科学通报 2008 年 第 53 卷 第 6 期: 627 ~ 632
论 文
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

# 基于 Nataf 变换的点估计法

李洪双, 吕震宙*, 袁修开

西北工业大学航空学院, 西安 710072
* 联系人, E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

2007-12-03 收稿, 2008-02-19 接受
国家自然科学基金(批准号: 10572117)、新世纪优秀人才支持计划(编号: NCET-05-0868)、航空基础基金(编号: 2007ZA53012)和国家高技术研究发展计划(民口)(编号: 2007AA04Z401)资助项目

摘要 结构概率分析的目标是评定诸如材料属性、几何参数和外载荷等输入随机变量对结构响应的影响. 在实践中, 点估计法是进行结构概率分析的一种简洁途径. 提出了一种新的高效点估计法用于结构响应函数前四阶统计矩的估计, 该方法采用Nataf变换代替了传统点估计法中的Rosenblatt 变换. 这样做是因为受工程问题本身的特点和统计数据不足的限制, 很难获得输入随机变量的联合概率密度函数, 而 Rosenblatt 变换又要求联合概率密度函数已知. 通常可以给出每个随机变量的边缘概率密度函数和相关系数矩阵, 恰好符合 Nataf 变换的使用条件, 所以本方法更适合工程应用. 通过对比分析表明: (1) 当所有输入随机变量相互独立时, 所提方法与传统点估计法等效; (2) 当边缘概率密度函数和相关系数阵已知时, 传统点估计法不能给出估计值, 所提方法可以给出合理的估计值. 最后, 给出了一个简单算例, 详细解释了所提方法的使用过程.

关键词
结构概率分析
点估计法
Nataf 变换
统计矩
相关系数矩阵

在结构概率不确定性分析中, 结构响应和输入量都被认为是随机的, 它们之间的关系可以通过显式或隐式函数表示. 输入随机变量包括材料属性、几何参数和载荷等; 结构响应是指结构在外载荷的作用下, 结构的应力、应变状态等. 结构概率分析的一个基本问题是获取结构响应的统计信息, 通常包括统计矩和概率密度函数.

结构响应一般可以表示为输入随机变量的函数:

$$G=G\left(\boldsymbol{X}\right)=G\left(X_1,X_2,\cdots X_n\right), \tag{1}$$

其中随机向量 $\boldsymbol{X}=\left(X_1,X_2,\cdots X_n\right)$ 表示结构的输入随机向量.

计算响应函数统计矩的公式表示如下:

$$\mu_G=\int G\left(\boldsymbol{X}\right)f\left(\boldsymbol{X}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

$$\sigma_G^2=\int\left(G\left(\boldsymbol{X}\right)-\mu_G\right)^2 f\left(\boldsymbol{X}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{3}$$

$$\sigma_G^k\alpha_{kG}=\int\left[G\left(\boldsymbol{X}\right)-\mu_G\right]^k f\left(\boldsymbol{X}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{X},\ \ k>2, \tag{4}$$

式中 $f(\boldsymbol{X})$是随机向量$\boldsymbol{X}$的联合概率密度函数, $\mu_G$ 为结构响应的均值, $\sigma_G^2$ 为结构响应的方差, $\alpha_{kG}$ 为结构响应的 $k$ 阶无量纲中心矩.

通常结构响应 $G(\boldsymbol{X})$是隐式函数或者复杂显式函数, 使得(2)~(4)式得不到解析解. 另外, 统计矩的计算过程涉及多重积分计算, 这增加了(2)~(4)式的计算难度.

Rosenblueth[1,2]提出的点估计法为统计矩的计算提供了新途径, 该方法可以对响应函数的前几阶矩进行逼近. 点估计法主要有三个优点: (ⅰ) 概念和计算过程简单; (ⅱ) 不需要计算结构响应对输入随机变量的导数; (ⅲ) 不需要任何搜索技术. 在Rosenblueth之后, 很多学者对点估计法进行了发展, 并且广泛地应用于土木工程、环境工程和岩土工程等领域的不确定性分析中[3~13]. Christian和Baecher[5]经过分析和对照, 认为点估计法是高斯积分的一种. 这种思想在Zhou和Nowak[6]以及Zhao和Ono[7~9]的论文中均有体现, 他们发展的点估计法均是在标准正态

