题一个自然的方法是考虑采用 l_0 最小化方法从可行解中找到最稀疏的一个解, 显然, 此问题是 NP- 难的. 因而, 人们利用 l_1 范数对 l_0 拟范数进行凸松弛, 从而得到

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y - Ax \in \mathcal{B},$$

英文引用格式: Zhou J, Huang W. Block sparse representation of a polytope and non-convex compressed sensing (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 105–120, doi: 10.1360/N012018-00163

此处 $\mathcal{B}$ 是取决于噪声的有界集合. 为了更好地研究 l_1 范数最小化的理论表现, Candès 等^[2] 提出了限制等距性质 (restricted isometry property, RIP) 的概念. 令 k 是一个正整数且满足 $1 \leq k \leq N$, 定义矩阵 A 的 k 阶 RIP 常数 $\delta_k \in (0, 1)$ 是对所有 k - 稀疏矢量 $x \in \mathbb{R}^N$, 使得

$$(1 - \delta_k)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|x\|_2^2$$

成立的最小非负数. 现在基于 RIP 框架的稀疏恢复问题已经得到很好的研究, 例如, Candès^[7] 给出条件 $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$; Foucart 和 Lai^[8] 提升条件至 $\delta_{2k} < 0.4531$; Cai 等^[9] 给出特殊情形 (k 很大或 k 是 4 的倍数) 时, 有 RIP 条件 $\delta_{2k} < 0.4721$; Mo 和 Li^[10] 证得, 若测量矩阵满足 $\delta_{2k} < 0.4931$, $k \in \mathbb{N}^*$, 则经 l_1 最小化能保证无噪情形下稀疏信号的准确恢复; Cai 和 Zhang^[11] 将条件进一步改进到目前最优的结果 $\delta_{2k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

压缩感知中标准稀疏模型^[7-12] 一般假设信号至多只有 k 个非零元且能出现在向量中任意位置. 文献 [7-12] 中所提出的针对标准稀疏模型的压缩感知重构算法理论对于一些具有特殊结构特点的稀疏信号重构概率较低. 文献 [13-16] 考虑了一种特殊的稀疏信号—块稀疏信号 (block-sparse signal), 即信号的非零元表现为成块出现且主要集中在少数几个子块内. 实际生活中块稀疏信号的形式很多, 如多波段信号^[17] (multi-band signal)、DNA 阵列^[18] (DNA microarray)、雷达脉冲信号^[19] (radar pulse signal) 和多测量向量 (multiple measurement vector, MMV) 问题^[20] 等, 因此具有重要的现实意义. 本文考虑从 M 次线性测量 $y = Ax + z$ 中重构块稀疏信号 $x \in \mathbb{R}^N$, 信号 x 按分块指标集 $\mathcal{T} = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ 分块, $N = \sum_{i=1}^p d_i$, $x[i]$ 为信号 x 的第 i 个子块, 长度为 d_i ,

$$x^T = \underbrace{[x_1, \dots, x_{d_1}]}_{x^T[1]}, \underbrace{[x_{d_1+1}, \dots, x_{d_1+d_2}]}_{x^T[2]}, \dots, \underbrace{[x_{N-d_p+1}, \dots, x_N]}_{x^T[p]}.$$

为恢复块稀疏信号, 一般考虑利用混合 l_2/l_1 最小化模型, 此模型在文献 [14] 中首次被提出:

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad y - Ax \in \mathcal{B}, \quad (1.1)$$

其中

$$\|x\|_{2,1} = \sum_{i=1}^p \|x[i]\|_2$$

表示矢量 x 的混合 l_2/l_1 范数, 此模型可被看成是一个二阶锥规划 (second-order cone programming, SOCP) 问题且有一些常用的软件包能有效地解决此问题. 最近在非凸 CS 领域中的一些研究表明, 用非凸 l_q ($0 < q \leq 1$) 拟范数代替凸 l_1 范数能减少成功恢复一般稀疏信号所需的线性测量数 (参见文献 [8]), 这促使我们将非凸 CS 推广至块稀疏领域, 从而得到如下非凸优化模型:

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x\|_{2,q} \quad \text{s.t.} \quad y - Ax \in \mathcal{B}, \quad (1.2)$$

其中

$$\|x\|_{2,q} = \left(\sum_{i=1}^p \|x[i]\|_2^q \right)^{1/q}, \quad 0 < q \leq 1.$$

我们将说明此非凸恢复方法与混合 l_2/l_1 最小化相比, 在理论上有更好的块稀疏恢复表现.

首先给出块 - 限制等距性质 (block-restricted isometry property, b-RIP) 定义, 我们可将其看作标准 RIP 在块稀疏领域下的自然推广.

定义 1.1 (b-RIP^[14]) 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$), 按分块指标集 $\mathcal{T}$ 分块, 若存在一个常数 $\delta_{k|\mathcal{T}} \in (0, 1)$, 使得对任意按分块指标集 $\mathcal{T}$ 分块的 k -块稀疏矢量 $x \in \mathbb{R}^N$ 有

$$(1 - \delta_{k|\mathcal{T}})\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_{k|\mathcal{T}})\|x\|_2^2, \quad (1.3)$$

则称矩阵 A 以参数 $\delta_{k|\mathcal{T}}$ 满足 b-RIP, b-RIP 常数 $\delta_{k|\mathcal{T}}$ 定义为对所有 k -块稀疏矢量 $x \in \mathbb{R}^N$, 使得 (1.3) 成立的最小非负数.

注 1.1 为方便起见, 下文均以 δ_k 代替 $\delta_{k|\mathcal{T}}$. 事实上, b-RIP 比标准 RIP 要求更宽松, Gauss 矩阵、子 Gauss 矩阵等随机矩阵均以高概率满足 b-RIP. 一般来说, 概率比满足标准 RIP 概率更高 (参见文献 [14]), 同时, 满足 b-RIP 所需的测量数也更少 (参见文献 [13]). 提升 b-RIP 条件有几个好处: 首先, 在压缩感知中, 更多测量矩阵被允许使用; 其次, 对同一测量矩阵, 待恢复的块稀疏信号被允许有更多的非零元; 最后, 当有噪声时提供了更好的误差估计.

本文以非凸压缩感知为基础, 对混合 l_2/l_q 最小化问题进行研究, 从理论的角度建立其在无噪声条件下准确重构块稀疏信号的充分条件; 而对一般块结构信号, 给出其在有噪声条件下鲁棒重构的严格的数学刻画, 其中最关键的是将文献 [21] 中的一个重要引理 (多面体稀疏表示引理) 推广至块稀疏领域, 对应得到多面体块稀疏表示引理. 同时证得, 若测量矩阵满足 $\delta_{2k} < \frac{\eta}{2-q-\eta}$, 其中 η 是满足等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$ 的唯一正解, 则经混合 l_2/l_q 最小化能保证块稀疏信号的准确恢复. 同时, 通过一个例子表明此 b-RIP 条件不仅充分, 而且具有紧性.

本文余下内容结构如下: 第 2 节介绍一些重要的符号、概念和引理. 关于块稀疏信号重构的主要结果及相应证明在第 3 节中给出. 第 4 节对全文进行总结.

