

复化平面开普勒问题的单值性

孙善忠*, 尤鹏

首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: sunsz@cnu.edu.cn, you-peng@163.com收稿日期: 2020-04-30; 接受日期: 2020-08-04; 网络出版日期: 2020-XX-XX; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771303) 资助项目

摘要 受超对称量子场论和量子力学路径积分半经典分析的影响和天体力学中中心构型研究进展的启发, 我们复化了经典的平面开普勒问题, 并说明这是一个全纯的完全可积哈密顿系统. 和传统的平面开普勒问题不同, 我们进一步证明了这个全纯可积哈密顿系统存在非平凡的单值性, 并提出了一个关于单值化群的猜想以及进一步的研究设想.

关键词 开普勒问题 复化 周期格 单值性 全纯完全可积哈密顿系统

MSC (2010) 主题分类 14H15, 37J35, 37J38, 70F05, 70G55, 70H06

1 引言

三百年来关于开普勒问题研究的文献浩轶繁多. 人们从各个不同的角度对其进行了系统地研究, 很多漂亮的结构被揭示出来. 虽然研究日新, 开普勒问题还是有很多神秘之处有待进一步理解和发掘. 在本文中我们尝试复化开普勒问题.

如果考虑带有坐标 (x, y) 的平面 \mathbb{R}^2 上的质点运动, 用复变量 $z := x + iy \in \mathbb{C}$ 把 \mathbb{R}^2 和复平面 \mathbb{C} 等同起来会比较方便. 在 N -体问题尤其是开普勒问题中使用复变量是古老且优美的想法, 事实上柯西曾为了研究开普勒方程而发展了单变量复变函数理论. 在这里我们复化力学问题是指质点的坐标 $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ 而不是 \mathbb{R}^2 .

最近, Behtash 等 [1] 认为在超对称量子场论和量子力学路径积分的半经典分析中, 作用量和路径积分测度的复化对于得到模型正确的非扰动 (nonperturbative) 结构来说是必要的. 从这个观点看, 把经典力学中的牛顿方程复化得到复构型空间中的全纯牛顿方程是自然且有前景的. 他们声称全纯牛顿方程通过复化得到的包含多值解甚至奇异解在内的解对于保证半经典理论的一致性, 和解释诸如隐藏拓扑角 (hidden topological angle) 等有趣的物理性质以及在得到精确解的过程中令人瞩

英文引用格式: Sun S Z, You P. Monodromy of Complexified Planar Kepler Problem (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2018, 48: 1–13, doi: [10.1360/N012017-XXXX](https://doi.org/10.1360/N012017-XXXX)

目的含混性的再生抵消 (resurgent cancellation of ambiguities) 是必须的. 近期有很多物理文献涉及路径积分的复化及其动机 (参考 [1] 及文中参考文献).

事实上, 这个想法至少可以追溯到 Balian-Bloch[2], 他们利用复化作为一个计算工具得到了量子力学中薛定谔算子谱问题的精细结构. 对于进一步的发展及数学上的理解请参考 Pham[3].

回到天体力学中的 N - 体问题本身, Albouy 和 Kaloshin[4] 通过把平面 5- 体问题的每个坐标复化然后利用代数几何证明了平面五体问题中心构型数目的代数通有有限性, 复化在此起到了决定性的作用.

受量子物理和数学中进展的启发, 发展复化的经典力学并探讨全纯牛顿方程似乎是一件很自然的事情. 复化之后产生的新解同传统的 (实的) 牛顿方程之间的关系及其物理意义应该是十分有意思的问题. 除了复化调和振子这个十分基础的问题, 对我们来说下一个非平凡且最自然的例子就是复化的开普勒问题, 这是我们当前工作的一个主要动机.

在数学文献中, 关于复化牛顿系统仅有的参考文献是: Beukers-Cushman[5], Bates-Cushman[6], Bender-Hook-Kooner[7] 以及这些工作中的参考文献. 特别地, Bender-Hook-Kooner 通过大量的数值实验表明复化的经典力学系统可以展现出类似于量子隧穿的行为.

正如出现在量子分子光谱学中的具体例子所展示的那样, 完全可积的哈密顿系统中奇点的单值性 (monodromy) 具有量子效应. 关于分子光谱学一个有趣的例子见 Cushman, Dullin, Giacobbe, Holm, Joyeux, Lynch, Sadovskii, Zhilinskiĭ[8], 也请参看 Child 关于量子化学的工作 [9].

在本文中, 我们证明复化的开普勒问题是完全可积的全纯哈密顿系统, 也给出了能量动量映射 (简称能动映射, energy-momentum map) 正则纤维上的周期格 (period lattice) 和单值性 (monodromy), 相比于传统的实的开普勒问题这是一个全新的现象.

