【数学与应用数学 / Mathematics and Applied Mathematics】

带投资和障碍分红的破产时刻 Laplace 变换

孙宗岐¹, 杨 鹏²

1) 西京学院医学院, 陕西西安 710123; 2) 西京学院理学院, 陕西西安 710123

摘 要: 考虑复合 Poisson-Geometric 风险下带有投资和障碍分红的 Gerber-Shiu 函数问题, 运用全期望公式得到复合 Poisson-Geometric 风险下带投资和障碍分红的 Gerber-Shiu 函数所满足的微分-积分方程. 在指数分布假设下, 得到带投资和障碍分红的保险公司破产时刻 Laplace 变换的显式解.

关键词: 运筹学; 对策论; 复合 Poisson-Geometric 过程; 风险投资; 障碍分红; Gerber-Shiu 函数; 破产时刻 Laplace 变换

中图分类号: O211.63

文献标志码: A

doi: 10.3724/SP.J.1249.2021.02214

The Laplace transform of ruin time with investment and barrier dividend

SUN Zongqi¹ and YANG Peng²

1) Medical College, Xijing University, Xi'an 710123, Shaanxi Province, P. R. China

2) College of Science, Xijing University, Xi'an 710123, Shaanxi Province, P. R. China

Abstract: In order to study the Gerber-Shiu function for a compound Poisson-Geometric risk model with investment and barrier dividend, we obtain the differential-integral equation of the Gerber-Shiu function by using the method of total expectation formula. Under the assumption of exponential distribution, the explicit solution of the Laplace transform of ruin time of insurance company with investment and barrier dividend is given.

Key words: operations research; game theory; compound Poisson-Geometric process; venture capital investment; barrier dividend; Gerber-Shiu function; Laplace transform of ruin time

在保险资金的管理中, 线性障碍分红和阈值分红是保险公司常考虑到的分红机制, 因此, 在复合风险下, 带投资与线性障碍分红的 Gerber-Shiu 函数问题也是一个值得研究的问题. GERBER 等^[1]提出一种分析保险盈余过程精算特征的 Gerber-Shiu 期望折现惩罚函数 (Gerber-Shiu 函数), 其在刻画保险公司破产时刻的 Laplace 变换、破产概率、破产时瞬间盈余及破产时的赤字分布时均有统一的微分-积

分方程, 因此, 该函数受到广泛研究关注. LIN 等^[2]将该函数引入考虑分红的经典风险模型中, 研究破产时刻的 Laplace 变换. 赵金娥等^[3]利用 Gerber-Shiu 函数研究障碍分红下赔付到来为 P-稀疏过程破产时刻的 Laplace 变换问题. 陈洁等^[4]研究离散风险模型中带障碍分红的 Gerber-Shiu 函数, 在指数分布下得到破产时刻的 Laplace 变换显式解; 韩树新等^[5]考虑两类稀疏风险模型中带障碍分红的

Received: 2020-01-04; Accepted: 2020-03-02

Foundation: National Natural Science Foundation of China (71371152); Natural Science Foundation of Education Department of Shaanxi Province (2016JK2150)

Corresponding author: Associate professor SUN Zongqi. E-mail: szqi200679@sina.com

Citation: SUN Zongqi, YANG Peng. The Laplace transform of ruin time with investment and barrier dividend [J]. Journal of Shenzhen University Science and Engineering, 2021, 38(2): 214-220. (in Chinese)

<http://journal.szu.edu.cn>

Gerber-Shiu 函数问题,也在指数分布下得到破产时刻的 Laplace 变换显式解.然而以上研究都没有考虑保险实务中普遍存在的免赔额规定和无赔款保费折扣优待制度.

毛泽春等^[6]基于保单免赔规定和无赔款保费折扣优待制度,提出复合 Poisson-Geometric 过程(复合 P-G 过程),很好刻画了赔付和索赔不对等的事实,并利用偏离系数精确刻画二者之间的不对等程度.贺丽娟等^[7]在复合 P-G 风险下研究变保费率的 Gerber-Shiu 函数,乔克林等^[8]也在复合 P-G 风险下继续考虑带风险投资的复合 P-G 风险破产概率.YANG 等^[9]得到带扰动的相依风险模型 Gerber-Shiu 函数所满足的积分方程,最后在指数分布下给出 Gerber-Shiu 函数所满足的显式解.苏必超等^[10]利用概率的计算性质,给出破产时刻的概率密度函数.在复合风险下,孙宗岐等^[11-12]研究保险公司的破产概率及带投资的障碍分红问题.然而以上研究没有考虑分红或投资,大多也未能得到破产时刻的 Laplace 变换显式解.

