曲率自适应条件下特征点选取的非均匀 B 样条曲线插值方法

陈良骥¹⁾, 高飞^{2,3)*}, 赵波³⁾, 马龙飞³⁾

¹⁾ (桂林理工大学机械与控制工程学院 桂林 541004)

²⁾ (天津空间电源科技有限公司 天津 300384)

³⁾ (天津工业大学机械工程学院 天津 300387)

(gf1181088335@163.com)

摘 要: 针对计算机数控编程阶段生成的海量离散刀位数据, 在满足预设插值精度的条件下, 提出一种基于曲率自适应选取特征点的非均匀 B 样条曲线插值方法. 首先, 采用相邻 3 点形成近似圆弧的方法计算各个离散刀位数据点的曲率, 将曲率分段点、曲率极大值点等特征数据点作为初始插值数据点, 构造生成初始非均匀 B 样条插值曲线; 其次, 建立插值误差计算模型, 并用于计算所有未参与插值的数据点与非均匀 B 样条插值曲线间的插值误差, 在超出预设插值误差的曲率段内增加新的特征点, 生成新的非均匀 B 样条插值曲线; 重复上述过程, 直至所有不在非均匀 B 样条插值曲线上的数据点都满足插值精度条件为止. 对实际加工离散刀位数据的仿真计算结果表明, 该方法即便去除了大量原始离散刀位数据, 也能更好地保留原始刀位数据曲线在外形和精度方面的特征, 且具有迭代计算次数少、数据点去除量大等特点, 在海量离散刀位数据的样条化数控编程方面具有较高的应用价值.

关键词: 数控编程; 非均匀 B 样条插值; 曲率自适应; 插值误差

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2021.18366

Non-Uniform B-Spline Curve Interpolation Method for Feature Points Selection under Curvature Adaptive Condition

Chen Liangji¹⁾, Gao Fei^{2,3)*}, Zhao Bo³⁾, and Ma Longfei³⁾

¹⁾ (College of Mechanical and Control Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004)

²⁾ (Tianjin Space Power Technology Co., Ltd., Tianjin 300384)

³⁾ (School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387)

Abstract: Aiming at the massive discrete tool position data generated in the computer numerically controlled programming stage, a non-uniform B-spline curve interpolation method based on curvature adaptive selecting feature point is proposed under the condition of satisfying the preset interpolation accuracy. Firstly, the curvature of each discrete data point is calculated by the method of forming an approximate arc from three adjacent points, and the feature data points such as the segment point of the curvature segment and the maximum point of curvature are used as the initial interpolation data points to construct and generate the initial non-uniform B-spline interpolation curve. Secondly, the interpolation error calculation model is established and used to calculate the interpolation errors between all the data points not participating in the interpolation and the non-uniform B-spline interpolation curve, and the new feature points that are beyond the preset interpolation error in the curve segments are added to generate a new non-uniform B-spline interpolation curve. Repeat the above processes until all data points that are not on the non-uniform B-spline int-

收稿日期: 2020-05-07; 修回日期: 2021-07-13. 基金项目: 国家自然科学基金(52075110). 陈良骥(1978—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为复杂曲线曲面 CAD/CAM 技术、五轴 CNC 精密轨迹控制技术; 高飞(1994—), 男, 硕士研究生, 论文通讯作者, 主要研究方向为样条光滑处理技术; 赵波(1994—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为复杂曲面加工轨迹生成方法; 马龙飞(1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为五轴样条曲线实时插补技术.

interpolation curve can meet the interpolation accuracy condition. The simulation calculation results of the actual tool position data show that the method can better retain the characteristics of the original data curve in terms of shape and accuracy even when a large amount of the original tool position data is removed, and it has advantages of fewer iteration calculations and larger removing the data points. The method will have high application value to the spline computer numerically controlled programming of massive discrete tool position data.

Key words: computer numerically controlled programming; non-uniform B-spline interpolation; curvature adaptation; interpolation error

非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-spline, NURBS)曲线曲面插值技术在计算机辅助设计中得到了越来越广泛的运用. 例如, 在数控加工中, 为了提升数控机床加工质量, 从大量的原始刀位点数据中寻求最优的 NURBS 曲线曲面表达, 对于提高自由曲线曲面加工效率和精度具有重要的实际意义^[1-5]. 其中, NURBS 曲线插值的主要任务是在满足预设插值精度的条件下, 尽可能多地去除大量原始刀位数据、减少 NURBS 插值曲线的控制点与节点的数量, 进而减少数控系统 NURBS 曲线实时插补计算时的数据计算量, 以此进一步提高数控加工时的轨迹控制精度和运行效率^[6-10]. 因此, 在数控加工编程时, 如何从海量离散刀位数据中筛选出适合的特征点, 并将其插值为满足插值精度要求的 NURBS 曲线, 已逐渐成为当前数控加工, 特别是涉及 NURBS 样条插补数控编程中急需解决的关键问题和难点问题.