2 符号说明和关键引理

除另有说明外, 我们采用以下符号: 对任意矢量 $x \in \mathbb{R}^N$, 将其按分块指标集 $\mathcal{T} = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ 进行分块, 对应地, $x[i]$ 代表 x 分块后的第 i 块, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. 定义混合范数

$$\|x\|_{2,0} = \sum_{i=1}^p \mathbf{I}(\|x[i]\|_2 > 0),$$

其中 $\mathbf{I}$ 为示性函数, 即当 $x > 0$ 时, $\mathbf{I}(x) = 1$, 否则, $\mathbf{I}(x) = 0$. 同时 $\|x\|_{\infty, \mathcal{T}} = \max_i \|x[i]\|_2$. $T \subset \{1, 2, \dots, p\}$ 代表块指标集, 用 T^C 表示集合 T 的补集, $|T|$ 表示集合 T 的基数. 此外, 令 $\text{supp}[x] = \{i : \|x[i]\|_2 \neq 0\}$ 为矢量 x 的块支撑, 令 $x[\max(k)]$ 为仅保留 x 中 l_2 范数最大的 k 块、其他块取 0 的矢量. 若假设矢量 $x \in \mathbb{R}^N$ 按同一分块指标集 $\mathcal{T}$ 分块, 令

$$\sum_k^N := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_{2,0} \leq k\},$$

同时, 用 x_k 表示矢量 $x \in \mathbb{R}^N$ 的最佳 k -块稀疏近似, 具体地, x_k 可定义为

$$x_k := \arg \min_{v \in \sum_k^N} \|x - v\|_{2,1}.$$

对测量矩阵 A , 它的谱范数 $\sigma(A)$ 定义如下:

$$\sigma(A) := \sqrt{\max_j \lambda_j(A^T A)},$$

其中 $\lambda_j(A^T A)$ 表示矩阵 $A^T A$ 的第 j 个特征值.

引理 2.1 (多面体块稀疏表示^[16]) 令 $\mathcal{T}$ 是一个分块指标集, 对正数 α 和正整数 k , 定义凸包 $T(\alpha, k) \subset \mathbb{R}^N$ 为

$$T(\alpha, k) = \{v \in \mathbb{R}^N : \|v\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \alpha, \|v\|_{2,1} \leq k\alpha\}.$$

对任意 $v \in \mathbb{R}^N$, 定义稀疏矢量集 $U(\alpha, k, v) \subset \mathbb{R}^N$ 为

$$U(\alpha, k, v) = \{u \in \mathbb{R}^N : \text{supp}(u) \subseteq \text{supp}(v), \|u\|_{2,0} \leq k, \|u\|_{2,1} = \|v\|_{2,1}, \|u\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \alpha\},$$

则 $v \in T(\alpha, k)$ 当且仅当 v 在 $U(\alpha, k, v)$ 的凸包内. 特别地, 任意 $v \in T(\alpha, k)$ 能被表示为

$$v = \sum_i \lambda_i u_i,$$

此处 $u_i \in U(\alpha, k, v)$ 且 $0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_i \lambda_i = 1$.

基于引理 2.1 和文献 [2, 引理 2.2], 我们给出如下引理, 它在后面定理 3.2 的证明过程中起到了关键性作用.

引理 2.2 令 $\mathcal{T}$ 是一个分块指标集且 $|\mathcal{T}| = p$, 矢量 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足 $|\text{supp}[x]| = n$, 此处支撑为 x 按 $\mathcal{T}$ 分块的块支撑. 若存在正整数 $k \leq n$ 和正数 α , 使得 $\|x\|_{2,q}^q \leq k\alpha^q$ 且 $\|x\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \alpha$, 其中 $0 < q \leq 1$, 则 x 能被表示成 k -块稀疏矢量的凸组合形式

$$x = \sum_i \lambda_i u_i,$$

此处 $0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_i \lambda_i = 1, \|u_i\|_{2,0} \leq k$ 且

$$\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \leq \min \left\{ \frac{n}{k} \|x\|_2^2, \alpha^q \|x\|_{2,2-q}^{2-q} \right\}.$$

证明 为方便起见, 令 $x = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij}$, 此处 $e_{ij} \in \mathbb{R}^N$ 为指标向量, 其在划分 $\mathcal{T}$ 下第 i 块第 j 项元素为 1 或 -1 , 其他位置上元素为 0, d_i 代表每块长度. 显然, $N = d_1 + d_2 + \cdots + d_p$, 令

$$x_i = (0, \dots, 0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id_i}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

假设 $\|x_1\|_2 \geq \|x_2\|_2 \geq \cdots \geq \|x_n\|_2 > 0$. 若 $n = k$, 令 $u_1 = x, \lambda_1 = 1$, 则有

$$\|u_1\|_2^2 = \|x\|_2^2 \leq \alpha^q \|x\|_{2,2-q}^{2-q}.$$

现证明对 $n > k$, 结论仍成立. 令 $\|x_0\|_2 = \alpha$, 取 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 此处 $a_i = \|x_i\|_2^{q-1}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 则有 $\sum_{i=1}^n a_i \|x_i\|_2 \leq k\alpha^q$ 且

$$\alpha^q = a_0 \|x_0\|_2 \geq a_1 \|x_1\|_2 \geq \cdots \geq a_n \|x_n\|_2.$$

证明主要分为 3 步.

第 1 步 首先将矢量 $x \in \mathbb{R}^N$ 划分为 l -块稀疏矢量的凸组合形式. 定义集合

$$1 \in \mathbf{D} \triangleq \left\{ 1 \leq r \leq n-1 : \sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2 \leq (n-r) a_{r-1} \|x_{r-1}\|_2 \right\}.$$

显然 $\mathbf{D}$ 非空, 令 $r = \max \mathbf{D}$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2 &\leq (n-r)a_{r-1} \|x_{r-1}\|_2, \\ \sum_{i=r+1}^n a_i \|x_i\|_2 &> (n-r-1)a_r \|x_r\|_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

因此,

$$(n-r)a_r \|x_r\|_2 \leq \sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2 \leq (n-r)a_{r-1} \|x_{r-1}\|_2.$$

现定义

$$\begin{aligned} y_\omega &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r} \sum_{i=r, i \neq \omega}^n \sum_{j=1}^{d_i} \frac{x_{ij}}{a_i \|x_i\|_2} e_{ij} \in \mathbb{R}^N, \\ \xi_\omega &= 1 - \frac{n-r}{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2} a_\omega \|x_\omega\|_2 > 0, \quad r \leq \omega \leq n. \end{aligned}$$

然后有 $0 \leq \xi_\omega \leq 1$, $\sum_{\omega=r}^n \xi_\omega = 1$ 且 $\sum_{\omega=r}^n \xi_\omega y_\omega = x$, 此处 y_ω ($\omega = r, r+1, \dots, n$) 是 $(n-1)$ -块稀疏向量, 并且

$$\frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r} \sum_{\omega=r}^n \xi_\omega \sum_{t=r, t \neq \omega}^n a_t^{-2} = \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r} \left(\sum_{t=r}^n a_t^{-2} - \sum_{\omega=r}^n \xi_\omega a_\omega^{-2} \right) = \sum_{\omega=r}^n \frac{\|x_\omega\|_2}{a_\omega}. \quad (2.2)$$