为了使风险模型更接近保险公司的实际运作情况,基于以上研究现状,本文研究复合风险下,带投资和障碍分红时,保险公司破产时刻的 Laplace 变换问题,并在指数分布下求解破产时刻的 Laplace 变换显式解.

1 模型建立

假设所有随机过程和随机变量都定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上.先给出保费过程、赔付过程、盈余过程及障碍分红的数学模型.

1.1 索赔过程、盈余过程及障碍分红的刻画

1.1.1 索赔过程

通过分析索赔事件与赔付事件不对等的事实,毛泽春等^[6]提出如下复合 P-G 过程.

定义 1 设 $\lambda > 0, 0 \leq \gamma < 1$, 称非负整值随机变量 N 服从参数为 λ 和 γ 的复合 P-G 分布,如果其矩母函数为

$$M_N(r) = E(e^{rN}) = \exp\left(\frac{\lambda(e^r - 1)}{1 - \gamma e^r}\right)$$

其中, γ 为偏离系数; r 为任意实数.当 $\gamma = 0$ 时, $M_N(r) = E(e^{rN}) = \exp[\lambda(e^r - 1)]$, 此时复合 P-G 分布退化成一般 Poisson 分布.

定义 2 设 $\lambda > 0, 0 \leq \gamma < 1$, 称随机过程 $\{N(t)\}$ 为服从参数为 λ 和 γ 的复合 P-G 过程,如果

满足

$$1) N(0) = 0;$$

$$2) N(t) \text{ 具有独立平稳增量};$$

3) 对任意 $t \geq 0$, $N(t)$ 服从参数为 λ 和 γ 的复合 P-G 分布, 且

$$E[N(t)] = \frac{\lambda t}{1 - \gamma},$$

$$\text{Var}[N(t)] = \frac{(1 + \gamma)\lambda t}{(1 - \gamma)^2}.$$

当 $\gamma = 0$ 时, 复合 P-G 过程退化为一般的 Poisson 过程.

引理 1^[6] 设 $\{N(t)\}$ 为服从参数为 λ 和 γ 的复合 P-G 过程, 记 $\alpha_1 = \frac{\lambda(1 - \gamma)}{\gamma}$ (若 $\gamma = 0$, 则取 $\alpha_1 = \lambda$), 则当 t 足够小时, 有

$$\begin{cases} P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + o(t) \\ P(N(t) = k) = \alpha_1 \gamma^k t + A_k(t) + o(t), k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

其中, $A_k(t) = \gamma^k + (k - 1)[\gamma(1 + \alpha_1 t)]^{k-2}$, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ 一致收敛.

以下讨论假设保险赔付过程满足复合 P-G 过程的情况.

1.1.2 盈余过程

设 u 为初始盈余; $S_1(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i$ 为保险公司截

止时刻 t 的累积保费, X_i 为第 i 次到达的保费额, $N_1(t)$ 表示截止时刻 t 的投保发生次数, 满足参数

为 λ_1 的 Poisson 过程; $S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$ 为保险公司截

止时刻 t 的累积赔付, Y_i 为第 i 次索赔到来时的赔付额, $N_2(t)$ 表示保险公司截止时刻 t 的赔付发生次数, 满足参数为 λ_2 和 γ 的复合 P-G 过程. 保险公司根据初始盈余和单位时间内对赔付额度的预测来确定投资于风险资产的额度, 文章假设其始终为 F , 风险资产价格 $P(t)$ 满足

$$dP(t) = P(t)(\mu dt + \sigma d(W(t)))$$

其中, μ 为单位风险资产的收益率; σ 为单位风险资产的波动率. 同时, 保险公司选择将剩余盈余全部投资到无风险资产. 为了方便推导, 假设无风险利率为 0. 因此, 保险公司的盈余过程为

$$U(t) = u + F(\mu t + \sigma W(t)) + \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i \quad (1)$$

其中, $W(t)$ 为一维标准布朗运动; $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 、

X_i 、 Y_i 及 $W(t)$ 相互独立.