近年来, 针对上述问题诸多国内外研究人员开展了持续性的深入研究工作. 韩江等^[11]提出一种基于轮廓关键点的 B 样条曲线插值方法, 其将所有数据点曲率平均值作为判断依据进行初始特征点的选取, 导致即使在相对平直的区域也会分布着较密集的数据点, 原始刀位数据的去除力度也不够高. 江本赤^[12]提出一种基于曲率优势点的 NURBS 曲线拟合方法, 其适当地改进了文献[11]的方法, 添加一个约束条件进行初始特征点的筛选, 可以进一步实现对原始刀位数据的压缩. 袁伟鹏^[13]提出用空间特征点识别自适应拟合 NURBS 曲线, 可以快速进行空间刀位数据点的选取与拟合, 但仍然会产生较多冗余的节点和控制点. 刘明增等^[14]提出一种基于正则渐进迭代逼近的自适应 B 样条曲线拟合方法, 可以对选取的特征点进行自适应拟合, 但是需要删除 B 样条曲线的节点, 导致拟合误差增大以及迭代计算次数增加. Yoshimoto

等^[15]提出一种针对平面数据拟合的实数编码遗传算法, 能够自动地确定节点的数量和位置, 可以处理光滑的数据拟合以及不连续的点或尖点拟合问题, 但是其需要寻找最优的理论模型, 导致计算效率不高. Park 等^[16]提出一种基于误差自适应控制的 B 样条曲线逼近方法, 不需要给定控制点的数量就可以得到满足预设拟合精度条件的最少控制点曲线. 周红梅等^[17]提出采用自适应提取合适的节点进行 NURBS 曲线插值的方法, 可以得到满足插值精度要求的曲线, 但是只能识别出局部曲率极大值点和拐点, 并不能较好地减少控制点的数量.

上述研究中普遍存在的共性问题: 如果原始刀位数据特征点选取的不合理, 就会导致保留的刀位数据过多而去除的刀位数据过少, 为去除更多的原始刀位数据, 又会大大增加迭代计算的次数. 针对目前国内外研究中存在的相关问题, 本文基于 NURBS 曲线相关理论, 提出一种面向海量原始刀位数据的可曲率自适应选取特征点的非均匀 B 样条曲线插值方法: 在计算数据点曲率的基础上, 通过邻近点之间的曲率值、曲率差分关系对曲率分段数据点进行初确定和终确定, 并找出各曲率分段内曲率为极大的特征点, 与分段点一起构造生成初始非均匀 B 样条插值曲线; 在超出拟合误差的曲线分段内, 合理选取并增加新的刀位数据特征点, 再次进行非均匀 B 样条曲线插值. 本文的后续部分将对 NURBS 曲线相关理论、基于曲率的分段点确定、自适应特征点的选取以及建立插值误差数学模型等内容分别进行详细论述.

1 NURBS 曲线的基本定义

一条 p 次 NURBS 曲线定义^[18]为

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i}, \quad u = [0,1] \quad (1)$$

其中, $\{P_i\}$ 是 NURBS 曲线的控制点, 控制点的数量为 $n+1$ 个, 所有控制点 $\{P_i\}$ 的连线构成了 NURBS 曲线的控制多边形; $\{\omega_i\}$ 是对应控制点 $\{P_i\}$ 的权因子值; $N_{i,p}(u)$ 是 p 次 B 样条基函数. 为了方便后续的研究工作, 取权因子值为 1, 将 NURBS 曲线简化为非均匀 B 样条曲线.

B 样条基函数定义在节点矢量

$$U = (u_0, u_1, \dots, u_m)$$

上. 其中, $m = n + p + 1$; 节点的个数为 $m+1$. B 样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 可由 de Boor-Cox 递推公式^[17]

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

求得.

2 选取初始特征点

为更好地发挥 NURBS 曲线在表达原始数据曲线形状特征方面的优势, 非均匀 B 样条插值仍需对原始密集刀位数据点合理地选取特征点. 由于数据点的曲率信息能够很好地反映原始数据曲线的形状特征, 把数据点与曲率关联起来进行形状特征点的选取, 可以更好地表达原始数据曲线的形状特征.

2.1 计算数据点曲率

采用相邻 3 个数据点形成近似圆弧的方法进行各原始数据点曲率的求解^[19]. 如图 1 所示, 设原始数据点的个数为 $t+1$, 其中 i 个数据点 Q_i 对应的曲率半径为 ρ_i ($i = 0, 1, \dots, t$), 其近似求解公式为

$$\rho_i = \frac{|Q_{i+1} - Q_i| \cdot |Q_{i-1} - Q_i| \cdot |Q_{i+1} - Q_{i-1}|}{2|[(Q_{i+1} - Q_i) \times (Q_i - Q_{i-1})]|}, \quad u = [0,1] \quad (3)$$

则第 i 个数据点 Q_i 处对应的曲率为

$$k_i = \frac{1}{\rho_i} \quad (4)$$

图 1 离散数据点曲率圆及曲率半径的计算

2.2 曲率段间分段点位置的确定

原始数据曲线按照曲率大小可划分为若干大曲率段和若干小曲率段. 大曲率段曲线的弯曲程度较大, 应选取较多的特征点才能更好地表达曲线的弯曲特征. 小曲率段曲线相对而言则比较平直, 选取较少的特征点便可较好地表达曲线的特征. 可见, 不同大小曲率段选取的特征点数也会有所差别, 有必要研究曲线按曲率进行分段的方法, 准确确定出各曲率段间临界分段点的位置.