本文安排如下: 在第二节中我们简要回顾了经典平面开普勒问题; 在第三节中我们将其复化, 使其成为全纯哈密顿系统, 同时也建立了李群 $SO(2, \mathbb{C})$ 的哈密顿作用和相应的能动映射的几何性质; 然后在第四节中通过重写辛形式得到全纯形式 ω_1, ω_2 并且考虑广义的阿贝尔 - 雅可比映射导出能动映射光滑纤维上的周期格; 本文的主要结果在第五节中, 通过显式构造积分路径, 我们证明了存在非平凡的单值性, 这与经典开普勒问题完全不同; 最后在第六节, 我们给出了单值化群 (monodromy group) 的一个猜想, 也讨论了若干进一步的研究方向.

2 经典平面开普勒问题

我们首先回顾经典的平面开普勒哈密顿系统, 详细内容请参考 [10]. 在相空间 $T_0\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ 中取坐标 (x_1, x_2, y_1, y_2) 以及辛形式 $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$, 并考虑开普勒哈密顿函数

$$H : T_0\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

相空间 $T_0\mathbb{R}^2$ 中开普勒向量场 X_H 的积分曲线满足方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\|x\|^{-3}, \end{aligned}$$

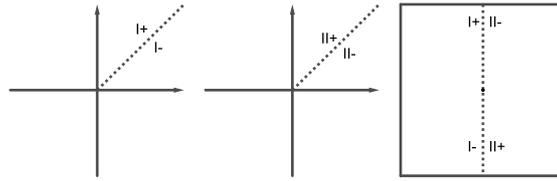


图 1 对于固定的 $\xi_2 (\neq 0)$, 把 I 和 II 粘起来.

其中 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

哈密顿向量场 X_H 有如下著名的首次积分: 哈密顿函数, 也就是总能量

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

和角动量

$$J(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

$2n$ 维光滑辛流形 (M, ω) 上的哈密顿系统 (M, ω, f_1) 称为 n 自由度刘维尔可积系统, 如果存在函数 f_1, \dots, f_n 使得它们是泊松交换的, 也就是 $\{f_i, f_j\} = 0, \forall 0 \leq i, j \leq n$, 且函数的微分在流形 M 的一个稠开集上是线性独立的, 以及这些函数对应的哈密顿向量场 X_{f_i} 是完备的. 由定义可知 $(T_0\mathbb{R}^2, \omega, H, J)$ 是刘维尔可积系统.

3 复化平面开普勒问题

在这一节中, 我们复化平面开普勒问题得到复哈密顿系统, 并给出能动映射.

我们从复化平面开普勒问题开始. 第一步, 在开普勒哈密顿函数 $H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ 中需要计算 $x_1^2 + x_2^2$ 的平方根. 就像在复分析里我们构造 \sqrt{z} 的黎曼曲面作为 \sqrt{z} 的极大定义域以消除多值性一样, 这里我们“加倍 (x, y) 构型空间”使得函数 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 是单值全纯的.

我们取两个 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$, 一个记做 Q_I , 另一个记做 Q_{II} . 为了方便, 我们引入新的坐标 $\xi_1 = x_1 + ix_2, \xi_2 = x_1 - ix_2$. 分别把 Q_I 和 Q_{II} 沿着 $x_1^2 + x_2^2 = \xi_1 \xi_2 = t \in \mathbb{R}_{<0}$ “剪开”: 对于固定的 $\xi_2 (\neq 0)$, 我们在 Q_I 和 Q_{II} 中得到两个 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 分别记做 I 与 II , 将 I 和 II 沿着半直线 $\xi_1 = t\xi_2^{-1}, t < 0$ 剪开, 得到 I_{\pm}, II_{\pm} . 分别将 I_+ 与 II_-, I_- 与 II_+ 粘起来, 如图 1 所示. 令 ξ_2 变化, 我们得到了粘合的空间 $Q = Q_I \amalg Q_{II}$. 之后我们使用下标 k 来表示 $(x_1, x_2)_k$ 在 Q_k 中, $k = I, II$.

构型空间 Q 是一个复 2- 维流形. 相空间 $M = T^*Q$ 是一个平凡丛. 进一步 M 是一个全纯的辛流形, 它上面的辛形式在坐标 (x_1, x_2, y_1, y_2) 下可以写成

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

此时哈密顿函数 $H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ 在 M 上有意义且全纯. 复化后的平面开普勒问题为全纯哈密顿系统 (M, ω, H) .

群

$$SO(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

以如下方式作用在 M 上

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : SO(2, \mathbb{C}) \times M &\rightarrow M; \\ (A, ((x_1, x_2)_k, (y_1, y_2))) &\mapsto \left(\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)_k, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), k = I, II. \end{aligned}$$

群作用 $\tilde{\Phi}$ 保持哈密顿函数 H 不变. 类似于通常实的平面开普勒问题, $\tilde{\Phi}$ 是 $SO(2, \mathbb{C})$ 作用在全纯辛流形 (M, ω) 上的哈密顿作用, 其矩映射 (momentum map) 是复化的角动量

$$J(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

类似于实的情形, (M, ω, H, J) 在全纯意义下仍是刘维尔完全可积系统.