假设 $y_\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} y_{\omega,ij} e_{ij}$, 令 $y_{\omega,i} = (0, \dots, 0, y_{\omega,i1}, y_{\omega,i2}, \dots, y_{\omega,id_i}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$, $\forall 1 \leq i \leq n$, 同时取 $\|y_{\omega,0}\|_2 = \alpha$, 则根据 y_ω 的构造形式, 很容易得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \|y_{\omega,i}\|_2 &= \sum_{i=1}^{r-1} a_i \|x_i\|_2 + \sum_{i=r, i \neq \omega}^n a_i \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{a_i(n-r)} \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} a_i \|x_i\|_2 + \sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \|x_i\|_2 \leq k\alpha^q. \end{aligned}$$

又显然, 当 $1 \leq i \leq r-1$ 时, $y_{\omega,i} = x_i$, 则有

$$\|y_{\omega,i}\|_2 = \|x_i\|_2 \geq \|x_{i+1}\|_2 = \|y_{\omega,i+1}\|_2, \quad \forall 1 \leq i < i+1 \leq r-1;$$

同时, 当 $r \leq i \leq n$, $i \neq \omega$ 时, $y_{\omega,i} = \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{(n-r)a_i \|x_i\|_2} x_i$, 因此, 由 (2.1) 第一个不等式, 有

$$\|y_{\omega,r-1}\|_2 = \|x_{r-1}\|_2 \geq \|x_{r-1}\|_2^q \|x_r\|_2^{1-q} \geq \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{(n-r)a_r} = \|y_{\omega,r}\|_2,$$

并且, $\forall r \leq i < i+1 \leq n$ 且 $i, i+1 \neq \omega$,

$$\|y_{\omega,i}\|_2 = \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r} \|x_i\|_2^{1-q} \geq \frac{\sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r} \|x_{i+1}\|_2^{1-q} = \|y_{\omega,i+1}\|_2.$$

综上所述, 可有

$$\alpha = \|y_{\omega,0}\|_2 \geq \|y_{\omega,1}\|_2 \geq \|y_{\omega,2}\|_2 \geq \cdots \geq \|y_{\omega,n}\|_2.$$

注意, 此处 $y_{\omega,\omega} = 0$, 在前面不等式中, 我们忽略此项.

然后用 y_{ω} 代替 x , 将 n 变为 $n-1$, 继续上面过程, 最后能得到 l -块稀疏矢量 ($l \geq k+1$) 有形式

$$v = \sum_{i=1}^{r'-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \frac{\sum_{i=r'}^n a_i \|x_i\|_2}{n-r'+1} \sum_{i \in \mathbf{Q}} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{x_{ij}}{a_i \|x_i\|_2} e_{ij} \in \mathbb{R}^N,$$

此处 $r' \in \{1, \dots, l\}$ 和 $\mathbf{Q} \subset \{r', r'+1, \dots, n\}$ ($|\mathbf{Q}| = l+1-r'$) 在过程中被决定.

第 2 步 将 l -块稀疏矢量分解为 $(l-1)$ -块稀疏矢量的凸组合形式. 定义集合

$$\mathbf{1} \in \mathbf{S} \triangleq \left\{ 1 \leq r \leq l-1 : \sum_{i=r}^n a_i \|x_i\|_2 \leq (l-r)a_{r-1} \|x_{r-1}\|_2 \right\}.$$

显然 $\mathbf{S}$ 非空, 令 $r_0 = \max \mathbf{S} \leq r'$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=r_0+1}^n a_i \|x_i\|_2 &> (l-r_0-1)a_{r_0} \|x_{r_0}\|_2, \\ \sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2 &\leq (l-r_0)a_{r_0-1} \|x_{r_0-1}\|_2, \end{aligned}$$

因此,

$$(l-r_0)a_{r_0} \|x_{r_0}\|_2 \leq \sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2 \leq (l-r_0)a_{r_0-1} \|x_{r_0-1}\|_2.$$

令 $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \cup \{r_0, \dots, r'-1\}$ 且

$$\begin{aligned} u_t &\triangleq \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{l-r_0} \sum_{i \in \mathbf{P}, i \neq t} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{x_{ij}}{a_i \|x_i\|_2} e_{ij} \in \mathbb{R}^N, \\ \lambda_t &\triangleq \begin{cases} 1 - \frac{l-r_0}{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2} \cdot a_t \|x_t\|_2, & t \in \{r_0, \dots, r'-1\}, \\ 1 - \frac{l-r_0}{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2} \cdot \frac{\sum_{i=r'}^n a_i \|x_i\|_2}{l+1-r'}, & t \in \mathbf{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

此处 $t \in \mathbf{P}$, 则对 $\lambda_t > 0$, 有

$$\sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t = \sum_{t \in \mathbf{Q}} \lambda_t + \sum_{t=r_0}^{r'-1} \lambda_t = l+1-r_0 - \frac{l-r_0}{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2} \sum_{t=r_0}^n a_t \|x_t\|_2 = 1,$$

且

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t u_t &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \sum_{i=r_0}^{r'-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \frac{\sum_{i=r'}^n a_i \|x_i\|_2}{l+1-r'} \sum_{t \in \mathbf{Q}} \sum_{j=1}^{d_t} \frac{x_{tj}}{a_t \|x_t\|_2} e_{tj} \\ &= \sum_{i=1}^{r'-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij} + \frac{\sum_{i=r'}^n a_i \|x_i\|_2}{l+1-r'} \sum_{t \in \mathbf{Q}} \sum_{j=1}^{d_t} \frac{x_{tj}}{a_t \|x_t\|_2} e_{tj} = v, \end{aligned}$$

因此有等式

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{l-r_0} \sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t \sum_{s \in \mathbf{P}, s \neq t} a_s^{-2} &= \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{l-r_0} \left(\sum_{t \in \mathbf{P}} a_t^{-2} - \sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t a_t^{-2} \right) \\ &= \sum_{t=r_0}^{r'-1} \frac{\|x_i\|_2}{a_t} + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{l+1-r'} \sum_{t \in \mathbf{Q}} a_t^{-2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

当 $l = n-1, n-2, \dots, k+1$ 时, 上述等式总是成立的. 现取 $l = k+1$, 此时 r' 和 r_0 与集合 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 被重新定义.

同时, 估计 $\sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t \|u_t\|_2^2$ 如下:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t \|u_t\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij}^2 + \left(\frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \right)^2 \sum_{i \in \mathbf{P}} a_i^{-2} - \left(\frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \right)^2 \sum_{t \in \mathbf{P}} \lambda_t a_t^{-2} \\ &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij}^2 + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \sum_{i=r_0}^{r'-1} \frac{\|x_i\|_2}{a_i} + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \frac{\sum_{i=r'}^n a_i \|x_i\|_2}{k+2-r'} \sum_{t \in \mathbf{Q}} a_t^{-2}. \end{aligned}$$

综上可知, 我们能将 x 表示为 k -块稀疏矢量的凸组合形式 $x = \sum_i \lambda_i u_i$, 同时 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$ 且 $\|u_i\|_{2,0} \leq k$.