2.2.1 分段点位置的初确定

当第 i 个数据点 Q_i 对应的曲率 k_i 与邻近的数据点曲率之间满足如下初确定条件之一时,

$$(1) \quad k_{i-j} > k_i, \quad j=1,2,3;$$

$$(2) \quad k_{i+j} > k_i, \quad j=1,2,3.$$

则可以将 Q_i 作为曲线按曲率分段的初确定分段点. 但是考虑原始数据曲线存在曲率跳跃的情况, 仅满足上述一个条件尚不足以保证 Q_i 两侧邻近数据点中的一侧数据点曲率远大于另一侧数据点的曲率. 因此, 还需针对不同情况辅以其他约束条件, 以保证分段点的准确性.

2.2.2 分段点位置的终确定

当第 i 个数据点 Q_i 对应的曲率 k_i 满足条件(1)时, 记

$$\overline{\Delta k_i^+} = \sum_{j=1}^3 (|k_{i+j+1} - k_{i+j}|) \quad (5)$$

$$\Delta k_i^- = \min_{1 \leq j \leq 3} (|k_{i-j} - k_{i+1}|) \quad (6)$$

$$\Delta k_i^+ = \max_{1 \leq j \leq 3} (|k_{i+j+1} - k_{i+1}|) \quad (7)$$

其中, $\overline{\Delta k_i^+}$ 表示向前曲率差分之和; Δk_i^- 表示曲率差分极值; 符号“+”与“-”分别表示向前与向后差分运算.

如果满足 $\Delta k_i^- > \overline{\Delta k_i^+}$, 且满足 $H \Delta k_i^+ < \bar{k}$, 则可以将曲率值 k_i 对应的数据点 Q_i 作为终确定的分段点, 其中, H 为常数, H 通常取值为 2~3; $\bar{k}$ 为所有数据点曲率的平均值.

同样, 当第 i 个数据点 Q_i 对应的曲率 k_i 满足条件(2)时, 记

$$\overline{\Delta k_i^-} = \sum_{j=1}^3 (|k_{i-j} - k_{i-j+1}|) \quad (8)$$

$$\Delta k_i^- = \max_{1 \leq j \leq 3} (|k_{i-j-1} - k_{i-1}|) \quad (9)$$

$$\Delta k_i^+ = \min_{1 \leq j \leq 3} (|k_{i+j} - k_{i-1}|) \quad (10)$$

如果满足 $\Delta k_i^+ > \overline{\Delta k_i^-}$, 且满足 $H\Delta k_i^- < \bar{k}$, 则可以将曲率值 k_i 对应的数据点 Q_i 作为曲线按曲率分段的分段点。

2.3 各曲率段内曲率极大值点位置的确定

分段点位置的确定为原始数据曲线按曲率大小划分为若干数据段提供了依据。但在每个曲率段内, 曲率极大值点对于原始数据曲线的局部形状也具有重要影响, 对准确、快速地构造原始数据曲线的非均匀 B 样条插值曲线起着至关重要的作用。因此, 可将各个曲率段内的曲率极大值点选取为构造非均匀 B 样条插值曲线的初始特征点。

经过曲率分段后原始数据曲线将会被分为若干个曲率段, 假设某个曲率段内包含 q 个数据点, 若该曲率段内的数据点 Q_i 对应的曲率值 k_i 满足

$$k_i = \max(k_j), j = 1, 2, \dots, q \quad (11)$$

时, 可将该数据点 Q_i 选取为该曲率段内的曲率极大值点。

2.4 添加其他新特征数据点

至此, 针对原始数据曲线的非均匀 B 样条插值, 已筛选并确定了按曲率分段的分段点和各曲率段内的曲率极大值点作为表达原始数据曲线形状特征的特征点。如果将选取出的上述特征点与首末 2 个原始数据点进行非均匀 B 样条插值, 在非均匀 B 样条插值曲线某些局部区域的拟合效果可能不会非常理想。如图 2 所示, 非均匀 B 样条插值曲线的大曲率段与原始数据曲线的形状特征差别很大, 通常不符合预设插值误差的约束条件; 而插值曲线的小曲率段与原始数据曲线的形状特征比较贴近。此时非均匀 B 样条曲线插值的结果只能反映原始数据曲线形状特征的变化趋势, 欲获得满足预设插值误差约束条件的非均匀 B 样条插值曲线, 还需较多次数地迭代更新数据点。

为了减少迭代计算次数, 快速构造原始数据曲线的非均匀 B 样条插值曲线, 需在上述选取出的特征点基础上添加曲率自适应的其他新特征数据点, 它们共同作为初始插值特征数据点来构造

非均匀 B 样条插值曲线。以下将对这些新添加特征数据点的选取与添加方法进行详细论述。

图 2 插值曲线局部不理想的拟合效果

2.4.1 求解数据点添加个数

对任意一个含有 q 个数据点的曲率段, 设该曲率段内每 l 个数据点就有一个数据点参与非均匀 B 样条曲线的插值, 计算

$$l = \left\lceil \frac{\varepsilon \cdot q^2}{K} \right\rceil \quad (12)$$

其中, $\lceil \gamma \rceil$ 为对 γ 进行向上取整的运算; ε 为预设插值误差; K 为曲率振荡次数, 是指该曲率段内曲率值超过整条曲线曲率平均值 $\bar{k}$ 的数据点个数。