空间内利用Gauss-Hermite积分节点选取估计点，不同之处在于他们选择了不同的结构响应函数的逼近形式．从Rahman和Xu[12]的研究成果来看，Zhao和Ono所采用的逼近形式的估计精度更高．

鉴于标准正态分布具有一些其他分布类型无法相比的性质，很多实际问题都将原始随机向量空间转化到相互独立的标准正态空间内进行解决．Zhao和Ono提出的点估计法是在标准正态空间内选定估计点之后，采用Rosenblatt逆变换 [14]将估计点从标准正态空间转换到原始变量空间，从而可以进行响应函数的计算．对于含相关随机变量的问题，虽然Rosenblatt 变换是常用的方法之一，但是其存在不可避免的缺陷．首先，实施 Rosenblatt 变换需要预先知道随机向量的联合概率密度函数，而在实际应用中，很少能够得到完备的统计信息．一般情况下，仅能得到每个输入随机变量的边缘概率密度函数和随机变量之间的相关系数矩阵．其次，Rosenblatt 变换受到随机变量选取次序的影响，对于一个含有 $n$ 随机变量的问题，可以得到 $n!$ 种不同的 Rosenblatt 变换形式．本文致力于解决第一个困难．

Nataf变换 [15,16]是完成原始空间到独立标准正态空间转换过程的另外一个数学模型，它不要求知道输入随机变量的联合概率密度函数，但是每个随机变量的边缘概率密度函数和随机变量之间的相关系数是已知的，这是工程实践中最常见的情况．本文针对Rosenblatt变换存在的缺陷，提出了基于Nataf变换的点估计方法，该方法采用Nataf变换代替Rosenblatt变换，从而获得了一种更具实用价值的点估计法，类似的思想在文献[6,13]中有所体现，但是所针对的点估计方法完全不同．对于Nataf变换，文中未按常规方法求解转换到相关标准正态空间的相关系数，而是利用二维Nataf变换和Gauss积分求解非线性方程获得相关系数，这样做将不受Der Kiureghian和Liu[15,16]所给经验公式和计算表格的限制．

## 1 Nataf 变换

### 1.1 Nataf 分布

设输入随机变量向量

$$\boldsymbol{X}=\left(X_1,X_2,\cdots X_n\right), \tag{5}$$

随机变量 $X_i\left(i=1,\cdots n\right)$ 的概率密度函数 $f_i\left(x_i\right)$ 和累积分布函数 $F_i\left(x_i\right)$ 已知．Liu和Der Kiureghian通过等概率转换原则 [15,16]

$$\begin{cases}\Phi\left(y_i\right)=F_i\left(x_i\right),\\ y_i=\Phi^{-1}\left(F_i\left(x_i\right)\right),\end{cases}\quad i=1,2,\cdots n, \tag{6}$$

引入标准正态随机向量 $\boldsymbol{Y}=\left(Y_1,Y_2,\cdots Y_n\right)$，式中 $\Phi(\cdot)$ 和 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 分别为标准正态累积分布函数和逆累积分布函数．

根据 Nataf 变换理论，利用隐函数求导法则，可以推导出随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数为

$$f_X\left(\boldsymbol{x}\right)=f_1\left(x_1\right)f_2\left(x_2\right)\cdots f_n\left(x_n\right)\frac{\phi_n\left(\boldsymbol{y},\rho_0\right)}{\phi\left(y_1\right)\phi\left(y_2\right)\cdots\phi\left(y_n\right)}, \tag{7}$$

式中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的概率密度函数，而

$$\phi_n\left(\boldsymbol{y},\rho_0\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^n\det\left(\rho_0\right)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\rho_0\boldsymbol{y}\right) \tag{8}$$

对应用于均值为 0、方差为 1 及相关系数为 $\rho_0$ 的 $n$ 维标准正态分布．一般地，这个分布模型被称为 Nataf 分布．

### 1.2 随机向量变换

设输入随机向量$\boldsymbol{X}$的相关系数矩阵为 $\rho$，根据相关系数的定义及(6)和(7)式可得相关系数矩阵各分量的计算表达式:

$$\begin{aligned}\rho_{ij}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)f_{X_iX_j}\left(x_i,x_j\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F_i^{-1}\left(\Phi\left(y_i\right)\right)-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{F_j^{-1}\left(\Phi\left(y_j\right)\right)-\mu_j}{\sigma_j}\right)\\&\quad\times\phi_2\left(y_i,y_j,\rho_{0ij}\right)\mathrm{d}y_i\mathrm{d}y_j,\end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\rho_{0ij}$ 为标准正态随机向量 $\boldsymbol{Y}$相关系数矩阵 $\rho_0$ 的分量．