为了简便, 我们使用 M 上的坐标 $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$:

$$\xi_1 = x_1 + ix_2, \quad \xi_2 = x_1 - ix_2, \quad \eta_1 = y_1 + iy_2, \quad \eta_2 = y_1 - iy_2.$$

需注意 $\xi_1 \neq 0$ 且 $\xi_2 \neq 0$, 这是因为 $\xi_1 \xi_2 = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. 在新坐标下 $SO(2, \mathbb{C})$ -作用 $\tilde{\Phi}$ 变成 \mathbb{C}^* -作用

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}^* \times M &\rightarrow M; \\ (\lambda, ((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2))) &\mapsto ((\lambda \xi_1, \lambda^{-1} \xi_2)_k, (\lambda \eta_1, \lambda^{-1} \eta_2)), k = I, II, \end{aligned}$$

其中 $\lambda = a + ib$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{C})$. 群元素 λ 作用在点 P 上记为 $\Phi_\lambda(P)$.

于是有

命题3.1 1. \mathbb{C}^* -作用自由且逆紧 (proper).

2. 映射

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^4; ((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2)) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_4), k = I, II.$$

是 \mathbb{C}^* -作用 Φ 的商映射 $M \rightarrow M/\mathbb{C}^*$, 其中

$$c_1 = \begin{cases} \sqrt{\xi_1 \bar{\xi}_2}, & (\xi_1, \xi_2)_I \in Q_I, \\ -\sqrt{\xi_1 \bar{\xi}_2}, & (\xi_1, \xi_2)_{II} \in Q_{II}, \end{cases}$$

$$c_2 = \xi_1 \eta_2,$$

$$c_3 = \frac{i}{2}(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1),$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{c_1}.$$

3. 映射 π 的像是 \mathbb{C}^4 的子集 R :

$$\{(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{C}^4 : 2c_4c_1^2 + 2c_1 = c_2^2 + 2ic_3c_2, c_1 \neq 0\}.$$

注意到 c_4 和 c_3 就是在新坐标下的哈密顿函数和角动量.

4. 映射 $\pi : M \rightarrow R$ 是 R 上 \mathbb{C}^* - 丛的投影映射.

证明 1. 若 $((\lambda\xi_1, \lambda^{-1}\xi_2)_k, (\lambda\eta_1, \lambda^{-1}\eta_2)) = ((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2))$, 因为 $\xi_1 \neq 0$ 于是我们有 $\lambda = 1$. 因此 \mathbb{C}^* 自由地作用在 M 上.

作用 Φ 是逆紧的当且仅当对 M 的任意紧子集 $K, L = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : K \cap \Phi_\lambda(K) \neq \emptyset\}$ 是紧子集. 因为 K 是紧的, 存在两个正数 $\rho_1 < \rho_2$ 使得 K 上的点满足 $\rho_1 < |\xi_i| < \rho_2, i = 1, 2$. 对于任意的 $\lambda \in L$, 存在一点 $((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2))$ 使得 $((\lambda\xi_1, \lambda^{-1}\xi_2)_k, (\lambda\eta_1, \lambda^{-1}\eta_2))$ 也在 K 中. 因此 $|\xi_1| < \rho_2, |\xi_2| < \rho_2, \rho_1 < |\lambda\xi_1|, \rho_1 < |\lambda^{-1}\xi_2|$, 我们得到了 $\frac{\rho_1}{\rho_2} < |\lambda| < \frac{\rho_2}{\rho_1}$. 若 $\lambda_n \in L \rightarrow \lambda$, 则存在 $P_n \in K$ 使得 $\Phi_{\lambda_n}(P_n) \in K$. 因为 K 是紧的, 于是有 $\{P_n\}_{n \geq 1}$ 的子列收敛到 K 中的一点 P , 我们仍用 $\{P_n\}_{n \geq 1}$ 表示该子列. 由于 Φ 的连续性和 K 的紧性, 得到 $\Phi_\lambda(P) \in K$. 最终有 L 是紧的.

2. 由映射 π 的定义, M 上的点满足下列等式

$$\begin{aligned} \xi_1\xi_2 &= c_1^2, \\ \xi_1\eta_2 &= c_2, \\ \xi_2\eta_1 &= c_2 + 2ic_3, \\ \eta_1\eta_2 &= 2c_4 + \frac{2}{c_1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

令 (c_1, c_2, c_3, c_4) 是映射 π 的像点, 若两个点 $((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2)), ((\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)_{\tilde{k}}, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2))$ 都映射到 (c_1, c_2, c_3, c_4) , 我们有 $k = \tilde{k}, \xi_1\xi_2 = \tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2, \xi_1\eta_2 = \tilde{\xi}_1\tilde{\eta}_2, \xi_2\eta_1 = \tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_1$. 于是存在唯一的 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 使得 $\tilde{\xi}_1 = \lambda\xi_1, \tilde{\xi}_2 = \lambda^{-1}\xi_2, \tilde{\eta}_1 = \lambda\eta_1, \tilde{\eta}_2 = \lambda^{-1}\eta_2$. 注意到 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 在 \mathbb{C}^* - 作用 Φ 下保持不变, 我们可以看到点 (c_1, c_2, c_3, c_4) 在映射 π 下的逆像恰好是一条 \mathbb{C}^* - 轨道.