当 $K=0$ 时, 表示该曲率段是比较平直的小曲率段, 则不需在该曲率段添加新的特征数据点。

当 $K=1$ 时, 表示对预设插值误差 ε 要求过于苛刻, 若想减少迭代次数, 则建议将该曲率段中的全部数据点都作为特征数据点进行选取和添加。

当 $K \geq 2$ 时, 表示该曲率段需要再添加新的特征数据点。设前后相邻的 2 个特征数据点在原始数据点中的排序为 M_f 与 M_e , 则在数据段 (M_f, M_e) 内应选取的数据点个数为

$$X = \left\lceil \frac{M_e - M_f}{l} \right\rceil \quad (13)$$

2.4.2 选取与添加新特征数据点

将某点在数据段 (M_f, M_e) 中各自序列子区间内曲率值的大小作为需添加的新数据点的选取依据, 在数据段 (M_f, M_e) 应添加的第 x 个数据点所对应的序列子区间为

$$\left[M_f + \left\lceil (x-1) \times \frac{M_e - M_f}{X} \right\rceil, M_e + \left\lceil x \times \frac{M_e - M_f}{X} \right\rceil \right], \quad x = 1, 2, \dots, X \quad (14)$$

将各自序列子区间内曲率极大值的数据点选取为新添加的特征数据点。

3 非均匀 B 样条曲线插值方法

在此之前, 为构造出包含海量离散刀位数据

的原始数据曲线的初始非均匀 B 样条插值曲线, 分别选取了首末 2 个原始数据点、曲率段的分段点、各曲率段内的曲率极大值点, 以及新添加的特征数据点共同作为初始非均匀 B 样条插值曲线的数据点集, 对已选出的数据点集进行非均匀 B 样条曲线的插值计算。

3.1 特征点的参数化

对于一组已经选出的特征数据点集 $\{Q_j\}$, 不妨设 $\{Q_j\}$ 包含 $n+1$ 个特征数据点, 用一条 p 次 NURBS 曲线来插值这些特征数据点。

首先, 需要对参与插值的特征数据点进行参数化。本文采用目前最常用的弦长参数化法进行特征数据点的参数化计算。

对于特征数据点集 $\{Q_j\} (j=0, 1, 2, \dots, n)$, 设总弦长为 D , 则有

$$D = \sum_{j=1}^n |Q_j - Q_{j-1}| \quad (15)$$

进而可将各数据点 $\{Q_j\} (j=0, 1, 2, \dots, n)$ 所对应的参数分别表示为

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = 0 \\ \bar{u}_j = \bar{u}_{j-1} + \frac{|Q_j - Q_{j-1}|}{D}, j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \bar{u}_n = 1 \end{cases} \quad (16)$$

3.2 计算节点矢量

设节点矢量为 $U=(u_0, u_1, \dots, u_m)$, 为了能够让节点矢量很好地反映 $\bar{u}_j$ 的分布情况, 本文采用取平均值的方法, 即

$$\begin{cases} u_0 = \dots = u_p = 0 \\ u_{i+p} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{i+p-1} \bar{u}_j, i = 1, 2, \dots, n-p \\ u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \end{cases} \quad (17)$$

则 $U = (\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1 \text{ 个}}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1 \text{ 个}})$ 。

3.3 控制点的反求计算

为简化反求计算过程、缩短算法执行时间, 本文将 NURBS 曲线的权因子值 ω_i 全部取为 1, 则由 NURBS 曲线的规范性可知 $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1$ 。此时, 式(1)表示的 NURBS 曲线退化为非均匀 B 样条曲线, 其表达式为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (18)$$

建立关于控制点 P_i 的线性方程为

$$Q_j = C(\bar{u}_j) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_j) P_i, j = 0, 1, \dots, n \quad (19)$$

其中, $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_j)$ 为 $(n+1) \times (n+1)$ 系数矩阵。利用式(15)~(17)求出参数 $\bar{u}_j$ 和节点矢量 U , 由式(2)求得 B 样条基函数, 将其代入式(19)将得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ N_{0,3}(\bar{u}_1) & N_{1,3}(\bar{u}_1) & N_{2,3}(\bar{u}_1) & \dots & N_{n,3}(\bar{u}_1) \\ N_{0,3}(\bar{u}_2) & N_{1,3}(\bar{u}_2) & N_{2,3}(\bar{u}_2) & \dots & N_{n,3}(\bar{u}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

求解式(20)中的控制点集 $\{P_i\} (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 后, 即可唯一确定一条关于参与插值的特征数据点 $\{Q_j\} (j=0, 1, 2, \dots, n)$ 的非均匀 B 样条插值曲线。