(9)式建立了输入随机向量$\boldsymbol{X}$的相关系数矩阵 $\rho$ 与标准正态随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 的相关系数矩阵 $\rho_0$ 的函数关系，若已知 $\rho$ 和输入随机变量的边缘概率密度函数，通过(9)式解非线性方程，可以完全确定 $\rho_0$．

获取标准正态随机向量 $\boldsymbol{Y}$的相关系数矩阵 $\rho_0$，显然 $\rho_0$ 是一对称矩阵，可进行 Choleskey 分解:

$$\rho_0=L_0L_0^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

式中 $L_0$ 为相关系数矩阵 $\rho_0$ 经 Choleskey 分解得到的下三角阵．利用 $L_0$ 可将相关的标准正态随机向量 $\boldsymbol{Y}$

转换为独立的标准正态随机向量 $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U}=L_0^{-1}\boldsymbol{Y}. \tag{11}$$

至此建立了 Nataf 变换的正变换过程.

同样可以建立逆 Nataf 变换过程:

$$\boldsymbol{Y}=L_0\boldsymbol{U}, \tag{12}$$

$$x_i=F_i^{-1}\left(\Phi\left(y_i\right)\right)\quad i=1,2,\cdots n. \tag{13}$$

符号意义同正 Nataf 变换一致.

### 1.3 相关系数的求解

对于(9)式的计算, Liu和Der Kiureghian[15,16]给出了如下经验公式:

$$\rho_{0ij}=F\rho_{ij}, \tag{14}$$

式中系数 $F\geqslant 1$, 它是相关系数 $\rho_{ij}$ 及边缘概率密度的函数. 文献[15,16]给出了两类共计 10 种概率分布之间 $F$ 的 49 个经验计算公式. 尽管这些经验计算公式的精度很高, 然而所支持的概率分布类型有时不能满足工程实践的需求, 且计算公式过多不利于编程计算.

本文直接采用二维 Nataf 变换和 Gauss-Hermite 积分直接计算(9)式中积分, 然后采用非线性方程求根方法求 $\rho_{0ij}$. 首先选取 $\rho_{0ij}$ 的初始值为 $\rho_{ij}$, 根据 Nataf 变换理论可以得到 2 维下三角分解阵 $L$. 再由(6)和(11)式可以得到由 $\boldsymbol{X}$ 空间变换到 $\boldsymbol{U}$ 空间的 Jacobian 矩阵:

$$J_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}}=\operatorname{diag}\left[\frac{\phi\left(y_i\right)}{f_i\left(x_i\right)}\right]L. \tag{15}$$

(9)式右端的积分可以根据(11)式的线性变换将积分从原始空间转换到独立标准正态空间内:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)f_{X_iX_j}\left(x_i,x_j\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)\frac{f_i\left(x_i\right)f_j\left(x_j\right)}{\phi\left(y_i\right)\phi\left(y_j\right)}\\&\quad\times\phi_2\left(y_i,y_j,\rho_{0ij}\right)J_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)\phi\left(u_i\right)\phi\left(u_j\right)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j.\end{aligned} \tag{16}$$

(16)式可以采用二维 Gauss-Hermite 积分进行求解, 并结合(9)式建立非线性方程:

$$\rho_{ij}-\sum_{l=}^{m}\sum_{k=1}^{m}P_lP_k\left(\frac{x_{il}-\mu_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_{jk}-\mu_j}{\sigma_j}\right)=0, \tag{17}$$

式中 $m$ 为积分节点数, $P_l, P_k$ 为权值. $(x_{il},x_{jk})^{\mathrm{T}}$ 可由(12)和(13)式得到:

$$(y_{il},y_{jk})^{\mathrm{T}}=L_0(z_{il},z_{jk})^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

$$(x_{il},x_{jk})^{\mathrm{T}}=(F_i^{-1}(\Phi(y_{il})),F_j^{-1}(\Phi(y_{jk}))), \tag{19}$$

式中 $(z_{il},z_{jk})^{\mathrm{T}}=\sqrt{2}(u_{il},u_{jk})^{\mathrm{T}}$. 典型的权值 $P_k$ 和节点值 $z_{ik}$ 或 $z_{jk}$ 列于表 1 中. 由(17)式迭代即可解出 $\rho_{0ij}$.