第 3 步 估计 $\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2$. 对任意 $l = k+2, \dots, n-1$, 利用等式 (2.2) 和 (2.3), 可有

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij}^2 + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \sum_{i=r_0}^{r'-1} \frac{\|x_i\|_2}{a_i} + \frac{\sum_{i=r_0}^n a_i \|x_i\|_2}{k+1-r_0} \sum_{t=r'}^n \frac{\|x_t\|_2}{a_t} \\ &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij}^2 + \frac{\sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^q}{k+1-r_0} \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^{2-q}. \end{aligned}$$

因 $\sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^2 \leq \|x_{r_0-1}\|_2^{2-q} \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^q \leq \|x_{r_0-1}\|_2^{2-q} (k+1-r_0) \|x_{r_0-1}\|_2^q = (k+1-r_0) \|x_{r_0-1}\|_2^2$ 且 $(r_0-1) \|x_{r_0-1}\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{r_0-1} \|x_i\|_2^2$, 故由基本范数不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^{r_0-1} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij}^2 + \frac{n-r_0+1}{k+1-r_0} \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r_0-1} \|x_i\|_2^2 + \left[\frac{n}{k} + \frac{(n-k)(r_0-1)}{k(k+1-r_0)} \right] \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{r_0-1} \|x_i\|_2^2 + \frac{n}{k} \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^2 + \frac{(n-k)(r_0-1)}{k} \|x_{r_0-1}\|_2^2 \\ &\leq \frac{n}{k} \sum_{i=1}^n \|x_i\|_2^2, \end{aligned}$$

且

$$\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{r_0-1} \|x_i\|_2^2 + \|x_{r_0-1}\|_2^q \sum_{i=r_0}^n \|x_i\|_2^{2-q} \leq \alpha^q \sum_{i=1}^n \|x_i\|_2^{2-q} = \alpha^q \|x\|_{2,2-q}^{2-q}.$$

综上, 引理 2.2 得证. $\square$

3 主要结论

基于对混合 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 范数下零空间性质的基本观察, 我们发现, 当 q 取值不同时, 保证经混合 l_2/l_q 最小化准确重构块稀疏信号的条件之间存在一定的联系. 下面给出具体的描述.

定理 3.1 将信号 x 按分块指标集 $\mathcal{T}$ 进行分块, 对 $0 < q_2 < q_1 \leq 1$, 保证经混合 l_2/l_{q_1} 最小化准确恢复 k -块稀疏信号的充分条件同样能保证经混合 l_2/l_{q_2} 最小化准确恢复 k -块稀疏信号.

证明 假设存在某个条件能保证利用混合 l_2/l_{q_1} 最小化准确恢复 k -块稀疏信号, 这等价于

$$\|h_T\|_{2,q_1}^{q_1} < \|h_{T^c}\|_{2,q_1}^{q_1}, \quad \forall h \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\},$$

其中 h_T 表示仅保留 h 中 l_2 范数最大的 k 块、其他块取 0 的矢量. 在不考虑一般损失情形下, 假设 $\|h[1]\|_2 \geq \|h[2]\|_2 \geq \dots \geq \|h[l]\|_2 > 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^k \|h[i]\|_2^{q_1} < \sum_{i=k+1}^l \|h[i]\|_2^{q_1}.$$

上式两边同除以 $\|h[k]\|_2^{q_1}$, 对所有 $0 < q_2 < q_1 \leq 1$, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} \geq 1 &\Rightarrow \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} \geq \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2}, \quad \forall 1 \leq i \leq k, \\ \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} \leq 1 &\Rightarrow \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} \leq \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2}, \quad \forall k+1 \leq i \leq l. \end{aligned}$$

综上有

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2} \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} < \sum_{i=k+1}^l \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_1} \leq \sum_{i=k+1}^l \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2}.$$

故得到

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2} < \sum_{i=k+1}^l \left(\frac{\|h[i]\|_2}{\|h[k]\|_2} \right)^{q_2} \Rightarrow \|h_T\|_{2,q_2}^{q_2} < \|h_{T^c}\|_{2,q_2}^{q_2}, \quad \forall h \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\},$$

即满足 l_2/l_{q_2} -零空间性质, 这表示经混合 l_2/l_{q_2} 最小化能保证块稀疏信号的准确恢复, 定理 3.1 得证. $\square$

特别地, 当取 $q_1 = 1$ 时, 我们能得到任意保证经混合 l_2/l_1 最小化准确恢复块稀疏信号的条件均能保证经混合 l_2/l_q ($0 < q < 1$) 最小化准确恢复块稀疏信号.

受到 Zhang 和 Li^[21] 提出的基于 l_q ($0 < q \leq 1$) 最小化重构稀疏信号的启发, 下面给出基于混合 l_2/l_q 最小化方法重构块稀疏信号的恢复条件, 并进一步给出其在无噪声时准确恢复和有噪声时稳定恢复的紧性分析.

定理 3.2 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 和分块指标集 $\mathcal{T}$, 令 $x \in \mathbb{R}^N$ 是按 $\mathcal{T}$ 分块的待恢复信号. 考虑信号恢复模型 (1.2), 若 $\|z\|_2 \leq \rho$, 假设 $\hat{x}^{l_2}$ 是噪声设置 $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{z : \|z\|_2 \leq \varepsilon\}$ 下 (1.2) 的最小化解, 其中 $\varepsilon \geq \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2$, $\sigma(A)$ 代表 A 的谱范数. 若测量矩阵 A 满足 $2k$ 阶 b-RIP 且

$$\delta_{2k} < \frac{\eta}{2 - q - \eta} =: \delta(q),$$

其中 $\eta \in (1-q, 1-\frac{q}{2})$ 为等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$ 的唯一正解, 则 (1.2) 的最小化解 $\hat{x}^{l_2}$ 满足

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{l_2} - x\|_2 &\leq \frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2(1+\delta_{2k})} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})(\varepsilon+\rho)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} \\ &\quad + \left[\frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2(1+\delta_{2k})} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})\sigma(A)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} + 1 \right] \\ &\quad \times \|x - x_k\|_2. \end{aligned}$$

若 $\|A^T z\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \rho$, 假设 $\hat{x}^{DS}$ 是噪声设置 $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{z : \|A^T z\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \varepsilon\}$ 下 (1.2) 的最小化解, 其中 $\varepsilon \geq \rho + \sigma^2(A)\|x - x_k\|_2$, 在相同的 b-RIP 条件下, (1.2) 的最小化解 $\hat{x}^{DS}$ 满足

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{DS} - x\|_2 &\leq \frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2k} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})(\varepsilon+\rho)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} \\ &\quad + \left[\frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2k} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})\sigma^2(A)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} + 1 \right] \\ &\quad \times \|x - x_k\|_2. \end{aligned}$$

证明 首先考虑 $f(\eta) = \frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2}$, $\eta \in (0, 1)$, 因其一阶导数 $f'(\eta) = \eta^{\frac{2}{q}-1} + 1 > 0$, 故函数 $f(\eta)$ 是单调递增的, 同时, $f(1-q) = \frac{q}{2}(1-q)^{\frac{2}{q}} - \frac{q}{2} < 0$ 且 $f(1-\frac{q}{2}) = \frac{q}{2}(1-\frac{q}{2})^{\frac{2}{q}} > 0$, 所以, 方程在 $(1-q, 1-\frac{q}{2})$ 上有唯一正解, 为简化记号, 这里用 η 来表示, 其可以是有理数也可以是无理数.

下面针对两类不同噪声情形进行具体分析.

