文章编号:1673-5005(2009)03-0172-03

带有梯度信息的遗传算法在求解非线性方程组中的应用

排新颖, 王子亭

(中国石油大学 数学与计算科学学院,山东 东营 257061)

摘要:提出一种改进的求解非线性方程组的遗传算法。将梯度信息引入遗传算法,通过改变高斯变异参数不断调整搜索范围,逐渐搜索到包含最优解的区域,利用梯度信息提高解的精度。数值模拟结果表明,改进后的算法具有较强的局部搜索能力和全局优化能力,能够提高求解的精度与速度。

关键词:遗传算法; 非线性方程组; 函数优化

中图分类号:O 242.2 文献标识码:A

Application of genetic algorithm with gradient information to solving non-linear equation group

PAI Xin-ying, WANG Zi-ting

(*College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum, Dongying* 257061, *China*)

Abstract: An improved genetic algorithm was proposed for solving non-linear equation group. Gradient information was introduced into the genetic algorithm. The search scope was continuously adjusted by changing Gaussian variation parameters. And the region containing the optimal solution was found gradually. The solution precision can be improved by using gradient information. The numerical simulation results show that the improved algorithm is characterized by strong local search ability and global optimization capability, and can improve the accuracy and speed of solution.

Key words: genetic algorithm; non-linear equation group; function optimization

求解非线性方程组是实践中经常遇到的问题,求解该问题的方法一般有迭代法、牛顿法、梯度法、共轭方向法、变尺度法、埃特金方法等等。这些方法对方程组本身性质的依赖较强,对于高维、本身性质较差的方程组,会出现精度较差,甚至无法求解的现象。遗传算法[1-4]将生物的演化过程看作一个长期的优化过程,利用生物演化的思想去解决一些较为复杂的问题,采用基于种群的搜索机制,强调个体之间的信息交换,具有很强的通用性和较强的全局优化能力。笔者将由可导函数组成的一类非线性方程组求解转化成一个可导函数的优化问题,将梯度信息引入遗传算法;通过改变高斯变异参数不断调整搜索范围,逐渐搜索到包含最优解的区域,以此达到提高精度的目的。

1 问题描述

设非线性方程组为

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\in\mathbf{R}^n$, $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n\}$,不妨假设非线性方程组在区域 D 内有唯一解,并且 $f_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 存在一阶导数。为了利用梯度信息,构造可导函数

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n))^2.$$

这样求解非线性方程组的问题就转化成求函数优化问题

$$\begin{cases}\min H(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \text{s.t.}\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.\end{cases}$$

显然,非线性方程组的解 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 就

收稿日期:2008-03-02

作者简介:排新颖(1977-),女(汉族),山东临清人,讲师,硕士,研究方向为非线性泛函分析及微分方程数值解。

是函数 H 的最优解。

2 改进的算法设计

2.1 编码

采用实数编码。随机选取 p 个初始个体，设第 k 代种群 $X_i^k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)$，$i=1,2,\cdots,p$，其中，$p$ 是种群规模。

2.2 锦标赛选择

采用锦标赛选择。假定锦标赛的规模是 m，则在 p 个函数值中随机选择的 m 个函数值中最小的一个进入下一过程。采用锦标赛选择有利于消除超级个体的影响，避免早熟收敛，并且不必对函数值 $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作任何改变。

2.3 局部寻优

用梯度对最优个体进行局部寻优。选择的下降方向是待优化函数 $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n))^2$ 的负梯度方向，设置一个步长 L，在当前点进行局部寻优：如果寻优后的函数值小于原来函数值的 $p_3(p_3<1)$ 倍，也即 $H(X+Lp)\leqslant H(X)p_3$ 则寻优成功，更新当前个体，否则 $L=Lp_2$（p_2 为步长压缩因子）；直到 L 小于一个设定的值。