1.1.3 障碍分红

保险公司考虑以 $b > 0$ 为界进行障碍分红, 即当 $U(t) \geq b$ 时, 保险公司将超过 b 的部分全部进行分红. 称 $\bar{U}(t) = U(t) - D(t)$ 为修正盈余, 其中, $D(t)$ 为截止时刻 t 的累积分红. 记 $\tau = \inf(t \geq 0; \bar{U}(t) < 0 | \bar{U}(0) = u)$ 为破产时刻, 定义 $D_{u,b}(t) = \int_0^t e^{-\delta s} dD(s)$ 为时刻 t 的总红利现值. 其中, $\delta \geq 0$ 为折现因子; $0 \leq t \leq \tau$.

1.2 Gerber-Shiu 期望折现罚金函数

定义 3 设 $\omega(\cdot, \cdot)$ 是一个二元非负可测函数, 通常称为惩罚函数. 又称

$$G(u; b) = E[e^{-\delta \tau} \omega(\bar{U}(\tau^-), |\bar{U}(\tau)|) | I_{|\tau < \infty|} | \bar{U}(0) = u]$$

为破产时刻 τ 的期望折现罚金函数, 也称 Gerber-Shiu 函数. 其中, $\delta \geq 0$ 为折现因子; $\bar{U}(\tau^-)$ 为破产前瞬间盈余; $|\bar{U}(\tau)|$ 为破产时赤字; I 为示性函数. 一般地, 假设 $G(u; b)$ 关于 u 可微.

若 $\omega(x, y) = 1$, 则当 $\delta \neq 0$ 时, $\psi(u; b) = E[e^{-\delta \tau} I_{|\tau < \infty|} | \bar{U}(0) = u]$ 是保险公司破产时刻的 Laplace 变换.

2 障碍分红下的函数

2.1 准备工作

为方便证明, 做如下假设.

假设保费额 X_i 服从参数为 α 的指数分布, 记其分布函数为 $G_1(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, 概率密度函数为 $g_1(x)$. 索赔额 Y_j 服从参数为 β 的指数分布, 则可证 $\sum_{j=1}^k Y_j$ 服从参数为 (k, β) 的 Gamma 分布, 其概率密度函数 $f^{*k}(y) = \frac{\beta^k y^{k-1}}{(k-1)!}$, 记

$$f_\gamma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\gamma) \gamma^{k-1} f^{*k}(y) = (1-\gamma) \beta e^{-(1-\gamma)\beta y},$$

这表明累积赔付额服从参数为 $(1-\gamma)\beta$ 的指数分布. 在足够小的时间 dt 内, 讨论保费和赔付的几种概率如下.

1) 保费到来和赔付到来均为 0 次的概率.

$$P(N_1(dt) = 0, N_2(dt) = 0) = [1 - \lambda_1 dt + o(dt)][1 - \lambda_2 dt + o(dt)] = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)dt + o(dt)$$

2) 保费到来为 0 次, 而赔付到来为 k 次的概率.

$$P(N_1(dt) = 0, N_2(dt) = k) = [1 - \lambda_1 dt + o(dt)][\alpha_1 \gamma^k dt + A_k(dt) + o(dt)] = \alpha_1 \gamma^k dt + A_k(dt) + o(dt)$$

3) 保费到来 1 次, 而赔付到来为 0 次的概率.

$$P(N_1(dt) = 1, N_2(dt) = 0) = \lambda_1 dt [1 - \lambda_2 dt + o(dt)] = \lambda_1 dt + o(dt)$$

4) 其他情形下, 事件发生的概率均为 $o(dt)$.

2.2 Gerber-Shiu 函数

定理 1 当 $0 \leq u \leq b$ 时, Gerber-Shiu 函数 $G(u; b)$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u; b)}{\partial u} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} G(u; b) - \\ &\quad \frac{\lambda_1}{F\mu} \int_0^{b-u} G(u+x; b) dG_1(x) - \\ &\quad \frac{\lambda_1}{F\mu} G(b; b) \bar{F}(b-u) - \\ &\quad \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^u G(u-y; b) f_\gamma(y) dy - \\ &\quad \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^\infty \omega(u, y-u) f_\gamma(y) dy \end{aligned}$$

当 $u > b$ 时, Gerber-Shiu 函数 $G(u; b) = G(b; b)$.

