非厄米拓扑量子态中的病态和反常

王晓然, 寇谏鹏*

北京师范大学物理学系, 北京 100875

*联系人, E-mail: spkou@bnu.edu.cn

收稿日期: 2022-01-12; 接受日期: 2022-03-07; 网络出版日期: 2022-06-16

国家自然科学基金(编号: 12174030, 11974053)资助项目

摘要 拓扑量子态是凝聚态物理当中重要的研究领域. 拓扑量子态可以分为具有短程纠缠的对称性保护的拓扑量子态(Symmetry Protected Topological Quantum States, SPTs)和具有长程纠缠的对称性富化的拓扑量子态(Symmetry Enriched Topological Quantum States, SETs). 近年来, 人们发现非厄米拓扑系统存在许多不同于其厄米情况的有趣现象和性质. 因此, 非厄米拓扑系统逐渐成为人们研究的热点. 本文结合我们研究组近两年的工作, 简要介绍非厄米拓扑系统中拓扑量子态的病态与反常属性, 非厄米拓扑系统中数量反常的体边对应理论, 非厄米马约拉纳零模的非阿贝尔统计理论以及非厄米动力学弦的非厄米拓扑序理论等. 这些研究进展对于非厄米拓扑量子态的研究有重要的参考价值.

关键词 拓扑量子态, 非厄米, 奇异点, 病态

PACS: 73.90.-f, 74.90.-n, 75.10.Jm

1 引言

发现和认识新的量子态(Exotic Quantum State)一直是凝聚态物理学的重要研究目标. 从20世纪中叶朗道提出对称性和对称性自发破缺的概念之后, 对称性及其自发破缺的物理图像成为描述多体系统的基本概念. 但是, 近些年来, 拓扑量子态(Topological Quantum States)的发现突破了这一认识^[1-6]. 拓扑量子态具有刚性的拓扑属性, 如基态拓扑简并、无能隙边缘态、拓扑元激发、拓扑纠缠熵等. 这些性质不能利用对称性自发破缺理论加以刻画, 相反和整个体系的几何拓扑结构有关. 因此, 拓扑量子态为人们描绘出

一个丰富、优美的量子拓扑世界. 具体地, 拓扑量子态(简称拓扑态)可分为以下两类: 具有短程纠缠的对称性保护的拓扑量子态(Symmetry Protected Topological Quantum States, SPTs)^[7,8]和具有长程纠缠的对称性富化的拓扑量子态(Symmetry Enriched Topological Quantum States, SETs)^[9], 如图1所示. 拓扑绝缘体和拓扑超导体是无相互作用费米子系统中对称性保护拓扑态的例子^[1,2,4-6]. 基于Altland-Zirnbauer方法, 人们对拓扑能带结构进行分类, 发现一共有10种不同对称性保护的拓扑绝缘体和拓扑超导体^[10-12]. 内禀拓扑序(Intrinsic Topological Order)是一种典型的SET^[13-15]. 它的发现和认识大大拓宽了人们对量子物态的认

引用格式: 王晓然, 寇谏鹏. 非厄米拓扑量子态中的病态和反常. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 270009

Wang X R, Kou S P. Defectiveness and anomaly from non-Hermitian perturbations in topological quantum states (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 270009, doi: [10.1360/SSPMA-2022-0017](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2022-0017)

图 1 (网络版彩图)拓扑量子态分类: 具有短程纠缠的对称性保护拓扑态(SPTs)和具有长程纠缠的对称性富化拓扑态(SETs)
Figure 1 (Color online) Classification of topological quantum states: SPTs with short-range entanglement and SETs with long-range entanglement.

识. 根据SET定义, 具有相同拓扑序的长程纠缠量子态在对称性作用下可能会有不同的表现, 从而分属于不同的对称富化拓扑态. 例如, 二维内禀拓扑序主要包括分数量子霍尔态^[16–18]、(twisted) quantum double拓扑态^[19–21]、Levin-Wen弦网态^[22]等. 这些拓扑序可以由具有不同K矩阵的阿贝尔或非阿贝尔Chern-Simons-Witten拓扑场论描述^[13,15,23,24]. 同时, 对于不同的内禀拓扑序, 拓扑元激发可以由不同的酉模张量范畴(Unitary Modular Tensor Category)描述^[25–27], 拓扑简并基态由模空间(Modular Space)的不同S, T (Monodromy)矩阵描述^[13,28], 边界态由共形场论的不同Kac-Moody代数(不同的流代数模型)描述^[29]. 目前, 对于拓扑量子态的研究, 尤其是内禀拓扑量子态的研究, 人们仅仅考虑闭合系统, 把研究对象当做孤立系统. 但是, 真实的科学实验过程中, 当人们研究一个量子系统时, 该系统会不可避免地地和外界环境相互作用而成为开放量子系统. 当造成开放量子系统中退相干的量子跃迁(Quantum Jumping)效应可以忽略时, 人们往往利用有效的非厄米模型描述热库造成的影响. 物理中, 对于开放量子系统, 如果采取马尔可夫近似, 系统的动力学方程由Lindblad方程描述

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = i[\rho, H] + \sum_n \left(L_n \rho L_n^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_n L_n^\dagger, \rho \} \right), \quad (1)$$

式中, ρ 是系统的密度矩阵, H 是整个系统的厄米哈

密顿量, L_n 是跃迁算子. 对上述方程做一些化简, 可以得到 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = i(\rho H_{\text{eff}}^\dagger - H_{\text{eff}} \rho) + \sum_n L_n \rho L_n^\dagger$. 这里 $H_{\text{eff}} = H - \frac{i}{2} \sum_n L_n^\dagger L_n$. 在Lindblad主方程中, 密度矩阵的迹是守恒的. 当量子跃迁效应起主要作用时, 一个纯态在Lindblad主方程的限制下, 演化成一个混态. 但是, 如果量子跃迁效应可以忽略不计, 系统的动力学由上述非厄米哈密顿量 H_{eff} ($H_{\text{eff}} \neq H_{\text{eff}}^\dagger$)描述.