3. 恒等式 $(\xi_1\xi_2)(\eta_1\eta_2) = (\xi_1\eta_2)(\xi_2\eta_1)$ 以及公式 (3.1) 给出

$$2c_4c_1^2 + 2c_1 = c_2^2 + 2ic_3c_2, c_1 \neq 0. \tag{3.2}$$

取满足条件 (3.2) 的 (c_1, c_2, c_3, c_4) , 易见

$$\left((1, c_1^2)_k, \left(\frac{c_2 + 2ic_3}{c_1^2}, c_2 \right) \right), k = \begin{cases} I, & -\frac{\pi}{2} < \arg c_1 \leq \frac{\pi}{2}, \\ II, & \frac{\pi}{2} < \arg c_1 \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

是 (c_1, c_2, c_3, c_4) 在映射 π 下的一个原像点.

4. 这源于如下一般事实: 当李群 \mathbb{C}^* 自由且逆紧地作用在复流形 N 上时, 商映射 $N \rightarrow N/\mathbb{C}^*$ 就是 N/\mathbb{C}^* 上的 \mathbb{C}^* - 丛的投影映射. 当 $N = M$ 时, 这依然成立. \square

对于任意固定的 $c = (c_3, c_4)$, 我们考虑代数曲线

$$2c_4c_1^2 + 2c_1 = c_2^2 + 2ic_3c_2.$$

容易验证, 曲线是光滑的当且仅当 c 不在判别式 Δ 内, 其中

$$\Delta = \{(c_3, c_4) \in \mathbb{C}^2 : 1 + 2c_4c_3^2 = 0\}.$$

我们将代数曲线稍微变形, 得到

$$2c_4c_1^2 + 2c_1 - c_3^2 = (c_2 + ic_3)^2. \quad (3.3)$$

把曲线分为三种情形讨论:

1. 若 $c_4 = 0$, 曲线方程为

$$2c_1 - c_3^2 = (c_2 + ic_3)^2.$$

此时曲线同胚于 \mathbb{C} .

2. 若 $c_4 \neq 0$ 且曲线 (3.3) 左边的判别式 $4 + 8c_4c_3^2 \neq 0$, 则曲线方程为

$$2c_4(c_1 - r)(c_1 - s) = (c_2 + ic_3)^2, r \neq s.$$

此时曲线同胚于 \mathbb{C}^* .

3. 若 $c_4 \neq 0$ 且曲线 (3.3) 左边的判别式 $4 + 8c_4c_3^2 = 0$, 则曲线方程为

$$2c_4\left(c_1 + \frac{1}{2c_4}\right)^2 = (c_2 + ic_3)^2.$$

此时曲线同胚于锥面.

在前两种情形中, 曲线是光滑的; 在第三种情形中, 曲线是奇异的.

对于任意固定的 $c = (c_3, c_4)$, 记 R_c 为代数曲线 (3.3) 去掉 $c_1 = 0$ 的点, 即:

$$\{(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 : 2c_4c_1^2 + 2c_1 = c_2^2 + 2ic_3c_2\} \setminus \{(0, 0), (0, -2ic_3)\}.$$

定义3.1 我们称映射

$$EM : M \rightarrow \mathbb{C}^2; ((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2)) \mapsto (c_3, c_4), k = I, II$$

为能量角动量映射 (简称能动映射), 其中 c_3, c_4 见命题 3.1. 记 M_c 为能动映射的 c -水平集.

4 周期格

在这一节里我们得到复平面开普勒能动映射光滑纤维上的周期格.

首先, 在 M 上选择一组好的坐标, 并将辛形式在这组坐标下改写. 取 M 上的开子集

$$V := \{((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2)) \in M, k = I, II : c_2 + ic_3 \neq 0\}.$$

变量 (ξ_1, c_1, c_3, c_4) 可以作为 V 内每一点 p 的局部坐标, 这是因为条件 $c_2 + ic_3 \neq 0$ 蕴含 p 处坐标之间的雅克比矩阵是非奇异的. 现在我们用新坐标改写辛形式.