【证】当 $0 \leq u \leq b$ 时, 在足够小的时间区间 dt 内, 由盈余的马氏性及全期望公式有

$$\begin{aligned} G(u; b) &= E[G(U(dt); b)] = [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)dt + o(dt)] e^{-\delta dt} E[G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)); b)] + \\ &\quad [\lambda_1 dt + o(dt)] e^{-\delta dt} E[G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) + X; b)] + \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_1 \gamma^k dt + A_k(dt) + o(dt)] e^{-\delta dt} E[G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) - Y; b)] + o(dt), \text{ 即} \\ G(u; b) &= [1 - (\lambda_1 + \lambda_2)dt + o(dt)] e^{-\delta dt} G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)); b) + [\lambda_1 dt + o(dt)] e^{-\delta dt} \\ &\quad \int_0^{b-[u+F(\mu dt + \sigma W(dt))]} G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) + x; b) dG_1(x) + [\lambda_1 dt + o(dt)] e^{-\delta dt} \\ &\quad \int_{b-[u+F(\mu dt + \sigma W(dt))]}^\infty G(b; b) dG_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta dt} \int_0^{u+F(\mu dt + \sigma W(dt))} G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) - y; b) [\alpha_1 \gamma^k dt + \end{aligned}$$

$$A_k(dt) + o(dt)] dF^{*k}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta dt} \int_{u+F(\mu dt + \sigma W(dt))}^{\infty} \omega(u + F(\mu dt + \sigma W(dt))), \\ y - u - F(\mu dt + \sigma W(dt)) \times [\alpha_1 \gamma^k dt + A_k(dt) + o(dt)] dF^{*k}(y) + o(dt)$$

由引理 1 可知, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k f^{*k}(y)$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) f^{*k}(y)$ 均一致收敛. 再由单调收敛定理可知, 积分与求和运算可以交换次序, 同时不难推导 $\sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_1 \gamma^k dt +$

$$A_k(dt) + o(dt)] f^{*k}(y) = \lambda_2 dt f_{\gamma}(y) + o(dt), \text{ 其中,} \\ f_{\gamma}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \gamma) \gamma^{k-1} f^{*k}(y). \text{ 因此,}$$

$$G(u; b) - G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)); b) = [-(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)dt + o(dt)] G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)); b) + \\ [\lambda_1 dt + o(dt)] \int_0^{b-[u+F(\mu dt + \sigma W(dt))]} G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) + x; b) dG_1(x) + [\lambda_1 dt + o(dt)] G(b; b) \bar{G}_1(b - \\ u - F(\mu dt + \sigma W(dt))) + \lambda_2 dt \int_0^{u+F(\mu dt + \sigma W(dt))} G(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)) - y; b) f_{\gamma}(y) dy + \lambda_2 dt e^{-\delta dt} \times \\ \int_{u+F(\mu dt + \sigma W(dt))}^{\infty} \omega(u + F(\mu dt + \sigma W(dt)), y - u - F(\mu dt + \sigma W(dt))) f_{\gamma}(y) dy + o(dt)$$

利用文献[13]的性质 1 及文献[8]中的无穷小方法, 将上式两端同除以 $F(\mu dt + \sigma dW(t))$, 并令 $dt \rightarrow 0$, 则以概率 1 有积分-微分方程

$$\frac{\partial G(u; b)}{\partial u} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} G(u; b) - \\ \frac{\lambda_1}{F\mu} \int_0^{b-u} G(u + x; b) dG_1(x) - \\ \frac{\lambda_1}{F\mu} G(b; b) \bar{F}(b - u) - \\ \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^u G(u - y; b) f_{\gamma}(y) dy - \\ \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^{\infty} \omega(u, y - u) f_{\gamma}(y) dy \quad (2)$$

成立, 并且当 $u \geq b$ 时, 由于存在障碍分红, Gerber-Shiu 函数满足 $G(u; b) = G(b; b)$, 证毕.