1998年, Bender和Boettcher^[30]发现具有宇称-时间反演($\mathcal{PT}$)对称的非厄米哈密顿量也可以存在全为实数的能谱. 这一发现使得具有PT对称性的非厄米系统受到关注. 之后Mostafazadeh等人^[31–33]建立了赝厄米体系(Pseudo-Hermitian System)和双正交基(Biorthogonal Basis)的非厄米量子力学理论. 由于非厄米的引入, 出现了很多新奇的概念和现象, 比如能量变成复数能量, 本征态之间变得不正交. 值得一提的是, 在非厄米体系中可以存在一类特殊的简并点, 即奇异点(Exceptional Points, EPs), 此时不仅本征能量相同, 本征态也发生了融合, 变成了同一个态^[34]. 近年来, 实验和理论的进展极大地促进了非厄米物理学的发展. 由于光学技术、量子调控技术的进步, 人们在越来越多的物理系统(如电路系统^[35–37]、自旋系统^[38]、光学系统^[39–49]、声学系统^[50–55]、冷原子系统^[56–58])中实现了 $\mathcal{PT}$ 对称的非厄米系统. 在2020年长篇综述中Ashida等人^[59]列举了1134篇相关文献, 我

们不再一一列举. 随着凝聚态体系中拓扑物态的研究趋于成熟, 非厄米拓扑物态成为近年来的研究热点, 如图2所示. 首先, 人们在具有拓扑能带的非厄米系统发现了一系列新奇的物理现象, 如病态边界态^[34,60–62]、分数拓扑数^[63]、非厄米拓扑数^[64]、非厄米趋肤效应^[65–69]、体边对应关系的破坏^[65,69–76]等. 2019年, 利用Altland-Zirnbauer分类方法, Ueda研究组^[77–79]和Zhou研究组^[80]在考虑了非厄米系统完备的内在对称性后, 发现非厄米能带拓扑结构不同于厄米情况, 共分为38类. 非厄米不仅对拓扑能带产生了重大影响, 也带给多体拓扑系统很多反常的物理现象, 例如, Z_2 拓扑序在耗散环境中拓扑相的破坏^[81]; 非厄米相互作用下的分数量子霍尔态^[82]; 在能隙不关闭的情况下非厄米多体系统可以存在连续相变, 这意味着Lieb-Robinson约束条件的崩塌^[83]; 非厄米的微扰可以破坏内禀拓扑序基态的拓扑简并, 这意味着非厄米拓扑序的雪崩效应^[84,85].

对于多体物理系统, 往往存在对称性/拓扑保护的子空间, 如何精确描述这个拓扑保护的子空间? 非厄米如何影响对称性/拓扑保护的子空间? 一方面我们利用这个有效模型, 研究系统基态/边界态的物理性质, 发现非厄米带来可能的病态现象; 另一方面, 将研究拓扑简并基态的模空间(Modular Space)性质, 了解非厄米带来的反常现象. 本文结合本研究组近两年在非厄米相关领域的研究结果, 将系统地介绍非厄米系统中拓扑量子态的病态和反常. 本文第2节介绍了非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常, 第3节介绍了非厄米拓扑超导体中的病态和反常, 第4节介绍了非厄米拓扑序中

的病态与反常. 第5节为总结.

2 非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常

我们知道, 边界态和体边对应关系是非厄米拓扑绝缘体领域的重要问题. 近年来对于非布洛赫拓扑数^[65,71]、非厄米趋肤效应^[65–69]、非布洛赫体边对应关系的建立^[65,71]等的探索和研究逐渐揭开了非厄米拓扑绝缘体的神秘面纱, 然而除了体边对应关系外, 缺陷边界态^[34]的存在是另一个被大家忽视但值得深入研究的重要问题. 为了理解并解释缺陷边界态的存在, 本研究组进行了相关的探索和研究^[60–62]. 在本节中, 基于一种特殊类型的受非厄米对称性保护的拓扑绝缘体一维非厄米Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模^[86,87], 借助边界态有效模型, 通过定义系统两个自归一边界态 $|\psi_{\pm}\rangle$ 的体边对应率 $\gamma_{\text{BBC}} = 1 - |\langle\psi_{+}|\psi_{-}\rangle|/2$, 及边界态的个数 $C_{\text{finite}} = 2\gamma_{\text{BBC}}$, 将非厄米拓扑系统中边态的数目异常变成一个可以定量计算的数学问题; 在通常的厄米情况下, $\gamma_{\text{BBC}} = 1$, 此时边界态正常. 而非厄米情况下, 当 $\gamma_{\text{BBC}} \neq 1$, 即 $1/2 < \gamma_{\text{BBC}} < 1$ 时定义此时边界态出现病态, 当 $\gamma_{\text{BBC}} = 1/2$ 时为奇性病态. 同时由于病态的存在, 拓扑系统将出现一系列的反常, 例如, 拓扑绝缘体中的体边对应的反常、拓扑序中系统的体准粒子与拓扑保护简并基态之间的对应关系反常以及非厄米拓扑超导中反常的SU(2) level-2的非阿贝尔统计等; 另外, 在二维拓扑绝缘体模型Qi-Wu-Zhang^[3]中通过相同的方法同样发现了非厄米引起的边界态的病态现象, 这将在今后的工作中介绍, 本文不再赘述. 接下来将对非厄米拓扑绝缘体中边界态的病态与反常进行系统的介绍.

2.1 一维非厄米SSH模型

为了展示非厄米拓扑绝缘体中边界态的病态与反常, 在一维SSH模型中加入非厄米项^[86],

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{NH-SSH}} = & (t_1 + i\gamma_x + \gamma_y) \sum_{n=1}^N |n, B\rangle \langle n, A| \\ & + (t_1 + i\gamma_x - \gamma_y) \sum_{n=1}^N |n, A\rangle \langle n, B| \\ & + i\gamma_z \sum_{n=1}^N (|n, A\rangle \langle n, A| - |n, B\rangle \langle n, B|) \end{aligned}$$

图2 (网络版彩图)非厄米与拓扑相结合带来的的新奇物理效应

Figure 2 (Color online) Novel physical effects brought by the combination of non-Hermitian and topology.

$$\begin{aligned}
 & + t_2 \sum_{n=1}^{N-1} |n+1, A\rangle \langle n, B| \\
 & + t_2 \sum_{n=1}^{N-1} |n, B\rangle \langle n+1, A|,
 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, A 和 B 分别标识不同的子格. t_1 和 t_2 分别为胞内和胞间跳跃强度. γ_x 和 γ_y 代表胞内向前向后非平衡跳跃强度. γ_z 代表虚数交错外势. $t_1, t_2, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ 都是实数. 在本文范围内设定 $t_2 = 1$. 该模型的布洛赫哈密顿量表示如下:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{NH-SSH}}(k) = & (t_1 + t_2 \cos k + i\gamma_x) \sigma_x \\
 & + (t_2 \sin k + i\gamma_y) \sigma_y + i\gamma_z \sigma_z.
 \end{aligned} \quad (3)$$

由此得其能量为

$$E(k) = \pm \sqrt{(t_1 + t_2 \cos k + i\gamma_x)^2 + (t_2 \sin k + i\gamma_y)^2 - \gamma_z^2}. \quad (4)$$

一般来说, 对于具有较小非厄米项的有能隙系统, 可以在动量空间最低能附近对哈密顿量展开, 得到其低能下的哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{NH-SSH}}(k) = & (t_1 - t_2 + i\gamma_x) \sigma_x + (t_2 k + i\gamma_y) \sigma_y + i\gamma_z \sigma_z \\
 = & m\sigma_x + (v_F k + iq_0) \sigma_y + im_A \sigma_z.
 \end{aligned} \quad (5)$$

与厄米模型的狄拉克方程 $\hat{H}(k) = m\sigma_x + v_F k \sigma_y$ 对比, 称 $(t_1 - t_2 + i\gamma_x) = m$ 为虚数质量项, t_2 为速度项, iq_0 为虚数动量项, $\gamma_z = m_A$ 为虚数的反对易质量项. 在接下来的部分, 将分别介绍这 3 种非厄米情况下拓扑绝缘体系统的病态与反常.