2.4 变异规则

设 p_m 是变异概率，对每一个个体（最优个体不进行此操作），产生一个随机数 $r\in(0,1)$，若 $r<p_m$ 进行变异操作：对个体中的每个分量加上一个服从正态分布的扰动 $c_i\in N(0,\delta)$，$x_i=x_i+c_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

标准差在变异过程中的作用相当于步长，并且没有一个步长适合于所有的遗传算法或是遗传算法的各个阶段（比如开始迭代时最优解离真正解比较远，需要大的步长来全局寻优；遗传算法后期基本锁定真正解的区间，这时需要小的步长来进行局部细化搜索）。为了使变异算子有较强的局部寻优能力，并且尽可能地跳出局部最优，防止算法的早熟收敛，设置了压缩因子 p_1，并且设置了两个数 $\underline{\delta}$ 与 $\bar{\delta}$ 分别作为 δ 的下界与上界，迭代过程中，$\delta=\delta p_1$，当 $\delta<\underline{\delta}$ 时，$p_1>1$；当 $\delta>\bar{\delta}$ 时，$p_1<1$。

本算法采用最优个体保留策略。

3 算法步骤

(1) 初始化。输入待求解问题的各种数据及控制参数：种群规模 p，变异概率 p_m，初始标准差 δ，δ 的最小值 $\underline{\delta}$，δ 的最大值 $\bar{\delta}$，标准差压缩因子 p_1，初始步长 L，压缩因子 p_2，p_3。

(2) 采用十进制浮点数编码，随机产生满足约束条件的初始群体，并求出每个个体的适应值。

(3) 按照个体性能进行锦标赛选择。

(4) 依据变异规则对种群中个体进行变异，当前性能最好的个体不参与变异，个体变异后要对其合法性进行检验，或用边界值代替变异后的值，或重新进行变异。

(5) 对最优个体利用梯度信息进行局部寻优，更新种群。

(6)若不满足终止条件（本文中采用的终止条件是最优值连续 20 代没有改进）转至步骤(3)；否则结束循环，以当前最优解作为问题的解。

4 数值模拟

为了验证本文中算法的有效性与可靠性，进行数值模拟。适应值函数为

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n))^2.$$

控制参数：种群规模为 30，锦标赛选择规模为 10，变异概率为 0.8，终止规则是最优值连续 20 代没有改进，初始标准差 δ 为 0.25，$\underline{\delta}$ 为 0.000 1，$\bar{\delta}$ 为 0.25，压缩因子 p_1 为 0.6（或 1.5），初始步长 $L=1$，压缩因子 $p_2=0.5$，$p_3=0.99$。

例 1[5-6]

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1x_2=1, \\ x_1^2+x_2^2=2, \\ D_1=\{(x_1,x_2,x_3)\mid 0\leqslant x_1\leqslant 2, 0\leqslant x_2\leqslant 2, 0\leqslant x_3\leqslant 2\}. \end{cases}$$

例 2[6-7]

$$\begin{cases} x_1^{x_2}+x_2^{x_1}-5x_1x_2x_3-85=0, \\ x_1^3-x_2^{x_3}-x_3^{x_2}-60=0, \\ x_1^{x_3}+x_3^{x_1}-x_2-2=0, \\ D=\{(x_1,x_2,x_3)\mid 3\leqslant x_1\leqslant 5,\ 2\leqslant x_2\leqslant 4, 0.5\leqslant x_3\leqslant 2\}. \end{cases}$$