类型一 噪声情形 $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{z : \|z\|_2 \leq \varepsilon\}$. 假设 x 是一个近似 k -块稀疏信号, x_k 为信号 x 的最佳 k -块稀疏近似, $I = \text{supp}[x_k]$. 令 $z' = A(x - x_k) + z$, 则对应地有 $y = Ax_k + z'$. 同时

$$\|y - Ax_k\|_2 \leq \|y - Ax\|_2 + \|Ax - Ax_k\|_2 \leq \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2.$$

结合条件 $\varepsilon \geq \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2$, 那么有 $\|y - Ax_k\|_2 \leq \varepsilon$, 即 $y - Ax_k \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. 令 $\hat{x}^{l_2}$ 为 (1.2) 的最小化解, 取 $h = \hat{x}^{l_2} - x_k$, 则有

$$\|x_k\|_{2,q}^q \geq \|x_k + h\|_{2,q}^q = \|x_k + h_I\|_{2,q}^q + \|h_{I^c}\|_{2,q}^q \geq \|x_k\|_{2,q}^q - \|h_I\|_{2,q}^q + \|h_{I^c}\|_{2,q}^q,$$

因此, $\|h_{I^c}\|_{2,q}^q \leq \|h_I\|_{2,q}^q$. 若取 h_T 为仅保留 h 中 l_2 范数最大的 k 块、其他块为 0 的矢量, 自然地,

$$\|h_{T^c}\|_{2,q}^q \leq \|h_{I^c}\|_{2,q}^q \leq \|h_I\|_{2,q}^q \leq \|h_T\|_{2,q}^q.$$

又由

$$\begin{aligned} \|Ah\|_2 &= \|A\hat{x}^{l_2} - Ax_k\|_2 \leq \|y - A\hat{x}^{l_2}\|_2 + \|y - Ax\|_2 + \|Ax - Ax_k\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

可得

$$\langle Ah_T, Ah \rangle \leq \|Ah_T\|_2 \|Ah\|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_{2k}} \|h_T\|_2 (\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2). \quad (3.2)$$

假设 $|\text{supp}[h_{T^c}]| = n$, 取 $\alpha^q = \|h_T\|_{2,q}^q/k$, 则有 $\|h_{T^c}\|_{2,q}^q \leq \|h_T\|_{2,q}^q = k\alpha^q$ 且 $\|h_{T^c}\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \alpha$. 由引理 2.2 可知, 存在正系数 λ_i 和 k -块稀疏矢量 u_i , 使得 $h_{T^c} = \sum_i \lambda_i u_i$, 其中 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$. 同时

$$\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \leq \min \left\{ \frac{n}{k} \|x\|_2^2, \alpha^q \|x\|_{2,2-q}^{2-q} \right\}.$$

又由 α 的定义知,

$$\|h_T\|_2^2 = \|h_T\|_{2,2}^2 \geq k^{1-\frac{2}{q}} \|h_T\|_{2,q}^2 = k^{1-\frac{2}{q}} (k\alpha^q)^{\frac{2}{q}} = k\alpha^2. \quad (3.3)$$

对任意 $\mu > 0$, 令 $\eta_j = h_T + \mu u_j$, 则有 $\eta_i - \eta_j = \mu(u_i - u_j)$ 且

$$\sum_j \lambda_j \eta_j - \frac{q}{2} \eta_i = \mu h + \left(1 - \mu - \frac{q}{2}\right) h_T - \frac{q}{2} \mu u_i,$$

很容易有如下等式:

$$\sum_i \lambda_i \left\| A \left(\sum_j \lambda_j \eta_j - \frac{q}{2} \eta_i \right) \right\|_2^2 + \frac{1-q}{2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \|A(\eta_i - \eta_j)\|_2^2 = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \sum_i \lambda_i \|A\eta_i\|_2^2. \quad (3.4)$$

现令 $\mu = \eta$, 其中 $\eta \in (1-q, 1-\frac{q}{2})$, $\delta_{2k} = \delta_{2k|\tau} \in (0, 1)$. 取 (3.4) 左式和右式的差, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \left\| A \left(\sum_j \lambda_j \eta_j - \frac{q}{2} \eta_i \right) \right\|_2^2 + \frac{1-q}{2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \|A(\eta_i - \eta_j)\|_2^2 - \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \sum_i \lambda_i \|A\eta_i\|_2^2 \\ &= \sum_i \lambda_i \left\| A \left[\left(1 - \mu - \frac{q}{2}\right) h_T - \frac{q}{2} \mu u_i \right] \right\|_2^2 + 2 \left\langle A \left[\left(1 - \mu - \frac{q}{2}\right) h_T - \frac{q}{2} \mu h_{TC} \right], \mu A h \right\rangle \\ &\quad + \mu^2 \|A h\|_2^2 + \frac{1-q}{2} \sum_{i,j} \mu^2 \lambda_i \lambda_j \|A(u_i - u_j)\|_2^2 - \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \sum_i \lambda_i \|A(h_T + \mu u_i)\|_2^2 \\ &= \sum_i \lambda_i \left\| A \left[\left(1 - \mu - \frac{q}{2}\right) h_T - \frac{q}{2} \mu u_i \right] \right\|_2^2 + (2-q)\mu(1-\mu) \langle A h_T, A h \rangle + (1-q)\mu^2 \|A h\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1-q}{2} \sum_{i,j} \mu^2 \lambda_i \lambda_j \|A(u_i - u_j)\|_2^2 - \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \sum_i \lambda_i \|A(h_T + \mu u_i)\|_2^2. \end{aligned}$$

因 $u_i - u_j$ 、 $(1 - \mu - \frac{q}{2})h_T - \frac{q}{2}\mu u_i$ 和 $h_T + \mu u_i$ 均是 $2k$ -块稀疏矢量, 应用矩阵 A 的 $2k$ 阶块-限制等距条件和不等式 (3.1) 和 (3.2), 可有

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 + \delta_{2k}) \left[\sum_i \lambda_i \left\| \left(1 - \mu - \frac{q}{2}\right) h_T - \frac{q}{2} \mu u_i \right\|_2^2 + \frac{1-q}{2} \sum_{i,j} \mu^2 \lambda_i \lambda_j \|u_i - u_j\|_2^2 \right] \\ &\quad + (1-q)\mu^2 \|A h\|_2^2 + (2-q)\mu(1-\mu) \langle A h_T, A h \rangle - (1 - \delta_{2k}) \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \sum_i \lambda_i \|h_T + \mu u_i\|_2^2 \\ &\leq \left[(1 + \delta_{2k}) \left(1 - \eta - \frac{q}{2}\right)^2 - (1 - \delta_{2k}) \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \right] \|h_T\|_2^2 + \left[2 \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \right] \sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \\ &\quad - (1-q)\eta^2 (1 + \delta_{2k}) \|h_{TC}\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta) \sqrt{1 + \delta_{2k}} \|h_T\|_2 (\varepsilon + \rho + \sigma(A) \|x - x_k\|_2) \\ &\quad + (1-q)\eta^2 (\varepsilon + \rho + \sigma(A) \|x - x_k\|_2)^2. \end{aligned}$$

现利用引理 2.2 来分析上述不等式, 以保证不等式关于 $\|h_T\|_2$ 的解有上界. 依据 $\|h_{TC}\|_2^2$ 取值范围的不同主要分为以下两个部分.