3.4 计算插值误差

根据第 2 节提出的初始特征点选取方法, 将原始刀位数据点集 $\{Q_j\} (j=0, 1, \dots, t)$ 经筛选形成含有 $n+1$ 个数据点的初始插值数据点集 $\{Q_j\}$, 计算出相应的控制点集 $\{P_i\} (i=0, 1, \dots, n)$, 可利用非均匀 B 样条插值方法构造生成一条初始非均匀 B 样条插值曲线。然而, 对于原始刀位数据点集 $\{Q_j\} (j=0, 1, \dots, t)$ 中不属于初始插值数据点集 $\{Q_j\} (j=0, 1, \dots, n)$ 的其他未参与非均匀 B 样条曲线插值的数据点集 $\{Q_s\} (s=0, 1, \dots, t-n-1)$, 还需计算所有数据点 Q_s 处的插值误差 ε_s , 以验证是否满足 ε_s 不大于预设插值误差 ε 的约束条件。为计算每个数据点 Q_s 处的插值误差 ε_s , 本文提出点到非均匀 B 样条插值曲线最小距离的近似求解方法。

首先, 确定数据点 Q_s 在原始数据点序列中所对应的节点矢量中的最小参数节点区间 (u_a, u_b) , 如图 3 所示。

图3 数据点对应的参数节点区间

将参数节点区间 (u_a, u_b) 以步长 h 进行 R (R 取值为相邻 2 个特征数据点之间未参与插值的数据点的个数) 等分, 取 $u_r = u_a + rh$ ($r=0, 1, 2, \dots, R$), 其中步长 h 的计算公式为

$$h = \frac{u_b - u_a}{R} \quad (21)$$

计算 Q_s 与 $C(u_r)$ 间的距离 ε_r , 取 ε_r 中的最小值为 ε_c , 与 ε_c 对应的曲线上的点为 $C(u_c)$, 如图 4a 所示. ε_r 和 ε_c 的计算公式分别为

$$\varepsilon_r = |Q_s - C(u_r)|, u_a \leq u_r \leq u_b \quad (22)$$

$$\varepsilon_c = \min_{0 \leq r \leq R} |Q_s - C(u_r)| \quad (23)$$

以参数 u_c 为中心, 在其前后各取一个参数 u_{c-} 和 u_{c+} ; 其中, $u_{c-} = u_c - h$, $u_{c+} = u_c + h$. 分别计算数据点 Q_s 到 2 点 $C(u_{c-})$ 与 $C(u_{c+})$ 的距离 L_{c-} 与 L_{c+} , 取两者的较小值为 $L_{\min}$.

在取得 $L_{\min}$ 的一侧(不妨设为 $C(u_{c+})$), 取 W 个参数节点构成 (u_c, u_{c+W}) 参数区间(通常取 $W=3$ 即可获得满意精度), 将数据点 Q_s 向 $C(u_c)$ 到 $C(u_{c+3})$ 的非均匀 B 样条曲线段投影, 设投影点为 $C(u_w)$ ($w=0, 1, 2, \dots$), 计算 Q_s 与 $C(u_w)$ 间的距离 ε_w . 取 ε_w 的最小值为 ε_s , 与 ε_s 对应的曲线上的点为 $C(u_d)$, 如图 4b 所示.

a. 第1次点到曲线投影最短距离计算

b. 第2次点到曲线投影最短距离计算

图 4 数据点到曲线的偏差计算

在参数节点区间 (u_c, u_{c+W}) 以步长 h' 进行 R' ($R' = 10W$) 等分, 取 $u_w = u_c + wh$ ($w=0, 1, 2, \dots, R'$), 其中步长 h' 的计算公式为

$$h' = \frac{u_{c+W} - u_c}{R'} \quad (24)$$

数据点 Q_s 到 $C(u_w)$ 之间的距离 ε_w 和其最小值 ε_s 的计算公式分别为

$$\varepsilon_w = |Q_s - C(u_w)|, u_c \leq u_w \leq u_{c+W} \quad (25)$$

$$\varepsilon_s = \min_{0 \leq w \leq R'} |Q_s - C(u_w)| \quad (26)$$

插值误差的近似求解算法步骤如下:

Step1. 搜索出数据点 Q_s 在原始数据点序列中所对应的节点矢量中的最小参数节点区间 (u_a, u_b) , 将该参数区间以式(21)计算的步长 h 进行 R 等分, 分别获得各参数等分点处的值 u_r ($r=0, 1, 2, \dots, R$).

Step2. 利用式(22)计算 Q_s 到参数 u_r 对应的曲线上各点间的距离 ε_r , 并结合式(23)求得最小距离 ε_c , 同时确定 ε_c 对应的曲线上的点 $C(u_c)$ 及参数 u_c .

Step3. 以参数 u_c 为中心, 前后两侧各取一个参数 u_{c-} 和 u_{c+} , 计算 Q_s 到 2 点 $C(u_{c-})$ 与 $C(u_{c+})$ 的距离 L_{c-} 与 L_{c+} , 确定两者中的较小值 $L_{\min}$.

Step4. 在取得 $L_{\min}$ 的一侧获得参数区间 (u_c, u_{c+W}) , 利用式(24)进行 R' 等分, 分别获得各参数等分点处的值 u_w ($w=0, 1, 2, \dots, R'$), 利用式(25)(26)分别计算 ε_w 和 ε_s .