命题 4.1 M 上的辛形式 ω 限制在 V 上是

$$\left(\left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 + \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1 \right) \wedge dc_3 + \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 \wedge dc_4.$$

证明 M 上的典则辛形式 ω 可以写为

$$\frac{1}{2}(d\xi_2 \wedge d\eta_1 + d\xi_1 \wedge d\eta_2).$$

因为在 V 上有下列等式成立,

$$\xi_2 = \frac{c_1^2}{\xi_1}, \quad \eta_1 = \frac{c_2 + 2ic_3}{\xi_2} = \frac{(c_2 + 2ic_3)\xi_1}{c_1^2}, \quad \eta_2 = \frac{c_2}{\xi_1},$$

我们得到

$$\begin{aligned} d\xi_2 &= \frac{2c_1}{\xi_1} dc_1 + \frac{-c_1^2}{\xi_1^2} d\xi_1, \\ d\eta_1 &= \frac{\xi_1}{c_1^2} dc_2 + \frac{2i\xi_1}{c_1^2} dc_3 + \frac{c_2 + 2ic_3}{c_1^2} d\xi_1 + \frac{-2(c_2 + 2ic_3)\xi_1}{c_1^3} dc_1, \end{aligned}$$

以及

$$d\eta_2 = \frac{1}{\xi_1} dc_2 + \frac{-c_2}{\xi_1^2} d\xi_1.$$

因此

$$\omega|_V = \frac{1}{c_1} dc_1 \wedge dc_2 + \frac{2i}{c_1} dc_1 \wedge dc_3 + \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1 \wedge dc_3.$$

对等式 $c_2^2 + 2ic_3c_2 = 2c_4c_1^2 + 2c_1$ 两边求微分得到

$$dc_2 = \frac{2c_4c_1 + 1}{c_2 + ic_3} dc_1 + \frac{-ic_2}{c_2 + ic_3} dc_3 + \frac{c_1^2}{c_2 + ic_3} dc_4,$$

最后将其带入 $\omega|_V$ 有

$$\omega|_V = \left(\left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 + \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1 \right) \wedge dc_3 + \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 \wedge dc_4.$$

□

令

$$\omega_1 = \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 + \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1, \quad \omega_2 = \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1.$$

微分形式 ω_1, ω_2 定义在 M_c 上 $c_2 + ic_3 \neq 0$ 的区域并且可以全纯地延拓到 M_c 上. 事实上, 3-形式 $\omega_1 \wedge dc_3 \wedge dc_4 = \omega \wedge dc_4$ 和 $\omega_2 \wedge dc_4 \wedge dc_3 = \omega \wedge dc_3$ 在 M 上是全纯的. 我们下文仍用 ω_1 与 ω_2 表示扩展后的 1-形式.

下面我们构造 M_c 上的格. 设 $c \notin \Delta$, 固定 M_c 上一点 p_0 并考虑阿贝尔 - 雅可比映射

$$AJ : M_c \rightarrow \mathbb{C}^2 : p \mapsto \left(\int_{\gamma} \omega_1, \int_{\gamma} \omega_2 \right),$$

其中 γ 为 M_c 上从 p_0 到 p 的道路. 由于 ω_1 和 ω_2 是闭形式, 映射 AJ 只依赖于道路 γ 的同调类.

映射 AJ 是多值的, 这是因为 p_0 与 p 可以被不同调的两条道路连接, 设为 γ 和 $\tilde{\gamma}$. 这两条道路
在映射 AJ 下的差为向量 $(\int_{\Gamma} \omega_1, \int_{\Gamma} \omega_2)$, 其中 Γ 是一条闭道路, 先正向走过 γ , 再逆向走过 $\tilde{\gamma}$. 因此映
射 AJ 的多值性由向量 $(\int_{\Gamma} \omega_1, \int_{\Gamma} \omega_2)$ 决定, 其中 Γ 取自同调群 $H_1(M_c, \mathbb{Z})$. 令

$$L_c = \left\{ \left(\int_{\Gamma} \omega_1, \int_{\Gamma} \omega_2 \right) \in \mathbb{C}^2 : \Gamma \in H_1(M_c, \mathbb{Z}) \right\}.$$

当 $c_3 \neq 0$ 时, M_c 与 R_c 的一阶同调群分别为 $\mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^3$.

定理4.1 令 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为 $H_1(R_c, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$ 的 \mathbb{Z} -基, 其中 γ_1 是代数曲线 $2c_4c_1^2 + 2c_1 = c_2^2 + 2ic_3c_2$
一阶同调群的生成元. 令

$$\mu = \int_{\gamma_1} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1, \quad \nu = \int_{\gamma_1} \left(\frac{c_1}{c_2 + ic_3} \right) dc_1.$$

则 L_c 是 \mathbb{C}^2 中的格, 称之为周期格. L_c 的 \mathbb{Z} -秩是 2, 其生成向量为

$$(\mu, \nu), (2\pi, 0).$$

证明 点 $(c_1, c_2) = (0, -2ic_3)$ 是 R_c 上微分形式 $\left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1$ 的可去奇点, 于是有

$$\int_{\gamma_3} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 = 0.$$

点 $(c_1, c_2) = (0, 0)$ 是 R_c 上微分形式 $\left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1$ 的一阶极点, 若 $c_3 \neq 0$, 极点 $(0, 0)$ 的留数
为 $2i$, 于是

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 = -4\pi.$$

若 $c_3 = 0$, 极点 $(0, 0)$ 的留数为 i , 于是

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 = -2\pi.$$

映射

$$M_c \rightarrow R_c \times \mathbb{C}^* : ((\xi_1, \xi_2)_k, (\eta_1, \eta_2)) \mapsto (c_1, c_2, \xi_1)$$