2.2 含虚数动量项的非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常

这一部分讨论含虚数动量项 ($\gamma_x = \gamma_z = 0, \gamma_y \neq 0$) 的 SSH 模型中边界态的病态与数量反常的体边对应关系. 在开边界情况下, 因为趋肤效应的存在, 可以通过相似变换得到可以描述系统拓扑性质的哈密顿量 $\bar{H}_{\text{NH-SSH}}(k)$ [65],

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{\text{NH-SSH}}(k) = & (\hat{S}_{\text{NHP}})^{-1} \hat{H}_{\text{NH-SSH}}(k) \hat{S}_{\text{NHP}} \\
 = & (\bar{t}_1 + \bar{t}_2 \cos k) \sigma_x + \bar{t}_2 \sin k \sigma_y.
 \end{aligned} \quad (6)$$

此时, 有效的胞内和胞间跳跃变为 $\bar{t}_1 = \sqrt{(t_1 - \gamma_y)(t_1 + \gamma_y)}$ 和 $\bar{t}_2 = t_2$. 为了更加直观地研究边界态的病态问题, 在拓扑区域 $|\bar{t}_1| < |\bar{t}_2|$ 中, 可得边界态有效哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}}$ 为

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}} = (U_{\text{edge}})^{-1} \hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}} (U_{\text{edge}}) = \bar{\Delta}^+ \tau^+ + \bar{\Delta}^- \tau^-. \quad (7)$$

根据有效哈密顿量, 边界态能量 $E_{\pm} = \bar{\Delta}^+ \bar{\Delta}^-$. 所以当 $N \rightarrow \infty$ 或者 $|t_1| = |\gamma_y|$ 时两个边界态能量简并, 态融合成一个, 即出现边界 EP. 所以热力学极限下边界 EP 的体边对应率趋于 1. 同时, 借助于一个严格定理, 通过验证体边对应率 γ_{BBC} 与 1 的偏差, 可以使得非厄米拓扑系统中边态的数目异常成为可以定量计算的一个数学问题.

2.3 含虚反对易质量项的非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常

这一部分, 讨论虚的交错外势的情况 ($\gamma_x = \gamma_y = 0, \gamma_z \neq 0$), 即具有虚数的反对易质量项的非厄米拓扑绝缘体. 对于这种情况系统拓扑区域仍为 $|t_1| < |t_2|$. 同样地, 为了直观研究边界态的病态和反常, 在拓扑区域内得边界态有效哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}}$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}} = i\gamma_z \tau^z + \Delta_0 \cdot \tau^x, \quad (8)$$

其中, $\Delta_0 = \frac{(t_1^2 - t_2^2)}{t_2} (-\frac{t_1}{t_2})^N$, τ^i 是描述两边界态形成的子空间的泡利矩阵. 通过计算发现 4 个矩阵元的数值和解析结果一致. 根据有效哈密顿量, 发现当 $\gamma_z = 0$ 或者 $\Delta_0 = 0$ 时, 系统趋向于厄米极限, 其有效哈密顿量遵循非常规条件. 另外, 边界态哈密顿量存在有效的 $\mathcal{PT}$ 对称性.

根据有效模型, 边界态能量为

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{\Delta_0^2 - |\gamma_z|^2}. \quad (9)$$

所以, 当 $|\gamma_z| = \Delta_0$, 边界态能量简并, 边界态融合成一个. 当 $|\Delta_0| > |\gamma_z|$, 得到系统的体边对应率为 $\gamma_{\text{BBC}} = 1 - \frac{|\gamma_z|}{2\Delta_0}$; 当 $|\Delta_0| < |\gamma_z|$, 系统的体边对应率为 $\gamma_{\text{BBC}} = 1 - \frac{\Delta_0}{2|\gamma_z|}$. 在热力学极限下, 边界态有效哈密顿量变成反厄米的, 即

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}} \rightarrow i\gamma_z \tau^z. \quad (10)$$

有效哈密顿量遵从常规非厄米条件, $\mathcal{PT}$ 对称区域被压缩到 $\varepsilon \rightarrow 0$ 并且边界 $\mathcal{PT}$ 相图只剩下体边对应率为 1 的 $\mathcal{PT}$ 对称性破缺区域.

2.4 含虚质量项的非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常

这一部分讨论非共轭胞内跳跃项($\gamma_y = \gamma_z = 0, \gamma_x \neq 0$), 即含虚质量项的非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常. 根据哈密顿量可以得到系统的能量:

$$E_{\pm}(k) = \pm \sqrt{(t_1 + i\gamma_x + t_2 \cos k)^2 + (t_2 \sin k)^2}. \quad (11)$$

从能谱可以看到当 $E(k) = 0$, 也就是当 $t_1 + t_2 \cos k = 0$, 及 $\gamma_x = \pm t_2 \sin k$ (等价于 $t_2^2 = \gamma_x^2 + t_1^2$)时, 边界EP出现. 由于拓扑相变发生在能隙关闭的地方, 也就是

$$t_2^2 = \gamma_x^2 + t_1^2. \quad (12)$$

另外, 拓扑相变点与边界EP重合. 在拓扑区域内, 边界态的有效哈密顿量为

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{edge}} = \Delta' \cdot \tau^x, \quad (13)$$

其中, $\Delta' = t_1'(-t_1'/t_2)^{N-1}(1 - (t_1'/t_2)^2)/(1 - (t_1'/t_2)^{2N})$, $t_1' = t_1 + i\gamma_x$, t_1' 为有效胞内跳跃强度. 从有效哈密顿量可以得出, 在拓扑区域内, 系统的体边对应率始终为1, 其边界态波函数未出现病态.