3.5 添加与更新插值数据点

通过第 3.4 节中的方法可计算出所有未参与插值的数据点 Q_s 到 NURBS 插值曲线的最小距离 ε_s , 进而形成数据点集 $\{Q_s\}$ 对应的插值误差集 $\{\varepsilon_s\}$, 且 $\{Q_s\}$ 与所有参与插值的数据点集 $\{Q_j\}$ 并无交集. $\{Q_j\}$ 中每相邻 2 个数据点间可能存在若干个未参与插值数据点, 比较这些数据点对应的插值误差, 选取出最大值 $\varepsilon_{\max}$ 与预设插值误差 ε 进行比较: 如果 $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon$, 在该相邻插值数据点间不添加新特征数据点, 反之需将与 $\varepsilon_{\max}$ 对应的数据点添加到插值特征数据点集中.

对添加新特征数据点后的插值数据点集, 再次构造出一条新的非均匀 B 样条插值曲线, 使用第 3.4 节中的方法计算插值误差, 再次更新插值数据点集.

重复上述过程, 直到所有未参与插值数据点对应的插值误差均不大于预设插值误差为止.

3.6 非均匀 B 样条曲线插值流程

综合第 2 节中基于曲率自适应的插值特征数据点的初选取方法、基于数据点插值计算的非均匀

B 样条曲线构造方法以及基于插值误差计算的新插值数据点添加方法, 将本文提出的非均匀 B 样条曲线插值流程概括总结如图 5 所示.

图 5 非均匀 B 样条曲线插值流程

4 实际数据计算结果与对比分析

4.1 插值误差计算的准确性分析

本文提出的数据点非均匀 B 样条曲线插值方法中, 对于未参与插值的数据点取舍的重要依据是该数据点处的插值误差. 因此, 该误差计算的准确程度将对本文的非均匀 B 样条曲线插值的最终结果有较大的影响.

为验证本文提出的插值误差计算方法的准确性和可行性, 首先给定一组待插值数据点集 $\{Q_j\}$ 和该组数据点外的待测点 Q , 其中, 待测点 Q 的空间坐标为 (11.5929, 4.6500, 6.3010); 各插值数据点 Q_j 的空间坐标如表 1 所示.

使用第 3 节的非均匀 B 样条曲线插值方法对 $\{Q_j\}$ 进行插值, 插值后的非均匀 B 样条曲线、各插值数据点 Q_j 和待测点 Q 的位置关系如图 6 所示.

表 1 非均匀 B 样条曲线插值数据点 mm

序号	插值数据点 $\{Q_j\}$ 坐标		
	X	Y	Z
1	0.0000	4.6500	4.9750
2	1.9743	4.6500	4.7901
3	3.9680	4.6500	4.9110
4	5.9108	4.6500	5.3828
5	7.7814	4.6500	6.0501
6	9.5064	4.6500	5.6536
7	11.3929	4.6500	4.8010
8	12.9686	4.6500	3.8484
9	14.7736	4.6500	3.0845
10	16.7677	4.6500	3.2557
11	18.5153	4.6500	4.1447
12	20.0000	4.6500	5.3625

图 6 插值误差计算示意图

使用本文的插值误差计算方法, 以及现有的邻域比较法^[11]和逐步扫描法^[20]分别计算了待测点 Q 到非均匀 B 样条插值曲线的距离, 各种方法最小距离及计算耗时的计算结果比较如表 2 所示.

表 2 3 种方法的计算结果比较

方法	最小距离/mm	计算耗时/s
邻域比较 ^[11]	1.5417	9.49
逐步扫描 ^[20]	1.5717	9.53
本文	1.5384	9.51

将使用 UG/NX 软件计算获得的最小距离 1.5376 mm 作为最小距离的理论值. 由表 2 可知, 3 种计算方法均能得到近似最小距离, 在计算耗时相当的情况下, 邻域比较法、逐步扫描法以及本文方法的计算精度(即计算得到的最小距离与理论最小距离之间的差值)分别为 0.0041 mm, 0.0341 mm 和 0.0008 mm. 可见, 使用本文计算得到的最小距

离更接近标准参考值,比现有方法具有计算精度较高的优势,能更准确地表达非均匀 B 样条曲线插值的误差.因此,本文方法应用于实际插值误差的计算是可行的.

4.2 非均匀 B 样条曲线插值结果对比验证

图 7 中,由原始密集数据点共同构成了一只外形轮廓为杯子形状的原始数据点集,该点集中共有 408 个离散数据点,通过所有离散数据点进行非均匀 B 样条插值,可获得杯子外轮廓的非均匀 B 样条插值曲线.

图 7 原始数据点的非均匀 B 样条插值曲线

利用式(3)(4)计算所有原始数据点处的曲率,曲率计算结果如图 8 所示.

图 8 所有原始数据点处的曲率

为验证本文方法的有效性,在预设插值误差为 $\varepsilon=0.0020\text{mm}$ 的条件下进行了非均匀 B 样条曲线插值.分别使用文献[12]方法和文献[16]方法以及本文方法进行数据仿真对比分析,比较说明各种方法在 $\varepsilon=0.0020\text{mm}$ 的约束条件下在曲线重建效果方面的表现能力,选取初始特征点,并对它们插值或逼近的曲线重建,获得的初始特征点和重建曲线如图 9 所示.

a. 文献[12]

b. 文献[16]

c. 本文

图 9 不同方法选取初始特征点和重建曲线

由图 9 可知,3 种方法均能在一定程度上剔除部分数据点不参与样条曲线插值.参照图 8 可以看出,3 种方法初始选取的特征点数量大致相当,但本文方法与对比方法最明显的区别是参与插值的初始特征点较集中的区域具有明显的曲率值较大的特征.但它们获得的重建曲线与图 7 所示的所有数据点参与插值重建的曲线有部分形状不吻合的情况,这也正好体现在了图 10 所示的初始重建曲线插值或逼近误差方面.