情形 1 当 $\|h_{TC}\|_2^2 \leq (\frac{k}{n})^{\frac{2}{q}-1} k\alpha^2$ 时, 利用估计 $\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \leq \frac{n}{k} \|h_{TC}\|_2^2$, 结合不等式 (3.3), 可得到

$$0 \leq \left[(1 + \delta_{2k}) \left(1 - \eta - \frac{q}{2}\right)^2 - (1 - \delta_{2k}) \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \right] \|h_T\|_2^2 + \left[2 \left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \frac{n}{k} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k}) \Big] \|h_{TC}\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta)\sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2) \\
& + (1-q)\eta^2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2)^2 \\
\leq & \left[(1+\delta_{2k})\left(1-\eta-\frac{q}{2}\right)^2 - (1-\delta_{2k})\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \right] \|h_T\|_2^2 + \left[2\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \frac{n}{k} \right. \\
& \left. - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k}) \right] \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-1} \|h_T\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta)\sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2) \\
& + (1-q)\eta^2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2)^2. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

现将上式右边部分的第二项系数看作关于 $\frac{k}{n}$ 的函数, 令

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \left[2\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \frac{n}{k} - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k}) \right] \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-1},$$

对该函数求关于 $\frac{k}{n}$ 的一阶导数, 并令其为 0, 可有

$$f'\left(\frac{k}{n}\right) = 2\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{q}-2\right) \eta^2 \delta_{2k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-3} - (1-q)\left(\frac{2}{q}-1\right) \eta^2(1+\delta_{2k}) \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-2} = 0.$$

通过基本的计算, 可求得 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 的最大值在 $\frac{k}{n} = \frac{(2-q)\delta_{2k}}{1+\delta_{2k}}$ ($q \neq 1$) 取得, 此时

$$2\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \frac{n}{k} - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k}) \geq 0,$$

然后有

$$\begin{aligned}
0 \leq & \left[(1+\delta_{2k})\left(1-\eta-\frac{q}{2}\right)^2 - (1-\delta_{2k})\left(1-\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q}{2}(2-q)\delta_{2k}\eta^{\frac{2}{q}} \right] \|h_T\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta) \\
& \times \sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2) + (1-q)\eta^2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2)^2 \\
= & (2-q-\eta)[(2-q-\eta)\delta_{2k}-\eta]\|h_T\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta)\sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2 \\
& \times (\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2) + (1-q)\eta^2(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2)^2.
\end{aligned}$$

因此, 当 $\delta_{2k} < \delta(q)$ 时, 其中 $\delta(q) = \frac{\eta}{2-q-\eta}$, η 是满足等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$ 的唯一正解, 关于 $\|h_T\|_2$ 的解有上界

$$\|h_T\|_2 \leq \frac{(2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{1+\delta_{2k}} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})}}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})}(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2).$$

又因 $\|h_{TC}\|_{2,q}^q \leq \|h_T\|_{2,q}^q$, 显然有 $\|h_{TC}\|_2^2 \leq \|h_T\|_2^2$, 因此,

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}^{l_2} - x_k\|_2 & = \|h\|_2 \leq \sqrt{\|h_T\|_2^2 + \|h_{TC}\|_2^2} \leq \sqrt{2}\|h_T\|_2 \\
& \leq \frac{(2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2(1+\delta_{2k})} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})}}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})}(\varepsilon + \rho + \sigma(A)\|x - x_k\|_2),
\end{aligned}$$

最后可得

$$\|\hat{x}^{l_2} - x\|_2 \leq \|\hat{x}^{l_2} - x_k\|_2 + \|x - x_k\|_2$$

$$\leq \frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2(1+\delta_{2k})} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})(\varepsilon+\rho)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} + \left[\frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2(1+\delta_{2k})} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q)-\delta_{2k})})\sigma(A)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q)-\delta_{2k})} + 1 \right] \|x - x_k\|_2,$$

这里 η 满足等式

$$\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0.$$

情形 2 当 $\|h_{TC}\|_2^2 > (\frac{k}{n})^{\frac{2}{q}-1}k\alpha^2$ 时, 结合引理 2.2 所给估计 $\sum_i \lambda_i \|u_i\|_2^2 \leq \alpha^q \|h_{TC}\|_{2,2-q}^{2-q}$, 可得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[(1+\delta_{2k}) \left(1-\eta-\frac{q}{2}\right)^2 - (1-\delta_{2k}) \left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \right] \|h_T\|_2^2 + \left[2 \left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \right] \alpha^q \|h_{TC}\|_{2,2-q}^{2-q} \\ &\quad - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k})\|h_{TC}\|_2^2 + (2-q)\eta(1-\eta)\sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2(\varepsilon+\rho+\sigma(A)\|x-x_k\|_2) \\ &\quad + (1-q)\eta^2(\varepsilon+\rho+\sigma(A)\|x-x_k\|_2)^2 \\ &=: g(h_{TC}). \end{aligned}$$

此时, h_{TC} 的范数由上下界一起控制. 函数 $g(h_{TC})$ 定义在 S_1 和 S_2 的公共区域内, 其中

$$S_1 = \left\{ x : \|x\|_2^2 > \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-1} k\alpha^2 \right\}, \quad S_2 = \{ x : \|x\|_{2,q}^q \leq k\alpha^q \}.$$

对每个 $i > 0$, 有 $\|x_i\|_2 \leq \alpha$. 信号 x 按分块指标集 $\mathcal{T}$ 进行分块, 为方便起见, 记

$$x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} e_{ij},$$

同时, 令 $x_i = (0, \dots, 0, x_{i1}, \dots, x_{id_i}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N, \forall i > 0$. 现采用 Lagrange 乘子法, 首先构造 Lagrange 方程

$$L(x, \lambda) = g(x) + \lambda(k\alpha^q - \|x\|_{2,q}^q).$$

因此可找到 S_2 中的稳定点 $X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} x'_{ij} e_{ij}$ 满足 $\|x'_i\|_2 = (\frac{k}{n})^{\frac{1}{q}} \alpha$. 所以,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max_{n=1,\dots,p} g\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} x'_{ij} e_{ij}\right) \\ &= \max_{n=1,\dots,p} \left\{ \left[(1+\delta_{2k}) \left(1-\eta-\frac{q}{2}\right)^2 - (1-\delta_{2k}) \left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \right] \|h_T\|_2^2 + (1-q)\eta^2(\varepsilon+\rho \right. \\ &\quad \left. + \sigma(A)\|x-x_k\|_2)^2 + (2-q)\eta(1-\eta)\sqrt{1+\delta_{2k}}\|h_T\|_2(\varepsilon+\rho+\sigma(A)\|x-x_k\|_2) \right. \\ &\quad \left. + \left[2 \left(1-\frac{q}{2}\right)^2 \eta^2 \delta_{2k} \frac{n}{k} - (1-q)\eta^2(1+\delta_{2k}) \right] \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{q}-1} \|h_T\|_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

这样得到一个与 (3.5) 相同的不等式, 后面证明过程与情形 1 相同, 最后的结果也相同.

综上, 我们完成第一类噪声情形下定理 3.2 的证明.