2.5 含虚动量项和反对易质量项的非厄米拓扑绝缘体中的病态和反常

当系统同时具有虚动量和反对易质量项时, 即具有有限交错势 ε 和有限 $\gamma_y = \gamma$ 的SSH模型的情况, 其中哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{NH}}(k) = \hat{H}_0^{\text{SSH}}(k) + i\gamma\sigma_y + \varepsilon\sigma_z. \quad (14)$$

正如前面所讨论的, 在开边界条件下非厄米相似变换有

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\text{NH}}(k) &= (\hat{S}_{\text{NHP}})^{-1} \hat{H}_{\text{NH-SSH}}(k) \hat{S}_{\text{NHP}} \\ &= (\bar{t}_1 + \bar{t}_2 \cos k)\sigma_x + \bar{t}_2 \sin k\sigma_y + \varepsilon\sigma_z. \end{aligned} \quad (15)$$

对于该系统, 在拓扑区 $|\bar{t}_1| < |\bar{t}_2|$, 可得到系统的边界态有效模型为

$$\check{\mathcal{H}}_{\text{eff}}^{\varepsilon} = (U_{\text{edge}})^{-1} \bar{\mathcal{H}}_{\text{edge}}^{\varepsilon} (U_{\text{edge}}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta^+ \\ \Delta^- & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中, $\bar{\Delta} = \frac{(\bar{t}_2 - \bar{t}_1^2)}{\bar{t}_2} (\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_2})^N$, $\Delta^+ = \bar{\Delta} e^{-Nq_0}$ 及 $\Delta^- = \bar{\Delta} e^{Nq_0}$. 从有效模型可以看出在热力学极限下系统存在3个相: (1) $|\bar{\Delta}^+| \rightarrow \infty, |\bar{\Delta}^-| \rightarrow 0$; (2) $|\bar{\Delta}^+| \rightarrow 0, |\bar{\Delta}^-| \rightarrow \infty$; (3) $|\bar{\Delta}^+| \rightarrow 0, |\bar{\Delta}^-| \rightarrow 0$. 即当 $\frac{\ln \Delta^+}{N} = 0$ 时发生相变. 由于两边界态能量总为 $E = \pm \sqrt{\bar{\Delta}^2 + \varepsilon^2} \sim \pm \varepsilon$, 即能隙未关闭, 因此称该相变为“隐藏”相变. 又由于 $|\bar{\Delta}^{\pm}| = \bar{\Delta} e^{\mp Nq_0} = \frac{(t_1^2 - t_2^2 - \gamma^2)}{t_2} \left(-\frac{t_1^2 - \gamma^2}{t_2^2} e^{\mp 2q_0} \right)^{N/2}$, 所以相变在热力学极限下发生的位置为 $\left(-\frac{t_1^2 - \gamma^2}{t_2^2} e^{\mp 2q_0} \right) = 1$ or $t_1 \pm \gamma = \pm t_2$. 经计算得 $\frac{\ln \Delta^+}{N}$ 的数值结果与解析结果一致. 同时, 该相变准确标识了系统由于非厄米引起的边界态的病态和反常, 具体相关内容参考文献[61].

3 非厄米拓扑超导体中的病态和反常

在凝聚态物理中, 马约拉纳零模的非阿贝尔统计(包括聚合规则和编织规则)是非常奇特的物理现象. 2001年, Ivanov^[88]从拓扑超导体涡旋中Bogoliubov-de Gennes方程的解推导出了马约拉纳零模的编织算符, 发现与Pfaffian量子霍尔态的非阿贝尔任意子相似, 马约拉纳零模变成服从SU(2) level-2的非阿贝尔统计. 寻找马约拉纳零模并验证相应的非阿贝尔统计成为凝聚态物理学的一个重要前沿问题.

3.1 非厄米马约拉纳零模的非阿贝尔统计

最近本研究组在相关方向的研究中发现, 由于粒子-空穴对称性破缺, 非厄米马约拉纳零模的非阿贝尔统计不同于通常的SU(2) level-2的非阿贝尔统计. 其中, 通常的Ivanov编织算符变为非厄米Ivanov编织算符, 通常的SU(2) level-2非阿贝尔统计变为反常的SU(2) level-2非阿贝尔统计. 该结果表明这种非厄米多体拓扑系统是高度非平凡的. 用两个复费米子将两个马约拉纳零模标识为

$$\gamma_1 = c_1 + c_1^{\dagger}, \quad (17)$$

$$\gamma_2 = -i(c_2 - c_2^{\dagger}), \quad (18)$$

所以非局域的马约拉纳比特可以表示为 $(|0\rangle_M, |1\rangle_M)$. 对于厄米系统, 费米子算符的整体相变 $\mathcal{S}$ 定义为 $(c, c^{\dagger}) \rightarrow (e^{i\phi}c, e^{-i\phi}c^{\dagger})$, 其中 ϕ 为实数. 这里, 将 ϕ 由实数变为虚数, 即 $\phi = i\beta$, 其中 β 为实数. 这样就有 $(c, c^{\dagger}) \rightarrow \mathcal{S}(c, c^{\dagger}) = (e^{\beta}c, e^{-\beta}c^{\dagger})$. 在此粒子空穴相

似变换下的非厄米马约拉纳零模 γ^β 以及马约拉纳比特为 $(|0\rangle_M^\beta, |1\rangle_M^\beta)$. 同时, 相应的厄米以及在此非厄米相似变换下的编织过程以及编织算符 R_M 和 R_M^β 分别为

$$R_M = e^{\frac{i\pi}{4}} \text{diag} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{i\pi}{4}} \right\}, \quad (19)$$

$$R_M^\beta = e^{\frac{i3\pi}{8}} \text{diag} \left\{ e^{-\frac{i\pi}{8}}, e^{\frac{i\pi}{8}} \right\}, \quad (20)$$

即, 在该非厄米情况下可以实现 $\pi/8$ 门. 同样地, 计算此时的贝利相位, 得到了反常贝利相位. 为了检验这个结果的有效性, 着重研究了一维Kitaev模型, 并进行了数值模拟. 数值结果与理论预测一致, 具体结果参考文献[89]. 这一新发现为具有长程纠缠的非厄米拓扑量子态的研究打开了一扇门. 进一步猜想, 通常的辫子群的理论可以推广为非么正辫子群的理论, 通常的酉模张量范畴的理论可以推广到非酉模张量范畴的理论, 通常的拓扑场论可以推广到非厄米拓扑场论等.