是微分同胚. 令 Γ 为 M_c 上的闭道路. 不失一般性, 我们假设 Γ 落在 $M_c \cap V$ 上. 投射 π 将曲线 Γ 投
在 R_c 上的像同调于 $n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3$. 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega_2 &= \int_{\pi(\Gamma)} \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 \\ &= n_1 \int_{\gamma_1} \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 + n_2 \int_{\gamma_2} \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 + n_3 \int_{\gamma_3} \frac{c_1}{c_2 + ic_3} dc_1 \\ &= n_1 \nu \end{aligned}$$

与

$$\int_{\Gamma} \omega_1 = \int_{\Gamma} \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1 + \int_{\pi(\Gamma)} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Gamma} \frac{-i}{\xi_1} d\xi_1 + n_1 \int_{\gamma_1} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 \\
 &\quad + n_2 \int_{\gamma_2} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 + n_3 \int_{\gamma_3} \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1 \\
 &= n_1 \mu + 2m\pi,
 \end{aligned}$$

其中 m 是某个整数. 最后的等号成立是因为我们可以令 Γ 绕 $\xi_1 = 0$ 任意多圈. □

5 单值性

在这一节里我们证明复化的平面开普勒问题具有非平凡的单值性. 更确切地说, 当沿着非平凡闭路绕判别式 Δ 或 c_3 轴旋转时, 就会有单值性.

5.1 绕判别式 Δ 的单值性

详细地说, 我们要证明 $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ 中存在非平凡的闭路 Γ , 使得 Γ 上的周期格丛

$$\phi : \prod_{c \in \Gamma} L_c \rightarrow \Gamma$$

有分类映射 (classifying map) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

定理 5.1 将 R_c 上的微分形式 ω_1 和 ω_2 的周期作为 $c = (c_3, c_4)$ 的解析函数. 那么在 c -空间 $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ 中存在闭道路 Γ , 使得当沿着 Γ 延拓一圈时, $\alpha = \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2 + ic_3)} \right) dc_1$ 的周期变成了 $-4\pi - \int_{\gamma} \alpha$, ω_2 的周期变成相反数.

证明 证明的想法是把曲线 R_c 正规化为 $2u(u-1) = v^2$, 然后沿着一条 $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ 中的曲线 Γ 计算 α 与 ω_2 的周期变化.

若 $(c_3, c_4) \notin \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ 且 $c_4 \neq 0$, 曲线有如下形式

$$2c_4(c_1 - r)(c_1 - s) = (c_2 + ic_3)^2,$$

其中 $r = \frac{-1 - \sqrt{1 + 2c_3^2 c_4}}{2c_4}$, $s = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2c_3^2 c_4}}{2c_4}$. 将变换

$$c_1 = (s - r)u + r, \quad c_2 = (s - r)\sqrt{c_4}v - ic_3$$

带入上式, 得到方程 $2u(u-1) = v^2$. 相同的变换下, 1- 形式 α 与 ω_2 变换为

$$\alpha = \left(\frac{i}{u - \frac{-r}{s-r}} + \frac{-c_3}{\sqrt{c_4}(s-r)v(u - \frac{-r}{s-r})} \right) du, \quad \omega_2 = \left(\frac{s-r}{\sqrt{c_4}} \frac{u - \frac{-r}{s-r}}{v} \right) du.$$

α 的极点 $(0, 0)$ 变成点 $(\frac{-r}{s-r}, \frac{ic_3}{(s-r)\sqrt{c_4}})$.

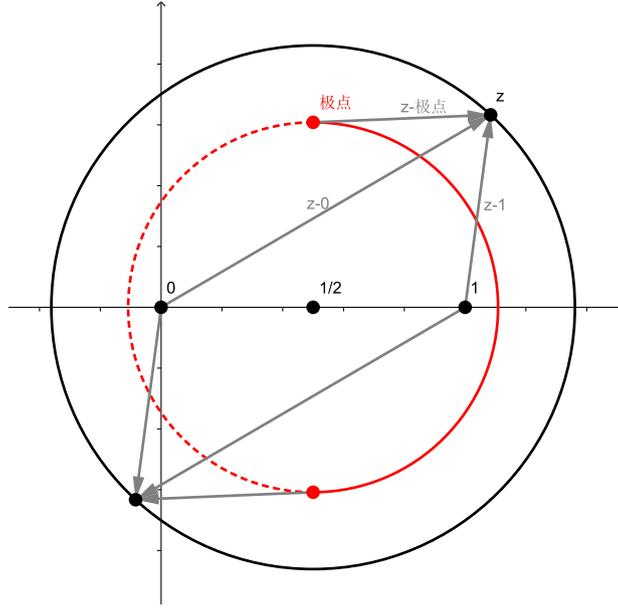


图 2 绕判别式 Δ 时, 在 u - 平面上计算周期的变化. 当沿着 Γ 旋转时, 红色实线是极点的轨迹, 外部黑色的圆是为计算一族周期而选择的同一闭路 γ .