结合定义 3, 由式(2)可知, 在障碍分红下, 破产时刻的 Laplace 变换 $\psi(u; b)$ 满足

$$\psi'(u; b) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} \psi(u; b) - \\ \frac{\lambda_1}{F\mu} \int_0^{b-u} \psi(u + x; b) dG_1(x) - \\ \frac{\lambda_1}{F\mu} \psi(b; b) \bar{G}_1(b - u) - \\ \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^u \psi(u - y; b) f_{\gamma}(y) dy - \\ \frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^{\infty} f_{\gamma}(y) dy \quad (3)$$

3 障碍分红下破产时刻的 Laplace 变换

3.1 Laplace 变换满足的线性微分方程

定理 2 当 $0 \leq u \leq b$ 时, 破产时刻的 Laplace 变换满足 $\psi(u; b)$ 线性微分方程

$$\psi'''(u; b) + [(1 - \gamma)\beta - \alpha - \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}] \psi''(u; b) + [\frac{\lambda_2 \alpha - \lambda_1 (1 - \lambda) \beta}{F\mu} - \\ \alpha(1 - \gamma)\beta] \psi'(u; b) = \\ \frac{2\lambda_1 (1 - \gamma) \beta [\alpha - (1 - \lambda) \beta]}{F\mu} \psi(b; b) \bar{G}_1(b - u),$$

且满足 $\psi(u; \infty) = \varphi(u)$.

【证】 为方便证明, 首先做以下几个辅助工作. 在式(3)中, 先换元, 再对 u 求导, 有

$$(\int_0^{b-u} \psi(u + x; b) dG_1(x))' = \\ (\int_u^b \psi(x; b) g_1(x - u) dx)' = \\ \alpha \int_0^{b-u} \psi(u + x; b) dG_1(x) - \alpha \psi(u; b);$$

同时, 若记 $F_{\gamma}(y) = \int_0^y f_{\gamma}(s) ds$, 对 u 求导, 有

$$(\int_u^{\infty} f_{\gamma}(y) dy)' = -(1 - \gamma) \beta \bar{F}_{\gamma}(u);$$

还有

$[\bar{G}_1(b-u)]' = (1-\gamma)\beta\bar{G}_1(b-u)$. 关于 u 求导, 有

运用以上结果, 推导定理结论. 对式(3)两边

$$\begin{aligned} \psi''(u;b) = & \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} \psi'(u;b) + \frac{\lambda_1\alpha - \lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu} \psi(u;b) - \frac{\lambda_1\alpha}{F\mu} \int_0^{b-u} \psi(u+x;b) dG_1(x) - \\ & \frac{\lambda_1(1-\gamma)\beta}{F\mu} \psi(b;b) \bar{G}_1(b-u) + \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu} \int_0^u \psi(u-y;b) f_\gamma(y) dy + \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu} \bar{F}_\gamma(u) \quad (4) \end{aligned}$$

对式(4)两边关于 u 求导, 有

$$\begin{aligned} \psi'''(u;b) = & \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} \psi''(u;b) + \frac{\lambda_1\alpha - \lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu} \psi'(u;b) + \frac{\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2(1-\gamma)^2\beta^2}{F\mu} \psi(u;b) - \\ & \frac{\lambda_1\alpha^2}{F\mu} \int_0^{b-u} \psi(u+x;b) dG_1(x) - \frac{\lambda_1(1-\gamma)^2\beta^2}{F\mu} \psi(b;b) \bar{G}(b-u) - \\ & \frac{\lambda_2(1-\gamma)^2\beta^2}{F\mu} \int_0^u \psi(u-y;b) f_\gamma(y) dy - \frac{\lambda_2(1-\gamma)^2\beta^2}{F\mu} \bar{F}_\gamma(u) \quad (5) \end{aligned}$$

将式(3)乘以 $-\alpha$ 后与式(4)相加, 有

$$\begin{aligned} \psi''(u;b) - (\alpha + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}) \psi'(u;b) + \frac{\delta\alpha + \lambda_2[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \psi(u;b) = & \frac{\lambda_1[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \\ & \psi(b;b) \bar{G}_1(b-u) + \frac{\lambda_2[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \int_0^u \psi(u-y;b) f_\gamma(y) dy + \frac{\lambda_2[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \bar{F}_\gamma(u) \quad (6) \end{aligned}$$