另外, 众所周知, 实现普适拓扑量子计算需要至少4个逻辑门: Hadamard门、相位门、CNOT门和 $\pi/8$ 门. 但是, 基于厄米的马约拉纳零模的拓扑量子计算 $\pi/8$ 门无法通过编织过程实现. 因此, 相应的普适拓扑量子计算(TQC)仍然是一个重要挑战. 我们提出了一个新的基于非厄米马约拉纳零模的拓扑量子计算理论——非厄米辅助的普适拓扑量子计算理论. 在该普适拓扑量子计算中, 可以实现包括 $\pi/8$ 门在内的4个逻辑门.

3.2 非厄米马约拉纳零模的病态与反常

另外, 我们还研究了非厄米拓扑超导中马约拉纳零模的病态问题[90]. 在一个典型的一维非厄米拓扑超导体——非厄米Kitaev链中, 跳跃强度和超导体配对项都是非互易的, 哈密顿量如下:

$$\hat{H}_{\text{NH}} = - \sum_j \left[t_L c_j^\dagger c_{j+1} + t_R c_{j+1}^\dagger c_j \right] \quad (21)$$

$$- \sum_j \left[\Delta^+ c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + \Delta^- c_{j+1} c_j + \mu (1 - 2n_j) \right], \quad (22)$$

其中, $c_j^\dagger$ (c_j)是 j 点处的费米产生(湮灭)算符. 总元胞数为 l , 元胞 j 的内部分A, B子格. $t_{L/R} = te^{\pm i\beta_1}$ 表示向左/向右跳跃强度的大小, 并且 $\epsilon = \pm 1$ 分别表示胞间和胞内. $\Delta^\pm = \Delta_0 e^{\pm i\beta_2}$ 为p-波对的产生和湮灭强度. μ 为化学势. 系统的非厄米性来源于非平衡跳跃强度 β_1 和非平衡超

导配对强度 β_2 . 通过相关计算[90]可以得到系统的边界态有效哈密顿量为

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{edge}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi \\ i\xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

根据边界有效哈密顿量可以求得两个边界模 $|\psi^\pm\rangle$. 为了描述两边界态的局域及正交性质, 定义两边界态的相似度 $\gamma_M \equiv \langle \psi^+ | \psi^- \rangle = (e^{-\beta_1} - e^{-\beta_2})(e^{\beta_2} - e^{\beta_1})\kappa$, 其中 κ 是 β_1 和 β_2 的函数. 当这两个非互易的非厄米项处于特定的组合时, 会出现病态的马约拉纳边界态, 即两个局域边缘态融合成一个. 因此, 传统的拓扑超导体的体-边界对应关系被打破. 随后据此定义了数量反常的体边对应关系(其中 C_{finite} 定义为边界态的个数)为

$$C_{\text{finite}} = 2 - \gamma_M. \quad (24)$$

另外, 将缺陷边态映射到非厄米横场伊辛模型的基态, 给出了全局相图. 我们的工作揭示了非厄米拓扑超导中马约拉纳零模的病态现象, 将对拓扑超导体、拓扑量子计算和非厄米物理产生重要影响.

4 非厄米拓扑序中的病态和反常

厄米的拓扑序是稳定的, 任何微扰都不能破坏简并基态. 正是由于这个原因, 拓扑序的简并基态常被当作自咎错的量子比特. 有趣的问题是当考虑非厄米效应时, 拓扑序是否稳定? 能否用作自咎错的量子比特? 有没有新的物性有利于调控? 基于这些问题本研究组做了相应的探索与研究[84, 85].

4.1 非厄米动力学弦和反常拓扑简并

基于非厄米Wen-Plaquette模型

$$\hat{H}_{\text{NTO}} = \hat{H}_{\text{TO}} + \hat{H}_{\text{PT}}, \quad (25)$$

其中,

$$\hat{H}_{\text{TO}} = -g \sum_i F_i, \quad (26)$$

$$\hat{H}_{\text{PT}} = \sum_i (h_x \sigma_i^x + i h_z \sigma_i^z). \quad (27)$$

h_x 和 h_z 是实参数. $\sigma_i^{x,y,z}$ 是在点 i 处的泡利矩阵. 且 $F_i = \sigma_i^x \sigma_{i+\hat{e}_x}^y \sigma_{i+\hat{e}_x+\hat{e}_y}^x \sigma_{i+\hat{e}_y}^y$. 在我们的研究中, g 始终设置为1, $g \equiv 1$. 在研究中考虑 $g \gg h_x, h_z$ 并且假定 $\hat{H}_{\text{PT}}$ 为微扰, 那么此时的基态为非厄米 Z_2 拓扑序. 在以前厄米部分相

关研究方法的基础上^[91], 我们得到 N 步环路 C_N 中3种非厄米动态弦: 操作字符串 $W_a(C_N)$ 、相弦 $P_a(C_N)$ 和动力弦 $D_a(C_N)$. 其中, $a = v, c, f$ 对应3种类型的准粒子(Z_2 -涡旋、 Z_2 -荷、费米子). 基于此, 建立了非厄米拓扑序理论. 对于非厄米拓扑序系统, 玻色子拓扑激发(e 粒子和 m 粒子)的有效模型是厄米紧束缚晶格模型:

$$\hat{H}_{\text{eff}}^a = \sum_{\langle I^a, J^a \rangle} \hat{t}_{I^a, J^a}^a + 2g \sum_{I^a} \phi_{a, I^a}^\dagger \phi_{a, I^a}, \quad (28)$$

其中, $a = v, c$, 我们得到 Z_2 -涡旋/ Z_2 -荷的色散关系为

$$E_{k^a} = \sqrt{(\xi_{k^a} + 2g)^2 - \xi_{k^a}^2}, \quad (29)$$

其中, $\xi_{k^a} = 2h_x \cos k_x^a$, k_x^a 是 I^a -晶格中动量空间的波矢量. 质量能隙为 $2g \sqrt{1 - \frac{4h_x}{g}}$. 当 h_x 变大时, Z_2 -荷/ Z_2 -涡旋的能隙关闭发生相变. 费米子拓扑激发(f 粒子)的有效模型变成了非厄米紧束缚晶格模型:

$$\hat{H}_{\text{eff}}^f = \sum_{\langle I^f, J^f \rangle} \hat{t}_{I^f, J^f}^f + 4g \sum_{I^f} \phi_{f, I^f}^\dagger \phi_{f, I^f} + 4g \sum_{I^f} \phi_{f, I^f}^\dagger \phi_{f, I^f}. \quad (30)$$

很明显, 对于有限 h_z 费米子的能量变为虚的. 另外, 通过计算厄米/非厄米拓扑闭动态弦的期望值, 得到了拓扑简并基态的有效赝自旋模型:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}^{e*o} = \frac{\Delta}{2} \tau^x + \frac{\varepsilon}{2} \tau^z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta(ih_z)^{L_y} & \alpha h_x^{L_0} \\ \alpha h_x^{L_0} & -\beta(ih_z)^{L_y} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中, $\Delta = \alpha(h_x)^{L_0}$ 且 $\varepsilon = \beta(ih_z)^{L_y}$ (α 和 β 为实数参数).