取 Δ 上一点 $(1, \frac{1}{2})$, 再取复平面 $\{(c_3, c_4) \in \mathbb{C}^2 \mid c_3 = 1\}$ 上以点 $(1, \frac{1}{2})$ 为心 $r_1 (< \frac{1}{2})$ 为半径的圆 Γ . 在 Γ 上, α 和 ω_2 的周期是

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \left(\frac{i}{u - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}})} + \frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}} \frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}})} \right) du$$

与

$$\int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} \left(\frac{\sqrt{1+2c_4}}{c_4\sqrt{c_4}} \frac{u - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}})}{\sqrt{2u(u-1)}} \right) du.$$

如图 2 所示, 令 c_4 绕 Γ 一圈时, α 的极点 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}$ 在 u - 平面上以 $\frac{1}{2}$ 为心 $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$ 为半径绕半圈. 在 u - 平面上, 选择 γ 为以 $\frac{1}{2}$ 为心半径大于 $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$ 的圆, 我们得到

$$\int_{\gamma} \alpha = -2\pi + \frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}})} \right) du.$$

当沿着 Γ 绕一圈后, 积分 $\int_{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}})} \right) du$ 没有改变, 但是 $\frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}}$ 改变了符号, 最终 $\int_{\gamma} \alpha$ 变为 $-4\pi - \int_{\gamma} \alpha$. 同理, 在解析延拓后 $\int_{\gamma} \omega_2$ 改变了符号. \square

5.2 绕 c_3 的单值性

在这一小节中, 我们要证明 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(c_3, c_4 = 0) : c_3 \in \mathbb{C}\}$ 中存在非平凡的闭路, 使得 Γ 上的周期格丛

$$\phi : \coprod_{c \in \Gamma} L_c \rightarrow \Gamma$$

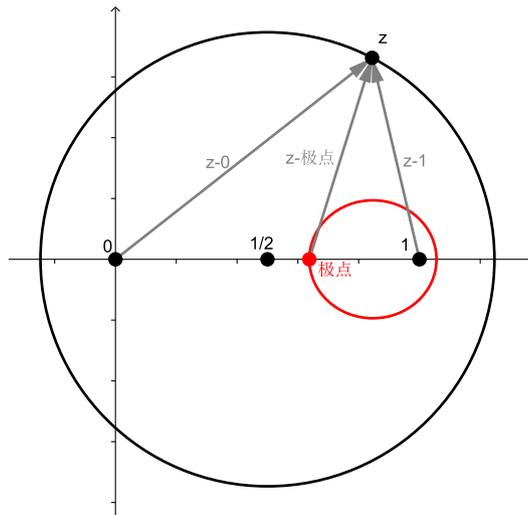


图 3 绕 c_3 轴旋转时, 在 u - 平面中计算周期的变化.

有分类映射 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

定理 5.2 考虑 R_c 上的微分形式 ω_1 和 ω_2 的周期作为 $c = (c_3, c_4)$ 的解析函数. 那么在 c - 空间 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(c_3, 0) : c_3 \in \mathbb{C}\}$ 中存在闭道路 Γ , 使得当沿着 Γ 延拓一圈时, $\alpha = \left(\frac{i}{c_1} + \frac{-c_3}{c_1(c_2+ic_3)}\right) dc_1$ 的周期变成了 $-4\pi - \int_\gamma \alpha$, ω_2 的周期变成相反数.

证明 定理的证明类似于定理 5.1, 这里仅给出关键点与主要不同.

定理 5.1 证明中构造的变换在此处依然可以使用. 取 $\{(c_3, 0) : c_3 \in \mathbb{C}\}$ 上一点 $(1, 0)$, 再取以该点为心半径小于 $\frac{1}{2}$ 的圆 Γ . α 与 ω_2 的周期是

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \left(\frac{i}{u - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}\right)} + \frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}} \frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}\right)} \right) du$$

与

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \left(\frac{\sqrt{1+2c_4}}{c_4\sqrt{c_4}} \frac{u - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}\right)}{\sqrt{2u(u-1)}} \right) du.$$

如图 3 所示, 令 c_4 沿着 Γ 旋转时, α 的极点 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}$ 在一条圈住 1 的闭路上转圈. 在 u - 平面上, 选 γ 为以 $\frac{1}{2}$ 为心半径充分大 (包含所有的极点即可) 的圆, 我们有

$$\int_\gamma \alpha = -2\pi + \frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}} \int_\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}\right)} \right) du.$$

当沿 Γ 转一圈后, 积分 $\int_\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{2u(u-1)}} \frac{1}{u - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+2c_4}}\right)} \right) du$ 没有改变, 但是 $\frac{-\sqrt{c_4}}{\sqrt{1+2c_4}}$ 改变了符号, 于是 $\int_\gamma \alpha$ 变成了 $-4\pi - \int_\gamma \alpha$. 同理, 在解析延拓后 $\int_\gamma \omega_2$ 改变了符号. \square