类型二 噪声情形 $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{z : \|A^T z\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \varepsilon\}$. 第二类噪声情形下的证明过程与第一类相似, 不同之处在于

$$\begin{aligned} \|A^T A h\|_{\infty, \mathcal{T}} &\leq \|A^T(y - A\hat{x}^{DS})\|_{\infty, \mathcal{T}} + \|A^T(y - Ax)\|_{\infty, \mathcal{T}} + \|A^T(Ax - Ax_k)\|_{\infty, \mathcal{T}} \\ &\leq \varepsilon + \rho + \sigma^2(A)\|x - x_k\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \varepsilon + \rho + \sigma^2(A)\|x - x_k\|_2, \end{aligned}$$

$$\langle Ah_T, Ah \rangle \leq \langle h_T, A^T Ah \rangle \leq \|h_T\|_{2,1} \|A^T Ah\|_{\infty, \mathcal{T}} \leq \sqrt{k} \|h_T\|_2 (\varepsilon + \rho + \sigma^2(A) \|x - x_k\|_2).$$

其他部分证明与类型一基本相同, 类似地, 可有

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{DS} - x\|_2 \leq & \frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2k} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q) - \delta_{2k}))})(\varepsilon + \rho)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q) - \delta_{2k})} \\ & + \left[\frac{((2-q)(1-\eta)\eta\sqrt{2k} + (2-q-\eta)\eta\sqrt{2(1-q)(\delta(q) - \delta_{2k}))}\sigma^2(A)}{(2-q-\eta)^2(\delta(q) - \delta_{2k})} + 1 \right] \|x - x_k\|_2. \end{aligned}$$

综合以上两类噪声情形下的结果, 定理 3.2 得证. $\square$

注 3.1 在定理 3.2 中, 我们要求在第一类噪声情形下满足条件 $\varepsilon \geq \rho + \sigma(A) \|x - x_k\|_2$, 同时在第二类噪声情形下满足 $\varepsilon \geq \rho + \sigma^2(A) \|x - x_k\|_2$, 较之文献 [11] 中给出的 $\eta \geq \varepsilon$, 这里相对更加严格. 但是, 它保证了 $y - Ax_k \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ 成立, 而这也意味着 (1.2) 的最小化解 $\hat{x}$ 满足 $\|\hat{x}\|_{2,q}^q \leq \|x_k\|_{2,q}^q$. 在此基础上, 我们经一系列证明得到关于 $\|\hat{x} - x\|_2$ 的误差上界.

注 3.2 定理 3.2 表明, 若测量矩阵 A 满足 b-RIP 且 $\delta_{2k} < \delta(q) = \frac{\eta}{2-q-\eta}$, 其中 $\eta \in (1-q, 1-\frac{q}{2})$ 满足等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$, 则经混合 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 最小化能保证从有噪测量 $y = Ax + z$ 中稳定恢复一般块结构信号 x . 值得注意的是, 若 $z = 0$, 即无噪情形下, 则很容易得到定理 3.2 也可保证 k -块稀疏信号 x 的准确恢复.

下面给出 b-RIP 条件 $\delta_{2k} < \delta(q)$ 在无噪声时准确恢复和有噪声时稳定恢复的紧性分析, 特别地, 当 $q = 1$ 时, 相应结果在文献 [16, 定理 3.2] 中给出.

定理 3.3 固定 $q \in (0, 1]$, 令 $\eta \in (1-q, 1-\frac{q}{2})$ 是等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$ 的唯一正解, 若 η 是无理数 (有理数), 对任意 $\varepsilon > 0$, $k \geq 2/\varepsilon$, 存在一个满足 $\delta_{2k} < \frac{\eta}{2-q-\eta} + \varepsilon$ ($\delta_{2k} = \frac{\eta}{2-q-\eta}$) 的测量矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 和某个 k -块稀疏矢量 β_1 , 使得

(1) 无噪情形: $y = A\beta_1$, 经混合 l_2/l_q 最小化 (1.2) 不能准确恢复 k -块稀疏矢量 β_1 , 即 $\hat{\beta} \neq \beta_1$, 此处 $\hat{\beta}$ 为 (1.2) 的最小化解;

(2) 有噪情形: $y = A\beta_1 + z$, 经混合 l_2/l_q 最小化 (1.2) 不能稳定恢复 k -块稀疏矢量 β_1 , 即

$$\lim_{z \rightarrow 0} \hat{\beta} \neq \beta_1,$$

此处 $\hat{\beta}$ 为 (1.2) 的最小化解.

证明 受到文献 [16] 启发, 现根据文献 [21] 中例子, 给出具体证明如下 (与文献 [21] 中证明本质上是相同的). 固定 $q \in (0, 1)$, 当 η 为无理数时, 对任意 $\varepsilon > 0$, $k \geq 2/\varepsilon$, 假设

$$N \geq \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)kd, \quad m' = \frac{k}{\eta},$$

令 m 是小于 m' 的最大整数, 则 $m < m'$ 且 $m' - m < 1$. 因 $\eta < 1$, 故有 $m' > k$. 定义

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{kd + (\frac{k}{m'})^{\frac{2}{q}}md}} \underbrace{(1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1)}_{k \text{ 块}} \underbrace{(\eta^{\frac{1}{q}}, \dots, \eta^{\frac{1}{q}}, \dots, \eta^{\frac{1}{q}}, \dots, \eta^{\frac{1}{q}})}_{m \text{ 块}}, 0, \dots, 0 \in \mathbb{R}^N,$$

则有 $\|\beta_0\|_2 = 1$, $k + m \leq p$, $\mathcal{T} = \{d_1 = d, \dots, d_{k+m} = d, \dots, d_p = d\}$.

定义一个线性映射 $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^N$, 有

$$Ax = \sqrt{\frac{2-q}{2-q-\eta}}(x - \langle \beta_0, x \rangle \beta_0),$$

则对每个 $2k$ - 块稀疏矢量 x , 有

$$\|Ax\|_2^2 = \frac{2-q}{2-q-\eta} (\|x\|_2^2 - |\langle \beta_0, x \rangle|^2).$$

因为 x 是 $2k$ - 块稀疏的, 又由事实 $m' > k$, $0 < m' - m < 1$, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可有

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle \beta_0, x \rangle|^2 \leq \|x\|_2^2 \|\beta_0[\text{supp}[x]]\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 \|\beta_0[\max(2k)]\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 \frac{m'^{\frac{2}{q}} + k^{\frac{2}{q}}}{m'^{\frac{2}{q}} + mk^{\frac{2}{q}-1}} = \frac{m'^{\frac{2}{q}} + k^{\frac{2}{q}}}{m'^{\frac{2}{q}} + m'k^{\frac{2}{q}-1}} \frac{1}{1 - \frac{k^{\frac{2}{q}}(m'-m)}{m'^{\frac{2}{q}} + m'k^{\frac{2}{q}-1}}} \|x\|_2^2 \\ &\leq \frac{1 + \eta^{\frac{2}{q}}}{1 + \eta^{\frac{2}{q}-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2k}} \|x\|_2^2 \leq \left(\frac{2\eta}{2-q} + \frac{1}{k} \right) \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

其中 $\beta[\max(2k)]$ 代表仅保留 β 中 l_2 范数最大的 $2k$ 个块的矢量, 同时,

$$\beta[\max(2k)] \leq \frac{m'^{\frac{2}{q}} + k^{\frac{2}{q}}}{m'^{\frac{2}{q}} + mk^{\frac{2}{q}-1}}.$$

因此, 可得到

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\eta}{2-q-\eta} + \varepsilon\right) \|x\|_2^2 &\geq \left(1 + \frac{\eta}{2-q-\eta}\right) \|x\|_2^2 \geq \|Ax\|_2^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{\eta}{2-q-\eta} - \frac{2-q}{2-q-\eta} \frac{1}{k}\right) \|x\|_2^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{\eta}{2-q-\eta} - \varepsilon\right) \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

由 b-RIP 定义可知, $\delta_{2k} \leq \delta(q) + \varepsilon$.