**表 1 Gauss-Hermite 积分常用的积分节点和权值**

| 节点数 $m$ | 节点 $z_{ik}=\sqrt{2}u_{ik}$ | 权值 $P_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | ±1 | 0.5 |
| 3 | ±1.73205080757 | 0.16666666667 |
| | 0 | 0.66666666667 |
| 4 | ±2.33441421834 | 0.045875854768 |
| | ±0.74196378430 | 0.454124145232 |
| 5 | ±2.85697001387 | 0.011257411328 |
| | ±1.3552617997 | 0.222075922006 |
| | 0 | 0.533333333333 |
| 6 | ±3.32425743359 | 0.00255578440233 |
| | ±1.88917587773 | 0.088615746029 |
| | ±0.616706590154 | 0.408828469542 |
| 7 | ±3.75043971768 | 0.000548268858737 |
| | ±2.36675941078 | 0.0307571239681 |
| | ±1.1544053948 | 0.240123178599 |
| | 0 | 0.457142857143 |

下面给出一个算例来说明本文方法求解等效相关系数 $\rho_{0ij}$ 的精度. 设随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 均服从 Gamma 分布, 分布参数相同且分别为 $a=2$ 和 $b=3$, 进一步可以得出 $\mu_1=\mu_2=6$ 和 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=18$. 假设 $X_1$ 和 $X_2$ 的相关系数从–0.7 变化到 0.9, 采用三种方法计算的标准正态空间内的等效相关系数列于表 2. (9)式所示的数值积分采用了 Matlab 提供的二维积分函数进行计算, 本文方法取 5 个积分节点同样在 Matlab 环境内实现. 第 2 列给出的是直接采用(9)式进行数值积分计算的结果, 第 3 列给出的是由经验公式计算得到的结果, 第 4 列是由本文方法给出的结果, 括号内的数字表示绝对误差(将直接由(9)式计算的结果作为真值进行比较). 从表 2 可以看出, 本文方法的计算精度非常高, 仅在 $\rho=0.9$ 时存在微小误差, 而经验公式法的最大误差达 4.14%. 在计算效率方面, 本文方法明显高于直接采用(9)式进行数值积分, 但略低于经验公式法, 相对于今天的计算机水平而言, 差别是可以忽略的, 而且本文方法所适用的分布不局限于文献[15,16]所提供的类型.

表 2 三种方法的对比

| 相关系数 | 真值 | 经验公式法 | 本文方法 |
|---|---|---|---|
| −0.7 | −0.8604 | −0.8248 (4.14%) | −0.8604 (0.00%) |
| −0.6 | −0.7258 | −0.7017 (3.32%) | −0.7258 (0.00%) |
| −0.5 | −0.5956 | −0.5804 (2.55%) | −0.5956 (0.00%) |
| −0.4 | −0.4695 | −0.4608 (1.85%) | −0.4695 (0.00%) |
| −0.3 | −0.3472 | −0.3430 (1.21%) | −0.3472 (0.00%) |
| −0.2 | −0.2284 | −0.2269 (0.66%) | −0.2284 (0.00%) |
| −0.1 | −0.1127 | −0.1126 (0.09%) | −0.1127 (0.00%) |
| 0.1 | 0.1099 | 0.1108 (0.82%) | 0.1099 (0.00%) |
| 0.2 | 0.2173 | 0.2199 (1.20%) | 0.2173 (0.00%) |
| 0.3 | 0.3223 | 0.3273 (1.55%) | 0.3223 (0.00%) |
| 0.4 | 0.4250 | 0.4330 (1.88%) | 0.4250 (0.00%) |
| 0.5 | 0.5256 | 0.5369 (2.15%) | 0.5225 (0.00%) |
| 0.6 | 0.6240 | 0.6392 (2.44%) | 0.6240 (0.00%) |
| 0.7 | 0.7207 | 0.7397 (2.64%) | 0.7207 (0.00%) |
| 0.8 | 0.8155 | 0.8385 (2.82%) | 0.8155 (0.00%) |
| 0.9 | 0.9086 | 0.9357 (2.98%) | 0.9085 (0.01%) |

## 2 基于 Nataf 变换的点估计法

在以下的行文过程中，为了方便将正 Nataf 变换记为 $N(\cdot)$，逆 Nataf 变换记为 $N^{-1}(\cdot)$；正 Rosenblatt 变换记为 $R(\cdot)$，逆 Rosenblatt 变换记为 $R^{-1}(\cdot)$.