6 结论与展望

正如我们所看到的, 由于在判别式 Δ 上水平集 M_c 有奇性以及 c_3 轴上水平集 M_c 的退化性导致了单值性的存在. 在这两种情形中, 我们分别构造了绕判别式 Δ 和 c_3 轴的闭曲线并证明存在非平凡的单值性. 我们发现两种情形下的单值性是相同的. 事实上, 我们可以构造同时包含判别式 Δ 与 c_3 轴的闭曲线, 其单值性是平凡的 (因为周期的代数加性, 单值性效应抵消了). 尽管我们没能证明, 但我们倾向于相信奇异集的基本群

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (\{(c_3, c_4) \in \mathbb{C}^2 | 1 + 2c_4c_3^2 = 0\} \cup \{(c_3, c_4) \in \mathbb{C}^2 | c_4 = 0\})) \cong \mathbb{Z}^2.$$

如果我们的猜想是正确的, 那么复化平面开普勒问题的单值群是

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

下一步我们应当去理解非平凡单值性的动力学意义. 举例来说, 正如量子分子光谱学所提示的, 这是否有量子力学的含义? 关于单值化矩阵的幂么性来说, 是否有物理的解释? 复化的开普勒问题的单值性显示了与量子行为有联系的可能性.

也许我们能从复化的观点获益更多, 例如开普勒问题正则化过程中正负能量的统一, 我们将继续研究这个问题.

复化的 3- 维开普勒问题可能是一个更有意思的问题. 正如大家所熟知的, 因为 $SO(4)$ 对称, 经典的空间开普勒问题还有一个运动常数 — 离心率向量 (Laplace-Runge-Lenz 向量). 这对氢原子谱问题有深远的意义.

注意到复化开普勒问题以及其他复化的经典力学问题的相空间有着漂亮的几何, 这些相空间是全纯的辛流形 — 亦称为 hyperKähler 流形 [11]. 全纯牛顿方程的动力学与相空间的几何之间的相互作用也将会是一个吸引人的方向.

致谢 特别感谢审稿人、李镛博士、法国昂热大学 Volodya Roubtsov 教授、法国巴黎天文台 David Sauzin 教授提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Behtash A, Dunne G V, Schäfer T, Sulejmanpasic T, Ünsal M. Toward Picard-Lefschetz theory of path integrals, complex saddles and resurgence. *Annals of Mathematical Sciences and Applications*, 2017, 2: 95–212.
- 2 Balian R, Bloch C. Solutions of the Schrödinger equation in terms of classical paths. *Ann of Physics*, 1974, 85: 514–545.
- 3 Pham F. Principe de Huygens et trajectoires complexes ou Balian et Bloch vingt ans après. *Ann Int Fourier*, 1993, 43: 1485–1508.
- 4 Albouy A, Kaloshin V. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. *Ann of Math*, 2012, 176: 535–588.
- 5 Beukers F, Cushman R. The complex geometry of the spherical pendulum. *Contemporary Mathematics*, 2002, 292: 47–70.
- 6 Bates L M, Cushman R H. Scattering monodromy and the A_1 singularity. *Central European Journal of Mathematics*, 2007, 5: 429–451.
- 7 Bender C M, Hook D W, Kooner K S. Complex elliptic pendulum. In: *Asymptotics in Dynamics, Geometry and Partial Differential Equations; Generalized Borel Summation Vol I. CRM series, Vol 12*. Springer, 2011, 1–18.
- 8 Cushman R H, Dullin H R, Giacobbe A, Holm D D, Joyeux M, Lynch P, Sadovskii D A, Zhilinskiĭ B I. CO_2 molecule as a quantum realization of the 1 : 1 : 2 resonant swing-spring with monodromy. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 024301-1–024301-4.

- 9 Child M S. Quantum monodromy and molecule spectroscopy. *Contemporary Physics*, 2014, 55: 212–221.
- 10 Cushman R H, Bates L M. *Global aspects of classical integrable systems*, second edition. Birkhäuser, 2015.
- 11 Beauville A. Holomorphic symplectic geometry: a problem list. In: *Complex and differential geometry*. Springer Proc Math 8. Heidelberg: Springer, 2011, 49–63.

Monodromy of Complexified Planar Kepler Problem

Shanzhong Sun & Peng You

Abstract Motivated by semi-classical analysis of path integrals in supersymmetric quantum field theory and quantum mechanics and inspired by the recent progress on central configurations in celestial mechanics, we complexify the classical planar Kepler problem which is a holomorphic completely integrable Hamiltonian system. The novelty is that this holomorphic integrable Hamiltonian system has nontrivial monodromy, which is different from the traditional planar Kepler problem. We also propose a conjecture about the whole monodromy group and some possible further directions including the physical implications of such nontrivial monodromies.

Keywords Kepler problem, complexification, period lattice, monodromy, holomorphic completely integrable Hamiltonian systems

MSC(2010) 14H15, 37J35, 37J38, 70F05, 70G55, 70H06

doi: 10.1360/N012017-XXXX