例 3[8]

$$0.5\sin x-2.5x+8=0.$$

例 4[8]

$$\begin{cases} x_1=7x_1-\sin x_2-50, \\ x_2=\cos x_1+5x_2-70. \end{cases}$$

4 个算例的数值计算结果比较见表 1（其中 t 是 CUP 时间，T_1 是最优解出现的代数，T_2 是梯度寻优成功次数）。

表 1 数值结果比较

Table 1 Contrast between numerical results

算例	算法	最优解	$\Sigma \lvert f_i \rvert$	t/s	T_1	T_2
例 1	文献[5]	1.00533 0.9797 0.968468	0.0927	<15	—	—
	文献[6]	1.0175 0.9822 0.9999	7.0186×10^{-4}	—	—	—
	本文中算法	0.99963389 1.00036601 0.99999995	3.01×10^{-7}	0.235	2	1965
	精确解	1 1 1	0			
例 2	文献[7]	3.9974 3.0107 0.9987	1.8123	—	4659	—
	文献[6]	3.9940 3.0079 1.0079	0.5961	—	—	—
	本文中算法	3.99999909 2.99999837 0.99999339	6.53×10^{-5}	0.469	96	308
	精确解	4 3 1	0			
例 3	文献[8]	3.197755	2.2452×10^{-2}	—	4	—
	本文中算法	3.1902686455123512310	0	0.015625	2	163
例 4	文献[8]	8.174106 17.578671	1.943×10^{-6}	—	7	—
	本文中算法	8.1741062324158306 17.578671207856896	0	0.047	2	163

5 结束语

采用最优个体保留策略,在进化过程中通过改变标准差大小而改变搜索范围,能使种群在进化中有效摆脱过早收敛,始终保持较强的全局搜索能力,种群不断地向最优值逼近,利用梯度信息可以求得最优解,通过改变压缩因子 p_3 的值可以调节解的精度,如果不计时间的话解的精度还可增加。

参考文献:

[1] HOLLAND J H. Adaptation in natural and artificial systems[M]. Ann Arbor, MI: The University of Michigan Press, 1975.

[2] MCCALL John. Genetic algorithms for modeling and optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 184: 205-222.

[3] LIN C T, LEE C S G. Neural fuzzy systems: a neuro-fuzzy syne-rgism to intelligent systems[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996: 382-385.

[4] EMMANUEL Karlo Nyarko. Rudolf Scitovski. Solving the parameter identification problem of mathematical models using genetic algorithms[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 153: 651-658.

[5] 胡能发. 求解多元方程组的遗传算法[J]. 荆州师范学院学报:自然科学版, 2002, 25(2): 11-13.
HU Neng-fa. Genetic algorithm of poly-equations[J]. Journal of Jingzhou Teachers College (Natural Science), 2002, 25(2): 11-13.

[6] 曾毅. 改进的遗传算法在非线性方程组求解中的应用[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(4): 132-134.
ZENG Yi. The application of improved genetic algorithms to solving non-linear equation group[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2004, 21(4): 132-134.

[7] 张宏生, 吴拓. 遗传算法在非线性方程组求解中的应用[J]. 肇庆学院学报, 2002, 23(2): 16-19.
ZHANG Hong-sheng, WU Tuo. The application of genetic algorithms to solving non-linear equation group[J]. Journal of Zhaoqing University, 2002, 23(2): 16-19.

[8] 陈数勋, 王素暖. 一种新型线性化迭代算法及其在结构优化准则方程组求解中的应用[J]. 工程设计学报, 2005, 12(5): 270-272.
CHEN Shu-xun, WANG Su-nuan. New linear iterative algorithm and its application in seeking solution of criterion equations of structural optimization[J]. Journal of Engineering Design, 2005, 12(5): 270-272.

(编辑 修荣荣)

(上接第 171 页)

[12] 宋菁, 曹竹安. 迭代动态规划在系统最优化中的应用[J]. 化工学报, 1999, 50(1): 125-129.
SONG Jing, CAO Zhu-an. Application of iterative dynamic programming to dynamic optimization problems[J]. Journal of Chemical Industry and Engineer (China), 1999, 50(1): 125-129.

[13] JACK Dongarra. 并行计算综述[M]. 莫则尧, 陈军, 曹小林, 译. 北京: 电子工业出版社, 2005.

[14] 都志辉. 高性能计算并行编程技术——MPI 并行程序设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[15] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

(编辑 韩国良)