### 2.1 单变量响应函数的点估计法

首先考虑响应仅是单随机变量 $X$ 的函数的情况，即 $G=G(X)$，它是计算多随机变量函数的基础. 此时，无论 Nataf 变换，还是 Rosenbaltt 变换，均退化为(6)式所示的等概率转换准则，很容易将计算统计矩的积分从原始变量空间转换至标准正态空间：

$$\mu_G=\int G\left(F^{-1}\left(\Phi(u)\right)\right)\phi(u)\,\mathrm{d}u, \tag{20}$$

$$\sigma_G^2=\int\left(G\left(F^{-1}\left(\Phi(u)\right)\right)-\mu_G\right)^2\phi(u)\,\mathrm{d}u, \tag{21}$$

$$\alpha_{kG}\sigma_G^k=\int\left(G\left(F^{-1}\left(\Phi(u)\right)\right)-\mu_G\right)^k\phi(u)\,\mathrm{d}u, k>2. \tag{22}$$

利用 Gauss-Hermite 积分公式可以得到

$$\mu_G\approx\sum_{j=1}^{m}P_jG\left(F^{-1}\left(\Phi\left(z_j\right)\right)\right), \tag{23}$$

$$\sigma_G^2\approx\sum_{j=1}^{m}P_j\left[G\left(F^{-1}\left(\Phi\left(z_j\right)\right)\right)-\mu_G\right]^2, \tag{24}$$

$$\alpha_{kG}\sigma_G^k\approx\sum_{j=1}^{m}P_j\left[G\left(F^{-1}\left(\Phi\left(z_j\right)\right)\right)-\mu_G\right]^k, \tag{25}$$

式中 $\mu_G,\sigma_G,\alpha_{kG}$ 分别为 $G(X)$ 的均值、标准差和 $k$ 阶无量纲中心矩；$m$ 为积分节点数，$z_j=\sqrt{2}u_j$ 为第 $j$ 个积分点，$P_j$ 为相应的权值. 常用的积分节点和权值见表 1. 显然，单变量函数点估计法需要的函数估计次数为积分节点数 $m$. 在实践中，积分节点数 $m$ 一般取奇数 [7].

### 2.2 多变量响应函数的点估计法

在绝大多数工程实践问题中，响应函数 $G$ 是多个输入随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的函数. 单变量函数的点估计可以拓展到多变量的情况，此时响应函数的计算次数为 $m^n$，当随机变量的数目较多时，整个过程的计算量是难以接受的 [9]. 为了缩减计算量，很多研究人员建议采用函数逼近方法 [1,2,6~9]. Rosenblueth[1,2]建议对响应函数作如下逼近:

$$G(\boldsymbol{X})\approx G'=G'(\boldsymbol{X})=G_\mu\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{G_i}{G_\mu}\right), \tag{26}$$

式中 $G_\mu=G(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_n)$ 表示功能函数在所有输入随机变量取均值时的响应值，$G_i$ 表示除第 $i$ 个随机变量外其他随机变量取均值时的函数，即 $G_i=G(\mu_1,\mu_2,\cdots x_i,\cdots\mu_n)$，(26)式的计算量缩减到 $m\times n$. 这个逼近形式在 $|G_\mu|$ 较小或等于 0 的情况下，会出现数值奇异. Zhao等人 [7~9]采用了另外一种逼近形式:

$$G'=G'(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}\left(G_i-G_\mu\right)+G_\mu. \tag{27}$$

值得注意的是，式中 $G_\mu$ 的意义与(26)式中 $G_\mu$ 相同，但是 $G_i$ 是不同的. 在(27)式中 $G_i=G(R^{-1}(u_{\mu1},u_{\mu2},\cdots u_i,\cdots u_{\mu n}))$，其中向量 $(u_{\mu1},u_{\mu2},\cdots u_{\mu n})$ 是原始随机变量的均值向量在标准正态空间中的映射量，显然 $G_i=G(R^{-1}(u_i))$ 仅是 $u_i$ 的函数. 这种逼近形式不会像 Rosenblueth 方法那样出现数值奇异现象，而且使多变量函数演变成了单变量函数和的形式.