将式(4)乘以 $-\alpha$ 后与式(5)相加, 有

$$\begin{aligned} \psi'''(u;b) - (\alpha + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}) \psi''(u;b) + \frac{\lambda_2[\alpha + (1-\gamma)\beta] + \delta\alpha}{F\mu} \psi'(u;b) - \\ \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \psi(u;b) = & \frac{\lambda_1(1-\gamma)\beta[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \psi(b;b) \bar{G}_1(b-u) - \\ & \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \int_0^u \psi(u-y;b) f_\gamma(y) dy - \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta[\alpha + (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \bar{F}_\gamma(u) \quad (7) \end{aligned}$$

将式(6)乘以 $(1-\gamma)\beta$ 后与式(7)相加, 有

$$\begin{aligned} \psi'''(u;b) + [(1-\gamma)\beta - \alpha - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}] \psi''(u;b) + \frac{\alpha(\lambda_2 + \delta) - (1-\gamma)\beta(\lambda_1 + \delta)}{F\mu} - \\ \alpha(1-\gamma)\beta] \psi'(u;b) + \frac{(1-\gamma)\beta\alpha\delta}{F\mu} \psi(u;b) = & \frac{2\lambda_1(1-\gamma)\beta[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \psi(b;b) \bar{G}_1(b-u) \quad (8) \end{aligned}$$

若记无分红时保险公司破产时刻的 Laplace 变换为 $\varphi(u)$, 则 $\psi(u;\infty) = \varphi(u)$, 且边界条件为 $\varphi(\infty) = 0$ (9)

3.2 无分红时破产时刻的 Laplace 变换

在式(8)中, 若令 $b \rightarrow \infty$, 则得到无分红情形下, 破产时刻的 Laplace 变换 $\varphi(u)$ 满足

$$\begin{aligned} \psi'''(u) + [(1-\gamma)\beta - \alpha - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}] \psi''(u) + \\ \frac{\alpha(\lambda_2 + \delta) - (1-\gamma)\beta(\lambda_1 + \delta)}{F\mu} - \\ \alpha(1-\gamma)\beta] \psi'(u) + \frac{(1-\gamma)\beta\alpha\delta}{F\mu} \psi(u) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

定理 3 无分红时保险公司破产时刻的 Laplace 变换为

$$\varphi(u) = \frac{\lambda_2 e^{-(1-\gamma)\beta u}}{k_1 e^{(1-\gamma)\beta r_1 u} - k_2},$$

其中,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{r_1 + (1-\gamma)\beta}; \\ k_2 &= F\mu r_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta) - \\ & \quad \frac{\lambda_1\alpha}{r_1 - \alpha} + \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{r_1 + (1-\gamma)\beta}. \end{aligned}$$

r_1 是特征方程(11)的唯一负根.

$$r^3 + [(1-\gamma)\beta - \alpha \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{F\mu}]r^2 + [\frac{\lambda_2\alpha - \lambda_1(1-\gamma)\beta}{F\mu} - \alpha(1-\gamma)\beta]r + \frac{(1-\gamma)\beta\alpha\delta}{F\mu} = 0 \quad (11)$$

【证】方程(11)为方程(10)的特征方程. 受文献[4]启发, 不妨设方程(11)有3个不同的实根 r_1 、 r_2 及 r_3 , 则方程(10)的通解为

$$\varphi(u) = C_1 e^{r_1 u} + C_2 e^{r_2 u} + C_3 e^{r_3 u},$$

其中, C_1 、 C_2 及 C_3 为任意常数. 不难发现 $\frac{(1-\gamma)\beta\alpha\delta}{F\mu} > 0$, 同时由于单笔赔付的期望

$\frac{1}{(1-\gamma)\beta}$ 会大于单笔保费的期望 $\frac{1}{\alpha}$, 进而

$(1-\gamma)\beta - \alpha \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{F\mu} < 0$, 所以方程(11)的3个根

之间必有 $r_1 < 0 < r_2 < r_3$. 注意到边界条件(9), 于是必有 $C_2 = C_3 = 0$. 因此, 方程(10)的通解为

$$\varphi(u) = C_1 e^{r_1 u} \quad (12)$$

以下求解 C_1 . 若令 $b \rightarrow \infty$, 则式(3)转化为

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} \varphi(u) - \\ &\frac{\lambda_1}{F\mu} \int_0^\infty \varphi(u+x) dG_1(x) - \\ &\frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^u \varphi(u-y) f_\gamma(y) dy - \\ &\frac{\lambda_2}{F\mu} \int_0^\infty f_\gamma(y) dy \end{aligned} \quad (13)$$