我们发现奇偶格子上非厄米Wen-Plaquette模型拓扑简并基态存在简并反常现象, 即拓扑保护基态的数目可以从2个减少到1个. 此时, 有效的赝自旋模型变成了典型的 $\mathcal{PT}$ 对称非厄米哈密顿量, 并伴随着 $\mathcal{PT}$ 对称性的自发破缺. 在“EP”处, 拓扑简并基态相互合并, 拓扑简并转变为非厄米简并. 我们发现这种现象可以有助拓扑量子信息的初始化, 并提出了非厄米 Z_2 拓扑序可能的物理实现. 具体请参考文献[84].

4.2 非厄米雪崩效应

在前面对于非厄米拓扑序研究的基础之上, 本研究组做了更加深入的研究, 基于一个非厄米Toric-Code模型:

$$\hat{H}_{\text{NTC}} = \hat{H}_{\text{TC}} + \hat{H}', \quad (32)$$

其中,

$$\hat{H}_{\text{TC}} = -g \left(\sum_s A_s + \sum_p B_p \right), \quad (33)$$

并且

$$\hat{H}' = \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \sum_i h_i^x \sigma_i^x + \sum_i h_i^y \sigma_i^y + \sum_i h_i^z \sigma_i^z. \quad (34)$$

$\hat{H}_{\text{TC}}$ 是Toric-Code模型哈密顿量, 且 $A_s = \prod_{i \in s} \sigma_i^x$, $B_p = \prod_{i \in p} \sigma_i^z$, 下标 s 和 p 分别表示正方形晶格的顶点和格子. 现在在第 i 个自旋处引入 $\mathbf{h}_i \neq \mathbf{h}_i^*$, 所以此时哈密顿量 $\hat{H}_{\text{NTC}} \neq \hat{H}_{\text{NTC}}^*$. 在此系统中我们发现了非厄米雪崩效应, 即基态的简并可以被局部非厄米微扰所改变. 我们给出了 Z_2 拓扑序的体准粒子与拓扑保护简并基态之间的对应关系. 此外, 利用保真度磁化率可以观察到拓扑简并基态空间的 $\mathcal{PT}$ 对称自发破缺, 相应的数值结果参考文献[85].

5 总结

在简单介绍近年来非厄米拓扑系统当中的重要进展的同时, 本文以非厄米拓扑系统中的病态和反常为主线介绍了本课题组在非厄米拓扑物态研究中的进展和理论. 首先, 在非厄米拓扑绝缘体中, 以一维SSH模型为例, 建立了边界态病态和反常理论, 分别研究了拓扑绝缘体中虚动量、虚质量以及虚反对易质量等不同非厄米情况下系统的病态和反常现象. 其次, 在非厄米拓扑超导的研究中, 发现由于粒子-空穴对称性破缺, 非厄米马约拉纳零模的非阿贝尔统计不同于通常的SU(2) level-2的非阿贝尔统计. 其中, 通常的Ivanov编织算符变为非厄米Ivanov算符, 通常的SU(2) level-2非阿贝尔统计变为反常的SU(2) level-2非阿贝尔统计. 进而得到了在厄米情况下无法通过编织过程实现 $\pi/8$ 门. 我们还进一步研究了非厄米拓扑超导体中的边界态的病态与反常, 将缺陷边态映射到非厄米横场伊辛模型的基态, 给出了全局相图. 最后, 在非厄米拓扑序的研究中, 建立了非厄米动力学弦理论、基于基态的有效模型发现基态拓扑简并反常现象, 拓扑简并转变为非厄米简并. 另外, 相比于厄米系统刚性的简并基态, 发现在非厄米系统中非厄米微扰就可以破坏基态的简并性, 使得系统的体准粒子与拓扑保护简并基态之间的对应关系崩塌, 即非厄米拓扑序中的雪崩效应.