正如引言中所述，Rosenblatt 变换仅适用于随机变量联合概率密度函数已知的情况，而在实际问题分析中很难得到这样完备的概率信息，所以本文用 Nataf变换代替Rosenblatt变换，逼近形式仍采用(27)式. 因为 $\boldsymbol{U}=N(\boldsymbol{X})$ 是相互独立的，所以 $G_i=G(N^{-1}(u_i))$ $(i=1,\cdots n)$ 也是相互独立的，应用单变量函数点估计法可以得到下列多变量函数的统计矩估计公式:

$$\mu_G=\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i-G_\mu\right)+G_\mu, \tag{28}$$

$$\sigma_G^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2, \tag{29}$$

$$\alpha_{3G}\sigma_G^3=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{3i}\sigma_i^3, \tag{30}$$

$$\alpha_{4G}\sigma_G^4=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{4i}\sigma_i^4+6\sum_{i\neq j,i<j}\sigma_i^2\sigma_j^2, \tag{31}$$

式中 $\mu_i,\sigma_i,\alpha_{3i},\alpha_{4i}$ 为单变量函数 $G_i$ 的概率矩，总计算量为 $(m-1)\times n+1$.

从概率矩的计算公式来看，与 Zhao 和 One 的点估计法完全一致，但是它们的本质是不同的．下面从三种情况对两种方法进行比较说明．当所有输入随机变量相互独立时，Rosenlatt 变换和 Nataf 变换均退化为等概率准则，即此时两种方法等效．当已知随机变量的边缘概率密度函数和相关系数矩阵时，本文方法可以有效地对概率矩进行估计，而 Zhao 和 Ono 的方法不能应用于这种情况．当随机变量的联合概率密度函数已知时，Zhao 和 Ono 的方法是针对这一情况发展起来的，在此种情况下，可将本文方法看作是 Zhao 和 One 点估计法的一个补充.

## 3 算例分析

考虑下面响应函数的统计矩估计问题 [17]:

$$G(\boldsymbol{x})=18-3x_1-2x_2, \tag{32}$$

式中随机向量的联合概率密度函数为

$$f_X(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2+x_1x_2)\times\exp\left(-(x_1+x_2+x_1x_2)\right),\quad x_1,x_2>0. \tag{33}$$

由上式可以得到 $X_1$ 的边缘密度函数为

$$f_1(x_1)=\int_0^{\infty}f_X(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2=\exp(-x_1),\quad x_1>0. \tag{34}$$

可以看出，随机变量 $X_1$ 服从参数为 1 的指数分布．由(33)式的对称性可知，随机变量 $X_2$ 也服从参数为 1 的指数分布．此外，利用联合概率密度函数，可以计算出相关系数 $\rho_{12}=-0.40366$．虽然响应函数 $G(\boldsymbol{x})$ 在原始变量空间是线性的，然而在标准正态变量空间内它的非线性极大 [17].

由于联合概率密度函数和响应函数均已知，所以响应函数的均值可由下式的数值积分给出:

$$\mu_G=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\boldsymbol{x})f_X(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=13. \tag{35}$$

同理可以得到 $\sigma_G=2.8559$，$\alpha_{3G}=-1.5161$ 和 $\alpha_{4G}=7.4853$，本文将它们作为“精确解”与本文方法以及 Zhao 和 Ono 的点估计法进行比较.

假设联合概率密度函数未知而边缘概率密度和相关系数已知，利用本文提出的点估计方法可以给出响应函数前四阶矩的估计值，列于表 3.

**表 3 前四阶矩的估计值**

| 方法 | $\mu_G$ | $\sigma_G$ | $\alpha_{3G}$ | $\alpha_{4G}$ |
|---|---|---|---|---|
| 数值积分 | 13.0000 | 2.8559 | −1.5161 | 7.4853 |
| 本文方法 $(x_1\to x_2)$ | 12.8527 | 2.5123 | −2.129 | 10.5670 |
| 本文方法 $(x_2\to x_1)$ | 12.7815 | 2.4620 | −1.5269 | 6.5308 |
| Zhao和Ono的方法 $(x_1\to x_2)$ | 12.8618 | 2.4532 | −2.3091 | 12.0900 |
| Zhao和Ono的方法 $(x_2\to x_1)$ | 12.7928 | 2.2751 | −1.4073 | 6.2678 |