图10 不同方法的初始重建曲线的插值或逼近误差

对比分析图10所示的3种方法插值或逼近误差可知,用文献[12,16]方法选取的特征点在重建初始B样条曲线时,均超过了预设逼近误差,最大逼近误差分别为0.00881 mm与0.00884 mm.上述结果应与文献[12]方法初始特征点集中在某些局部曲率极大值处、文献[16]方法初始选取特征点较为均匀等因素有一定关系.本文方法选取的初始特征点数最少,但同样存在局部曲线段插值误差大于预设插值误差的情况,最大插值误差为0.00744 mm.

为使插值或逼近误差不大于预设插值(逼近)

误差,需进行特征数据点的再次选取和更新及插值或逼近曲线的迭代计算.3种方法均经过数次更新和迭代计算后,分别得到了如图11所示最终特征数据点和重建曲线.同样,绘制3种方法的插值(逼近)误差曲线如图12所示,可以看出,经过多次更新和迭代计算后,文献[12,16]和本文方法的最大逼近误差分别降低到0.001847 mm,0.001598 mm与0.001284 mm,均符合预设逼近精度的要求.同时,各重建曲线的形状也基本与图7所示非均匀B样条插值曲线形状吻合.

图11 最终特征点和重建曲线

图 12 最终重建曲线的插值或逼近误差

在此之前, 本文在预设插值(逼近)误差 $\varepsilon=0.0020\text{mm}$ 的条件下, 用 3 种不同方法对离散数据点进行了 B 样条曲线插值或逼近的重建, 获得了在插值数据点、插值(逼近)误差等方面的对比结果; 它们在迭代计算次数、采样点个数(指参与曲线插值或逼近的特征数据点个数)及计算耗时等对比数据如表 3 所示。

表 3 $\varepsilon=0.0020\text{mm}$ 时 3 种方法的对比分析

方法	迭代次数	采样点个数	原始点总数	计算耗时/s
文献[12]	6	70	408	1176
文献[16]	4	69	408	1161
本文	5	49	408	1152

通过分析表 3 可知: (1) 文献[12]方法迭代计算的次数最多, 共需迭代计算 6 次才能达到预设逼近误差的要求, 相应的计算耗时最长; (2) 虽然文

献[16]方法迭代计算 4 次后即可使逼近误差低于预设逼近误差的要求, 但是由于计算最小距离的次数较多, 使得计算耗时并非最短, 而是介于本文与文献[12]方法之间; (3) 本文方法需要迭代计算 5 次可达到预设插值误差要求, 计算耗时为 3 种方法中最少。可见在达到相同插值(逼近)误差要求时, 本文方法在算法计算效率方面具有较大的优势。

相对于其他 2 种方法, 本文方法的另一个优势是: 最终选取参与曲线插值的采样点个数较少、被去除不参与曲线插值的非采样点个数较多。该优势对拥有海量原始刀位数据点的样条化数控加工编程具有较大的重要性, 这意味着含有样条插补代码的数控加工程序量将大大缩减, 可进一步提高数控系统的程序执行效率。

为更好地说明本文方法在保证插值精度条件下数据点去除量较其他 2 种方法有更大的优势, 将预设插值(逼近)误差分别设置为 0.0010mm 和 0.0001mm , 3 种方法在迭代次数、采样点个数及计算耗时等方面的数据对比结果如表 4 与表 5 所示。

表 4 $\varepsilon=0.0010\text{mm}$ 时 3 种方法的对比分析

方法	迭代次数	采样点个数	原始点总数	计算耗时/s
文献[12]	8	75	408	1215
文献[16]	6	75	408	1185
本文	6	52	408	1158

表 5 $\varepsilon=0.0001\text{mm}$ 时 3 种方法的对比分析

方法	迭代次数	采样点个数	原始点总数	计算耗时/s
文献[12]	19	99	408	1275
文献[16]	16	105	408	1305
本文	17	68	408	1218

可见, 降低预设插值(逼近)误差后, 3 种方法的迭代计算次数都在增加, 但是由于增加的最小距离计算次数不同, 导致它们计算耗时增加幅度也不同, 其中本文方法增幅最小, 计算耗时仍为最少。另外, 插值(逼近)精度要求的提高导致 3 种方法都会新增参与曲线插值数据点的数量, 但增加幅度不同, 本文方法的数量增幅比另外 2 种方法小, 继续保持了本文方法在数据点去除量较大方面的优势。

5 结 语

(1) 本文针对数控编程阶段生成的海量离散刀位数据, 在满足预设插值精度约束条件下, 提出

一种基于曲率自适应选取特征点的非均匀 B 样条曲线插值方法, 逻辑清晰且易于实现, 与现有方法相比, 其在选取较少数据点、去除较多数据点的基础上仍可获得较高的插值精度。