当 η 为有理数时, 假设 $\eta = \frac{r}{s} \in (1-q, 1-\frac{q}{2})$, 此处 r 与 s 是互质的. 令 $k = tr$, $t \in \mathbb{N}$, $m = \frac{k}{\eta} = ts \in \mathbb{N}$. 相似地, 可构造一个矩阵 A , 使得 $\delta_{2k}^A = \delta(q)$.

现给出两个矢量

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ 块}}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{d}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N, \\ \beta_2 &= \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k \text{ 块}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{d}, \underbrace{(-\eta^{\frac{1}{q}}, \dots, -\eta^{\frac{1}{q}})}_{d}, \underbrace{(-\eta^{\frac{1}{q}}, \dots, -\eta^{\frac{1}{q}})}_{d}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

注意到, 因 $A\beta_0 = 0 = A(\beta_1 - \beta_2)$, 故 $A\beta_1 = A\beta_2$, 同时 β_1 是 k - 块稀疏矢量, $\forall 0 < q \leq 1$, $0 < \eta < 1$,

$$\|\beta_2\|_{2,q}^q = m^{\frac{q}{2}} \eta < m^{\frac{q}{2}} \eta^{\frac{q}{2}} = \|\beta_1\|_{2,q}^q. \quad (3.6)$$

(1) 无噪情形: $z = 0$, 混合 l_2/l_q 最小化不能准确重构 β_1 , 因 $A\beta_1 = A\beta_2$, 同时 $\|\beta_2\|_{2,q}^q < \|\beta_1\|_{2,q}^q$;

(2) 有噪情形: $y = Ax + z$, 假设混合 l_2/l_q 最小化能稳定恢复 β_1 , 即 $\lim_{z \rightarrow 0} \hat{\beta} = \beta_1$, 观察到

$$y - A(\hat{\beta} - \beta_1 + \beta_2) = y - A\hat{\beta},$$

因此,

$$\|\hat{\beta} - \beta_1 + \beta_2\|_{2,q}^q \geq \|\hat{\beta}\|_{2,q}^q,$$

则当 $z \rightarrow 0$ 时, 可有 $\|\beta_2\|_{2,q}^q \geq \|\beta_1\|_{2,q}^q$, 这与 (3.6) 矛盾.

综上可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, $\delta_{2k} \leq \delta(q) + \varepsilon$ 不能保证经混合 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 最小化准确和稳定恢复块稀疏信号. $\square$

4 总结

本文以非凸压缩感知为基础, 验证混合 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 最小化恢复块稀疏信号的表现, 尤其是对 $0 < q < 1$ 的非凸情形, 相应地给出经混合 l_2/l_q 最小化准确重构块稀疏信号时, 测量矩阵需满足的充分条件 $\delta_{2k} < \eta/(2 - q - \eta)$, 其中 η 是满足等式 $\frac{q}{2}\eta^{\frac{2}{q}} + \eta - 1 + \frac{q}{2} = 0$ 的唯一正解. 同时, 为说明所给条件的紧性, 我们给出具体的测量矩阵和块稀疏信号, 并证得: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 在测量矩阵满足条件 $\delta_{2k} \leq \delta(q) + \varepsilon$ 的前提下, 块稀疏信号不能经混合 l_2/l_q 最小化被准确或稳定恢复. 特别地, 若 $d_i = 1$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, 此结果退化为传统 l_q 最小化恢复稀疏信号的结果, 具体分析已在文献 [21] 中给出.

致谢 感谢审稿专家对本文提出的中肯且有意义的修改建议.

参考文献

- 1 Donoho D. Compressed sensing. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 1289–1306
- 2 Candès E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm Pure Appl Math*, 2006, 59: 1207–1223
- 3 Candès E, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Trans Inform Theory*, 2005, 51: 4203–4215
- 4 Lustig M, Donoho D, Pauly J. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magn Reson Med*, 2007, 58: 1182–1195
- 5 Wright J, Yang A, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2009, 31: 210–227
- 6 Majumdar A, Ward R. Compressed sensing of color images. *Signal Process*, 2010, 90: 3122–3127
- 7 Candès E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *C R Math Acad Sci Paris*, 2008, 346: 589–592
- 8 Foucart S, Lai M. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via l_q -minimization for $0 < q \leq 1$. *Appl Comput Harmon Anal*, 2009, 26: 395–407
- 9 Cai T, Wang L, Xu G. Shifting inequality and recovery of sparse signals. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 1300–1308
- 10 Mo Q, Li S. New bounds on the restricted isometry constant δ_{2k} . *Appl Comput Harmon Anal*, 2011, 31: 460–468
- 11 Cai T, Zhang A. Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices. *IEEE Trans Inform Theory*, 2014, 60: 122–132
- 12 Cai T, Wang L, Xu G. New bounds for restricted isometry constants. *IEEE Trans Inform Theory*, 2010, 56: 4388–4394
- 13 Lin J, Li S. Block sparse recovery via mixed l_2/l_1 minimization. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2013, 29: 1401–1412
- 14 Eldar Y, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. *IEEE Trans Inform Theory*, 2009, 55: 5302–5316
- 15 Wang Y, Wang J, Xu Z. Restricted p -isometry properties of nonconvex block-sparse compressed sensing. *Signal Process*, 2014, 104: 188–196
- 16 Chen W, Li Y. The high order block RIP condition for signal recovery. *J Comput Math*, 2019, 37: 61–75
- 17 Mishali M, Eldar Y. Blind multiband signal reconstruction: Compressed sensing for analog signals. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 993–1009
- 18 Dai W, Sheikh M, Milenkovic O, et al. Compressive sensing DNA microarrays. *EURASIP J Bioinform Syst Biol*, 2009, 2009: 162824
- 19 Ender J. On compressive sensing applied to radar. *Signal Process*, 2010, 90: 1402–1414

- 20 Yang Z, Xie L. Continuous compressed sensing with a single or multiple measurement vectors. In: Proceedings of the 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP). Piscataway: IEEE, 2014, 288–291
- 21 Zhang R, Li S. Optimal RIP bounds for sparse signals recovery via l_p minimization. Appl Comput Harmon Anal, 2019, 47: 566–584

Block sparse representation of a polytope and non-convex compressed sensing

Jun Zhou & Wei Huang

Abstract It is stated in compressed sensing (CS) that a sparse signal can be recovered accurately from the underdetermined system. While in many applications, real-world signals do not necessarily have standard sparsity, but exhibit additional structures. A typical one is the so-called block-sparse signal whose non-zero coefficients occur in a few blocks. In this paper, we consider recovering the block-sparse signal from very few linear measurements via mixed l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) norm minimization, and obtain the sufficient condition that the measurement matrix should satisfy. Furthermore, we give the sharp analysis of stable recovery in the noisy case.

Keywords compressed sensing, restricted isometry property (RIP), block-RIP, block sparsity, mixed l_2/l_q norm minimization

MSC(2020) 90C25, 90C59

doi: 10.1360/N012018-00163