由于本例的联合概率密度已知，为了比较分析，将 Zhao 和 Ono 点估计法计算的结果同样列于表 3．如果选择对应于次序 $(x_1\to x_2)$ 的 Rosenblatt 变换，则有

$$\begin{aligned}u_1&=\Phi^{-1}\left(1-\exp(-x_1)\right),\\u_2&=\Phi^{-1}\left(1-(1+x_2)\exp\left(-x_2(1+x_1)\right)\right),\end{aligned} \tag{36}$$

而对应于次序 $(x_2\to x_1)$ 的 Rosenblatt 变换为

$$\begin{aligned}u_1&=\Phi^{-1}\left(1-(1+x_1)\exp\left(-x_1(1+x_2)\right)\right),\\u_2&=\Phi^{-1}\left(1-\exp(-x_2)\right).\end{aligned} \tag{37}$$

从表 3 可以看出，两种方法的计算效率几乎相等．本文方法只需要边缘概率密度函数和相关系数就可很好地逼近真值，而 Zhao 和 Ono 的点估计法必须已知联合概率密度函数，即完全概率信息．关于如何消除或降低变换次序对点估计的影响，我们将另外撰文进行分析讨论.

## 4 结论

针对不完备概率信息下估计响应函数统计矩的需求，提出了一种基于 Nataf 变换的点估计法．文中对输入随机变量的三种情况进行了讨论，在随机变量不相关的情况下，该方法与 Zhao 和 Ono 的点估计法等效；当输入随机变量相关且仅知道随机变量的边缘概率密度函数和相关矩阵时，Zhao 和 Ono 的点估计方法不能解决估计问题，而本文方法可以有效地解决这种情况下的问题；当联合概率密度函数已知时，Zhao 和 Ono 的点估计方法适用于此种情况，可将本文方法看作是 Zhao 和 Ono 的点估计法的一个补充．此外，本文方法的计算量与 Zhao 和 Ono 的点估计法相同．与Zhao等人提出的矩方法 [8,9]类似，本文

方法可以很容易地拓展到不完全概率信息下结构可靠性分析应用中，我们将另外撰文讨论将本文方法用于不完全概率信息下的结构可靠性分析和可靠性灵敏度分析.

致谢 感谢三位审稿人提出的宝贵意见和建议.

## 参考文献

1 Rosenblueth E. Point estimation for probability moments. Proc Natl Acad Sci USA, 1975, 72(10): 3812—3814
2 Rosenblueth E. Two-point estimates in probability. Appl Math Model, 1981, 5: 329—335[DOI]
3 Hong H P. Point-estimate moment-based reliability analysis. Civil Eng Syst, 1996, 13: 281—294[DOI]
4 Hong H P. An efficient point estimate method for probabilistic analysis. Reliab Eng Syst Safety, 1998, 59: 261—267[DOI]
5 Christian J T, Baecher G B. Point-estimate method as numerical quadrature. J Geotech Geoenviron Eng, 1999, 125(9): 779—786[DOI]
6 Zhou J H, Nowak A S. Integration formulas to evaluate functions of random variables. Struct Safety, 1988, 5(4): 267—284[DOI]
7 Zhao Y G, Ono T. New point estimates for probability moments. J Eng Mech, 2000, 126(4): 433—436[DOI]
8 Zhao Y G, Ono T. Moment method for structural reliability. Struct Safety, 2001, 23: 47—75[DOI]
9 Zhao Y G, Alfredo H S, Ang H M. System reliability assessment by method of moments. J Struct Eng, 2003, 129(10): 1341—1349[DOI]
10 Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using three-point information. Intern J Product Res, 2002, 40(4): 931—944[DOI]
11 Tsai C W, Franceschini S. Evaluation of probabilistic point estimate methods in uncertainty analysis for environmental engineering applications. J Environ Eng, 2005, 131(3): 387—395[DOI]
12 Rahman S, Xu H. A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics. Probab Eng Mech, 2004, 19: 393—408[DOI]
13 Chang C H, Yang J C, Tung Y K. Uncertainty analysis by estimate methods incorporating marginal distributions. J Hydr Eng, 1997, 123(3): 244—250[DOI]
14 Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. Annals Math Stat, 1952, 23: 470—472
15 Der Kiureghian A, Liu P L. Structural reliability under incomplete probability information. J Eng Mech, 1986, 112: 85—104
16 Liu P L, Der Kiureghian A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. Probab Eng Mech, 1986, 1(2): 105—112[DOI]
17 Ditleven O, Madsen H O. Structural Reliability Methods. New York: Wiley, 1996