参考文献

- 1 Hasan M Z, Kane C L. Colloquium: Topological insulators. *Rev Mod Phys*, 2010, 82: 3045–3067
- 2 Qi X L, Zhang S C. Topological insulators and superconductors. *Rev Mod Phys*, 2011, 83: 1057–1110
- 3 Qi X L, Wu Y S, Zhang S C. Topological quantization of the spin Hall effect in two-dimensional paramagnetic semiconductors. *Phys Rev B*, 2006, 74: 085308
- 4 Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Rep Prog Phys*, 2012, 75: 076501
- 5 Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, et al. Classification of topological quantum matter with symmetries. *Rev Mod Phys*, 2016, 88: 035005
- 6 Bansil A, Lin H, Das T. Colloquium: Topological band theory. *Rev Mod Phys*, 2016, 88: 021004
- 7 Gu Z C, Wen X G. Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order. *Phys Rev B*, 2009, 80: 155131
- 8 Chen X, Gu Z C, Liu Z X, et al. Symmetry-protected topological orders in interacting bosonic systems. *Science*, 2012, 338: 1604–1606
- 9 Wen X G. Quantum orders and symmetric spin liquids. *Phys Rev B*, 2002, 65: 165113
- 10 Zirnbauer M R. Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory. *J Math Phys*, 1996, 37: 4986–5018
- 11 Altland A, Zirnbauer M R. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys Rev B*, 1997, 55: 1142–1161
- 12 Kitaev A. Periodic table for topological insulators and superconductors. *AIP Conf Proc*, 2009, 1134: 22–30
- 13 Wen X G. Topological orders in rigid states. *Int J Mod Phys B*, 1990, 4: 239–271
- 14 Wen X G, Niu Q. Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces. *Phys Rev B*, 1990, 41: 9377–9396
- 15 Wen X G. Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states. *Adv Phys*, 1995, 44: 405–473
- 16 Laughlin R B. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys Rev Lett*, 1983, 50: 1395–1398
- 17 Arovas D, Schrieffer J R, Wilczek F. Fractional statistics and the quantum Hall effect. *Phys Rev Lett*, 1984, 53: 722–723
- 18 Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys Rev Lett*, 1982, 48: 1559–1562
- 19 Kitaev A Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann Phys*, 2003, 303: 2–30
- 20 Kitaev A. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Ann Phys*, 2006, 321: 2–111
- 21 Wen X G. Quantum orders in an exact soluble model. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 016803
- 22 Levin M A, Wen X G. String-net condensation: A physical mechanism for topological phases. *Phys Rev B*, 2005, 71: 045110
- 23 Wen X G. *Quantum Field Theory of Many-Body Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2004
- 24 Fradkin E, Nayak C, Tsvelik A, et al. A Chern-Simons effective field theory for the Pfaffian quantum Hall state. *Nucl Phys B*, 1998, 516: 704–718
- 25 Moore G, Seiberg N. Classical and quantum conformal field theory. *Commun Math Phys*, 1989, 123: 177–254
- 26 Verlinde E. Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory. *Nucl Phys B*, 1988, 300: 360–376
- 27 Rowell E, Stong R, Wang Z. On classification of modular tensor categories. *Commun Math Phys*, 2009, 292: 343–389
- 28 Wen X G. Modular transformation and bosonic/fermionic topological orders in Abelian fractional quantum Hall states. arXiv: 1212.5121
- 29 Moore G, Read N. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect. *Nucl Phys B*, 1991, 360: 362–396
- 30 Bender C M, Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 5243–5246; Bender C M, Brody D C, Jones H F. Complex extension of quantum mechanics. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 270401; Bender C M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. *Rep Prog Phys*, 2007, 70: 947–1018; Bender C M. Introduction to PT-symmetric quantum theory. *Contemp Phys*, 2005, 46: 277–292
- 31 Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. *J Math Phys*, 2002, 43: 205–214; Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus PT-symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum. *J Math Phys*, 2002, 43: 2814–2816; Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus PT-symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *J Math Phys*, 2002, 43: 3944–3951; Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity for a class of nondiagonalizable Hamiltonians. *J Math Phys*, 2002, 43: 6343–6352; Mostafazadeh A. Pseudo-supersymmetric quantum mechanics and isospectral pseudo-Hermitian Hamiltonians. *Nucl Phys B*, 2002, 640: 419–434
- 32 Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity and generalized PT- and CPT-symmetries. *J Math Phys*, 2003, 44: 974–989; Mostafazadeh A. Erratum: Pseudo-Hermiticity for a class of nondiagonalizable Hamiltonians [J. Math. Phys. 43, 6343 (2002)]. *J Math Phys*, 2003, 44: 943
- 33 Mostafazadeh A, Batal A. Physical aspects of pseudo-Hermitian and PT-symmetric quantum mechanics. *J Phys A-Math Gen*, 2004, 37: 11645–

11679

- 34 Lee T E. Anomalous edge state in a non-Hermitian lattice. [Phys Rev Lett](#), 2016, 116: 133903
- 35 Schindler J, Li A, Zheng M C, et al. Experimental study of active LRC circuits with PT symmetries. [Phys Rev A](#), 2011, 84: 040101
- 36 Assawaworrarit S, Yu X, Fan S. Robust wireless power transfer using a nonlinear parity-time-symmetric circuit. [Nature](#), 2017, 546: 387–390
- 37 Choi Y, Hahn C, Yoon J W, et al. Observation of an anti-PT-symmetric exceptional point and energy-difference conserving dynamics in electrical circuit resonators. [Nat Commun](#), 2018, 9: 2182
- 38 Wu Y, Liu W, Geng J, et al. Observation of parity-time symmetry breaking in a single-spin system. [Science](#), 2019, 364: 878–880
- 39 Guo A, Salamo G J, Duchesne D, et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials. [Phys Rev Lett](#), 2009, 103: 093902
- 40 Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, et al. Observation of parity-time symmetry in optics. [Nat Phys](#), 2010, 6: 192–195
- 41 Chong Y D, Ge L, Stone A D. PT-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems. [Phys Rev Lett](#), 2011, 106: 093902
- 42 Regensburger A, Bersch C, Miri M A, et al. Parity-time synthetic photonic lattices. [Nature](#), 2012, 488: 167–171
- 43 Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. [Nat Mater](#), 2013, 12: 108–113
- 44 Wimmer M, Miri M A, Christodoulides D, et al. Observation of Bloch oscillations in complex PT-symmetric photonic lattices. [Sci Rep](#), 2015, 5: 17760
- 45 Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, et al. Topologically protected bound states in photonic parity-time-symmetric crystals. [Nat Mater](#), 2017, 16: 433–438
- 46 Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points. [Nature](#), 2017, 548: 187–191
- 47 Wang S, Hou B, Lu W, et al. Arbitrary order exceptional point induced by photonic spin-orbit interaction in coupled resonators. [Nat Commun](#), 2019, 10: 832
- 48 Zhu X, Wang H, Gupta S K, et al. Photonic non-Hermitian skin effect and non-Bloch bulk-boundary correspondence. [Phys Rev Res](#), 2020, 2: 013280
- 49 El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, et al. Non-Hermitian physics and PT symmetry. [Nat Phys](#), 2018, 14: 11–19
- 50 Zhu X, Ramezani H, Shi C, et al. PT-Symmetric Acoustics. [Phys Rev X](#), 2014, 4: 031042
- 51 Popa B I, Cummer S A. Non-reciprocal and highly nonlinear active acoustic metamaterials. [Nat Commun](#), 2014, 5: 3398
- 52 Fleury R, Sounas D, Alú A. An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry. [Nat Commun](#), 2015, 6: 5905
- 53 Ding K, Ma G, Xiao M, et al. Emergence, coalescence, and topological properties of multiple exceptional points and their experimental realization. [Phys Rev X](#), 2016, 6: 021007
- 54 Zhu W, Fang X, Li D, et al. Simultaneous observation of a topological edge state and exceptional point in an open and non-Hermitian acoustic system. [Phys Rev Lett](#), 2018, 121: 124501
- 55 Wang X, Fang X, Mao D, et al. Extremely asymmetrical acoustic metasurface mirror at the exceptional Point. [Phys Rev Lett](#), 2019, 123: 214302
- 56 Hang C, Huang G, Konotop V V. PT symmetry with a system of three-level atoms. [Phys Rev Lett](#), 2013, 110: 083604
- 57 Zhang Z, Zhang Y, Sheng J, et al. Observation of parity-time symmetry in optically induced atomic lattices. [Phys Rev Lett](#), 2016, 117: 123601
- 58 Ding L, Shi K, Zhang Q, et al. Experimental determination of PT-symmetric exceptional points in a single trapped ion. [Phys Rev Lett](#), 2021, 126: 083604
- 59 Ashida Y, Gong Z, Ueda M. Non-Hermitian physics. [Adv Phys](#), 2020, 69: 249–435
- 60 Wang X R, Guo C X, Kou S P. Defective edge states and number-anomalous bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topological systems. [Phys Rev B](#), 2020, 101: 121116
- 61 Wang X R, Guo C X, Du Q, et al. State-dependent topological invariants and anomalous bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topological systems with generalized inversion symmetry. [Chin Phys Lett](#), 2020, 37: 117303
- 62 Wang C, Wang X R, Guo C X, et al. Defective edge states and anomalous bulk-boundary correspondence for topological insulators under non-Hermitian similarity transformation. [Int J Mod Phys B](#), 2020, 34: 2050146
- 63 Yin C, Jiang H, Li L, et al. Geometrical meaning of winding number and its characterization of topological phases in one-dimensional chiral non-Hermitian systems. [Phys Rev A](#), 2018, 97: 052115
- 64 Xu Y, Wang S T, Duan L M. Weyl exceptional rings in a three-dimensional dissipative cold atomic gas. [Phys Rev Lett](#), 2017, 118: 045701
- 65 Yao S, Wang Z. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems. [Phys Rev Lett](#), 2018, 121: 086803
- 66 Ghatak A, Das T. New topological invariants in non-Hermitian systems. [J Phys-Condens Matter](#), 2019, 31: 263001
- 67 Lee C H, Thomale R. Anatomy of skin modes and topology in non-Hermitian systems. [Phys Rev B](#), 2019, 99: 201103
- 68 Song F, Yao S, Wang Z. Non-Hermitian skin effect and chiral damping in open quantum systems. [Phys Rev Lett](#), 2019, 123: 170401