(2) 针对实际数控加工过程中海量刀位数据点需进行样条光顺处理问题, 本文方法可以将含有样条插补代码的数控加工程序量进行大幅缩减, 这对于提高数控系统加工程序执行效率具有重要作用和实际应用价值。

(3) 针对求解空间点到非均匀 B 样条曲线最小距离的问题, 本文提出了一种新型的计算空间离散数据点到非均匀 B 样条曲线距离的求解方法, 并通过实例验证了该方法的正确性, 且比现有方法具有更高的计算精度。

参考文献(References):

- [1] Zhang Meng, Li Yajuan, Deng Chongyang. Optimizing NURBS curves fitting by least squares progressive and iterative approximation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2020, 32(4): 568-574(in Chinese)
(张蒙, 李亚娟, 邓重阳. NURBS 曲线拟合的最小二乘渐进迭代逼近优化算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(4): 568-574)
- [2] Wu J C, Zhou H C, Tang X Q, *et al.* Implementation of CL points preprocessing methodology with NURBS curve fitting technique for high-speed machining[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 81: 58-64
- [3] Liang Fusheng. The key technology research in the CNC machining of complex surface with NURBS tool path[D]. Changchun: Jilin University, 2018(in Chinese)
(梁福生. 面向 NURBS 刀具轨迹的复杂曲面数控加工关键技术研究[D]. 长春: 吉林大学, 2018)
- [4] Wang Aizeng, He Chuan, Zhao Gang. A method of designing non-uniform cubic B-spline curve based on monotone curvature[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2020, 32(1): 140-146(in Chinese)
(王爱增, 何川, 赵罡. 基于曲率单调变化的空间非均匀三次 B 样条曲线的构造方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(1): 140-146)
- [5] Yeh S S, Hsu P L. Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(3): 229-237
- [6] Li W S, Xu S H, Zhao G, *et al.* Adaptive knot placement in B-spline curve approximation[J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(8): 791-797
- [7] He S S, Ou D J, Yan C Y, *et al.* A chord error conforming tool path B-spline fitting method for NC machining based on energy minimization and LSPIA[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2015, 2(4): 218-232
- [8] Wang Wenli. Research on NURBS adaptive interpolation algorithm for short line segments machining [D]. Jinan: Shandong University, 2015(in Chinese)
(王文莉. 针对小线段加工的 NURBS 自适应插补算法的研究[D]. 济南: 山东大学, 2015)
- [9] Yau H T, Wang J B. Fast Bezier interpolator with real-time lookahead function for high-accuracy machining[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2007, 47(10): 1518-1529
- [10] Zhang Li, Ge Xianyu, Tan Jieqing. Knot removing and smoothing method of generalized B-spline curves[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(4): 540-548(in Chinese)
(张莉, 葛先玉, 檀结庆. 广义 B 样条曲线的节点去除与光顺算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(4): 540-548)
- [11] Han Jiang, Jiang Benchu, Xia Lian, *et al.* A B-spline curve fitting algorithm based on contour key points[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(4): 423-431(in Chinese)
(韩江, 江本赤, 夏链, 等. 基于轮廓关键点的 B 样条曲线拟合算法[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(4): 423-431)
- [12] Jiang Benchu. Study on NURBS fitting and interpolation technology of five-axis tool path[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2016(in Chinese)
(江本赤. 五轴加工刀具路径的 NURBS 拟合及插补技术研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2016)
- [13] Yuan Jipeng. Research on adaptive NURBS curve fitting and its feedrate scheduling algorithm[D]. Jinan: Shandong University, 2019(in Chinese)
(袁佳鹏. 自适应的 NURBS 曲线拟合及其速度规划算法研究[D]. 济南: 山东大学, 2019)
- [14] Liu Mingzeng, Guo Qingjie, Wang Siqi. Adaptive B-spline curve fitting based on regularized progressive iterative approximation[J]. Journal of Graphics, 2018, 39(2): 287-294(in Chinese)
(刘明增, 郭庆杰, 王思奇. 基于正则渐进迭代逼近的自适应 B 样条曲线拟合[J]. 图学学报, 2018, 39(2): 287-294)
- [15] Yoshimoto F, Harada T, Yoshimoto Y. Data fitting with a spline using a real-coded genetic algorithm[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(8): 751-760
- [16] Park H, Lee J H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(6): 439-451
- [17] Zhou Hongmei, Wang Yanming, Liu Zhigang, *et al.* Non-uniform rational B-splines curve fitting based on the least control points[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(1): 73-77(in Chinese)
(周红梅, 王燕铭, 刘志刚, 等. 基于最少控制点的非均匀有理 B 样条曲线拟合[J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(1): 73-77)
- [18] Piegl L, Tiller W. Non-uniform rational B-spline[M]. Zhao Gang, Mu Guowang, Wang Lazhu, Translate. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2010(in Chinese)
(Piegl L, Tiller W. 非均匀有理 B 样条[M]. 赵罡, 穆国旺, 王拉柱, 译. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2010)
- [19] Zhou K, Wang G J, Jin H Z, *et al.* NURBS interpolation based on exponential smoothing forecasting[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2008, 39(11/12): 1190-1196
- [20] He Guangyu. Visual C++ commonly used numerical algorithm set[M]. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese)
(何光渝. Visual C++ 常用数值算法集[M]. 北京: 科学出版社, 2002)