将式(12)代入式(13)得

$$\begin{aligned} C_1 \{ &[\frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu[r_1 + (1-\gamma)\beta]}] e^{[(1-\gamma)\beta + 2r_1]u} - \\ &[r_1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu} - \frac{\lambda_1\alpha}{F\mu(r_1 - \alpha)} + \\ &\frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{F\mu[r_1 + (1-\gamma)\beta]}] e^{r_1 u} \} = \frac{\lambda_2}{F\mu} e^{-(1-\gamma)\beta u} \end{aligned} \quad (14)$$

从式(14)中可解出 C_1 , 再将 C_1 代入式(12), 有

$$\varphi(u) = \frac{\lambda_2 e^{-(1-\gamma)\beta u}}{k_1 e^{(1-\gamma)\beta} e^{r_1 u} - k_2},$$

其中,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{r_1 + (1-\gamma)\beta}; \\ k_2 &= F\mu r_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta) - \\ &\frac{\lambda_1\alpha}{r_1 - \alpha} + \frac{\lambda_2(1-\gamma)\beta}{r_1 + (1-\gamma)\beta}. \end{aligned}$$

3.3 障碍分红下破产时刻的 Laplace 变换

定理4 障碍分红下保险公司破产时刻的 Laplace 变换为

$$\psi(u; b) = \varphi(u) + \frac{A}{1-A} \varphi(b) e^{-\alpha(b-u)}.$$

其中, $A = -2 \frac{(1-\gamma)\beta[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{\alpha[\alpha + (1-\gamma)\beta]}.$

【证】由于 $\bar{G}(b-u) = e^{-\alpha b} e^{\alpha u}$, 显然 α 不是方程(11)的特征根, 因此, 不妨设 $P e^{\alpha u}$ 为方程(8)的一个特解, 进而

$$\begin{aligned} P\alpha^3 + [(1-\gamma)\beta - \alpha - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{F\mu}]P\alpha^2 + \\ [\frac{\alpha(\lambda_2 + \delta) - (1-\gamma)\beta(\lambda_1 + \delta)}{F\mu} - \\ (1-\gamma)\beta\alpha]P\alpha + \frac{(1-\gamma)\beta\delta\alpha}{F\mu}P = \\ \frac{2\lambda_1(1-\gamma)\beta[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{F\mu} \psi(b; b) e^{-\alpha b}, \end{aligned}$$

从中解得 $P = A\psi(b; b) e^{-\alpha b}$, 其中,

$$A = -\frac{2(1-\gamma)\beta[\alpha - (1-\gamma)\beta]}{\alpha[\alpha + (1-\gamma)\beta]}.$$

因此, 方程(8)的通解为

$$\psi(u; b) = \varphi(u) + A\psi(b; b) e^{-\alpha b} e^{\alpha u} \quad (15)$$

由式(15)可知 $\psi(b; b) = \varphi(b) + A\psi(b; b)$, 从中解出 $\psi(b; b)$, 并代入式(15), 可得

$$\psi(u; b) = \varphi(u) + \frac{A}{1-A} \varphi(b) e^{-\alpha(b-u)}.$$

结 语

在复合 P-G 风险下, 本研究克服了仅单方面研究破产时刻的 Laplace 变换问题, 或仅单方面研究带投资分红问题的局限, 将带投资的障碍分红问题与破产时刻的 Laplace 变换问题统一起来, 进行进一步研究. 运用随机分析基本理论, 得到带投资和障碍分红的破产时刻 Laplace 变换所满足的更新方

程,并在指数分布假设下,得到复合 P-G 风险下投资和障碍分红破产时刻的 Laplac 变换显式解.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71371152);陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(2016JK2150)

作者简介:孙宗岐(1979—),西京学院副教授.研究方向:随机分析与运筹. E-mail: szqi200679@sina.com

引文:孙宗岐,杨鹏.带投资和障碍分红的破产时刻 Laplace 变换[J].深圳大学学报理工版,2021,38(2):214-220.