- 69 Longhi S. Probing non-Hermitian skin effect and non-Bloch phase transitions. [Phys Rev Res](#), 2019, 1: 023013
- 70 Xiong Y. Why does bulk boundary correspondence fail in some non-hermitian topological models. [J Phys Commun](#), 2018, 2: 035043
- 71 Yao S, Song F, Wang Z. Non-Hermitian chern bands. [Phys Rev Lett](#), 2018, 121: 136802
- 72 Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, et al. Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-Hermitian systems. [Phys Rev Lett](#), 2018, 121: 026808
- 73 Herviou L, Bardarson J H, Regnault N. Defining a bulk-edge correspondence for non-Hermitian Hamiltonians via singular-value decomposition. [Phys Rev A](#), 2019, 99: 052118
- 74 Yokomizo K, Murakami S. Non-Bloch band theory of non-Hermitian systems. [Phys Rev Lett](#), 2019, 123: 066404
- 75 Kunst F K, Dwivedi V. Non-Hermitian systems and topology: A transfer-matrix perspective. [Phys Rev B](#), 2019, 99: 245116
- 76 Deng T S, Yi W. Non-Bloch topological invariants in a non-Hermitian domain wall system. [Phys Rev B](#), 2019, 100: 035102
- 77 Gong Z, Ashida Y, Kawabata K, et al. Topological phases of non-Hermitian systems. [Phys Rev X](#), 2018, 8: 031079
- 78 Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, et al. Symmetry and topology in non-Hermitian physics. [Phys Rev X](#), 2019, 9: 041015
- 79 Kawabata K, Higashikawa S, Gong Z, et al. Topological unification of time-reversal and particle-hole symmetries in non-Hermitian physics. [Nat Commun](#), 2019, 10: 297
- 80 Zhou H, Lee J Y. Periodic table for topological bands with non-Hermitian symmetries. [Phys Rev B](#), 2019, 99: 235112
- 81 Trebst S, Werner P, Troyer M, et al. Breakdown of a topological phase: Quantum phase transition in a loop gas model with tension. [Phys Rev Lett](#), 2007, 98: 070602
- 82 Yoshida T, Kudo K, Hatsugai Y. Non-Hermitian fractional quantum Hall states. [Sci Rep](#), 2019, 9: 16895
- 83 Matsumoto N, Kawabata K, Ashida Y, et al. Continuous phase transition without gap closing in non-Hermitian quantum many-body systems. [Phys Rev Lett](#), 2020, 125: 260601
- 84 Guo C X, Wang X R, Wang C, et al. Non-Hermitian dynamic strings and anomalous topological degeneracy on a non-Hermitian toric-code model with parity-time symmetry. [Phys Rev B](#), 2020, 101: 144439
- 85 Guo C X, Wang X R, Kou S P. Non-Hermitian avalanche effect: Non-perturbative effect induced by local non-Hermitian perturbation on a Z_2 topological order. [Europhys Lett](#), 2020, 131: 27002
- 86 Chen R, Chen C Z, Zhou B, et al. Finite-size effects in non-Hermitian topological systems. [Phys Rev B](#), 2019, 99: 155431
- 87 Zhang D-W, Tang L-Z, Lang L-J, et al. Non-Hermitian topological Anderson insulators. [Sci China-Phys Mech Astron](#), 2020, 63: 267062
- 88 Ivanov D A. Non-abelian statistics of half-quantum vortices in p-wave superconductors. [Phys Rev Lett](#), 2001, 86: 268–271
- 89 Zhao X M, Guo C X, Yang M L, et al. Anomalous non-Abelian statistics for non-Hermitian Majorana zero modes: Alternative approach to universal topological quantum computation. arXiv: [2007.03864v1](#)
- 90 Zhao X M, Guo C X, Kou S P, et al. Defective Majorana zero modes in non-Hermitian Kitaev chain. arXiv: [2010.11451v1](#)
- 91 Kou S P. Topological quantum computation via the quantum tunneling effect. [Phys Rev Lett](#), 2009, 102: 120402; Yu J, Kou S P. Macroscopic quantum tunneling effect of Z_2 topological order. [Phys Rev B](#), 2009, 80: 075107; Kou S P. Realization of topological quantum computation with planar codes. [Phys Rev A](#), 2009, 80: 052317

Defectiveness and anomaly from non-Hermitian perturbations in topological quantum states

WANG XiaoRan & KOU SuPeng*

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Topological quantum states are important research fields in condensed matter physics, which can be divided into two categories: (1) symmetry-protected topological states (SPTs) with short-range entanglement and (2) symmetry-enriched topological states (SETs) with long-range entanglement. Recently, research on non-Hermitian topological quantum states (SPTs and SETs) has become a hot topic. In this review paper, we discuss the theory for non-Hermitian topological insulators—a particular type of SPTs and that for non-Hermitian Z_2 topological orders—a particular type of SETs based on the progress of our research group. These theories would help understand the physics of non-Hermitian topological quantum states.

topological quantum states, non-Hermitian, exceptional points, defectiveness

PACS: 73.90.-f, 74.90.-n, 75.10.Jm

doi: [10.1360/SSPMA-2022-0017](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2022-0017)