参考文献 / References:

- [1] GERBER H, SHIU E. On the time value of ruin [J]. North America Actuarial Journal, 1998, 2 (1): 48-72.
- [2] LIN X S, PAVLOVA K P. The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(1): 57-80.
- [3] 赵金娥, 李明. 一类稀疏风险模型的 Gerber-Shiu 函数和最优红利策略[J]. 应用概率统计, 2014, 30 (4): 439-448.
ZHAO Jin'e, LI Ming. On the Gerber-Shiu function and optimal dividend strategy for a thinning risk model [J]. Journal of Applied Probability and Statistics, 2014, 30 (4): 439-448. (in Chinese)
- [4] 陈洁, 吕玉华. 带分红的稀疏风险模型的期望折现罚金函数[J]. 山东大学学报理学版, 2015, 50(9): 78-83.
CHEN Jie, LV Yuhua. Discounted penalty function for a thinning risk model with dividend [J]. Journal of Shandong University Natural Science, 2015, 50(9): 78-83. (in Chinese)
- [5] 韩树新, 张兴宽. 两类带分红稀疏风险模型的期望折现罚金函数[J]. 南开大学学报自然科学版, 2016, 49 (5): 92-101.
HAN Shuxin, ZHANG Xingkuan. The expected discounted penalty function of thing risk models with Barrier dividend [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2016, 49(5): 92-101. (in Chinese)
- [6] 毛泽春, 刘锦蓁. 一类索赔次数的回归模型及其在风险分级中的应用[J]. 应用概率统计, 2004, 20(4): 359-367.
MAO Zechun, LIU Jin'e. A regression model based on double parameters Poisson distribution and its applications to risk classification [J]. Chinese Journal of Applied Probability Statistics, 2004, 20(4): 359-367. (in Chinese)
- [7] 贺丽娟, 王成勇, 张 镨. 变保费率复合 Poisson-Geometric 过程风险模型的 Gerber-Shiu 折现惩罚函数[J]. 工程数学学报, 2016, 33(2): 121-130.
- HE Lijuan, WANG Chengyong, ZHANG Kai. Gerber-Shiu discounted penalty function for compound Poisson-Geometric risk model with variable premium rate [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2016, 33 (2): 121-130. (in Chinese)
- [8] 乔克林, 韩建勤. 改进后的复合 Poisson-Geometric 风险模型 Gerber-Shiu 折现惩罚函数[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(10): 1743-1752.
QIAO Kelin, HAN Jianqin. The Gerber-Shiu discounted penalty function of an improved Poisson-Geometric risk model [J]. Journal of System Science and Mathematics Science, 2016, 36(10): 1743-1752. (in Chinese)
- [9] YANG Long, DENG Guohe, YANG Li, et al. A perturbed risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumber-Morgenstern copula [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2019, 35(4): 373-396. (in Chinese)
- [10] 苏必超, 李婧超. 经典风险模型中破产变量的联合分布[J]. 深圳大学学报理工版, 2019, 36(4): 419-423.
SU Bichao, LI Jingchao. The joint distribution of ruin related quantities in the classical risk model [J]. Journal of Shenzhen University Science and Engineering, 2019, 36 (10): 419-423. (in Chinese)
- [11] 孙宗岐, 刘宣会, 陈思源, 等. 基于注资-有界分红的随机微分投资-再保博弈[J]. 深圳大学学报理工版, 2017, 33(4): 364-371.
SUN Zongqi, LIU Xuanhui, CHEN Siyuan, et al. Stochastic differential investment-reinsurance games with capital injection-barrier dividend [J]. Journal of Shenzhen University Science and Engineering, 2017, 33 (4): 364-371. (in Chinese)
- [12] 孙宗岐, 陈志平. 复合 Poisson-Geometric 风险下保险公司的最优投资-再保-混合分红策略[J]. 工程数学学报, 2016, 33(5): 463-479.
SUN Zongqi, CHEN Zhiping. Optimal investment-reinsurance-hybrid dividend strategies for insurance company under compound Poisson-Geometric risk process [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2016, 33(5): 463-479. (in Chinese)
- [13] 汤 珂. 随机过程与金融衍生品[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2014.
TANG Ke. The stochastic process and financial derivatives [M]. Beijing: Renmin University of China Press, 2014. (in Chinese)

【中文责编: 方 圆; 英文责编: 淡 紫】