中国科学: 数学 2010 年 第 40 卷 第 7 期: 683～692
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

带有不同权函数的退化拟线性椭圆方程弱解的 Hölder 正则性

崔学伟*, 钮鹏程

西北工业大学应用数学系, 西安 710072
E-mail: c88xw@163.com, pengchengniu@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2009-06-23; 接受日期: 2010-04-04; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10871157)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号:200806990032) 和西北工业大学科技创新基金 (批准号:2007KJ01012, 2008KJ02033) 资助项目

摘要 我们研究了一类系数依赖于两不同权函数的退化拟线性椭圆方程. 利用加权 Sobolev 不等式, 加权 Poincaré 不等式及 Moser 迭代技巧, 得到了非负弱解的 Harnack 不等式, 证明了弱解的 Hölder 连续性.

关键词 弱解 权函数 Harnack 不等式 Hölder 连续性

MSC (2000) 主题分类 35D10, 35J70

1 引言

我们研究有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 上如下的退化拟线性椭圆方程

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i(A^{ij}(x,u,Du)D_j u) + bv(x)\,|Du|^{p-2}\,Du = 0 \tag{1.1}$$

弱解的正则性, 其中 b 为常数, $a^{ij}(x) = A^{ij}(x,u,Du)$ 可测, 对称, $w(x), v(x)$ 为 Ω 上非负可测的权函数 (对于 $w(x), v(x)$ 更加具体的要求参见第 2 节), 使得

$$|Du|^{p-2}|\xi|^2 w(x) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant |Du|^{p-2}|\xi|^2 v(x), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, 2 \leqslant p < \infty. \tag{1.2}$$

线性和拟线性一致椭圆方程 (组) 弱解的正则性已得到广泛的研究, 参见文献 [1–3]. 在带有权函数的线性和拟线性退化椭圆方程 (组) 弱解的研究方面, Fabes 等人 [4] 证明了线性退化椭圆方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_j u) = 0, \tag{1.3}$$

弱解的 Hölder 连续性, 其中系数矩阵 $(a_{ij}(x))$ 对称, 满足:

$$w(x)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant v(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

引用格式: Cui X W, Niu P C. Hölder continuity of weak solutions for degenerate quasilinear elliptic equations with different weights (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(7): 683–692

$v(x)=w(x)\in A^2$ (Muckenhoupt 类). 随后, Gutiérrez[5], Vitanza 和 Zamboni[6], De Cicco 和 Vivaldi[7], Zamboni 等人 [8] 研究了带有低阶项的情形, 在低阶项系数属于某些特殊加权函数空间的情形下, 得到了方程非负弱解的 Harnack 不等式, 证明了方程弱解的 Hölder 连续性. Chanillo 和 Wheeden[9] 证明了不等权 ($v(x)\neq w(x)$) 时, 方程 (1.3) 弱解的连续性. 最近, Pingen[10] 探讨了形式类似于 (1.1) 的非齐次散度型拟线性退化椭圆方程组在不等权时弱解的正则性, 在极小的假设条件下, 利用弱 Harnack 不等式及 Caffarelli[11] 的思想, 得到了方程组弱解的局部 Hölder 连续性. 以上文献的讨论均是在 $p=2$ 的情形下进行的. 而 $p\neq 2$ 时, 带有不同权函数的退化椭圆方程 (组) 弱解正则性的研究还未见到. 本文研究 $p\geqslant 2$ 时, 在条件 (1.2) 下, 拟线性退化椭圆方程 (1.1) 弱解的正则性. 本文的主要想法是基于 Trudinger 在文献 [12] 中的方法 (该方法避开了 John-Nirenberg 引理的运用), 首先得到非负弱解的 Harnack 不等式, 然后利用经典的方法获得弱解的 Hölder 连续性.

我们的主要结果是:

定理 1 设 u 为方程 (1.1) 在 $B_{R_0}\subset\Omega$ 上的非负弱解, $\frac{z(B_{R_0})}{w(B_{R0})}\leqslant C_1$, 则对于任意的 $R<R_0$, 有

$$\sup_{B_R} u\leqslant C\inf_{B_R} u.$$

定理 2 设 u 为方程 (1.1) 的弱解, 若对于任意的 $B_R\subset\Omega$, $\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\leqslant C_1$, 则存在 $C>0, 0<\gamma<1$, 使得

$$\mathrm{osc}_{B_R} u\leqslant C\left(\frac{R}{d_x}\right)^{\gamma}\mathrm{osc}_{B_{d_x}} u,$$

其中 $z(x)=\frac{v^p(x)}{w^{p-1}(x)}$, $w(B_R)=\int_{B_R} w(x)dx$, $z(B_R)=\int_{B_R} z(x)dx$, $d_x=\mathrm{dist}(x,\Omega)$. 从而 u 在 Ω 上局部 Hölder 连续.

本文中的 c, C, 及带有下标或带有参数的 c, C 仅表示常数, 即使在同一不等式中出现, 也可以不相同. 设 $x_0\in\mathbb{R}^n, B_R(x_0)$ 表示以 x_0 为中心, 半径为 R 的球, 在不强调中心的情况下, 简记为 $B_R, |B_R|$ 表示它的 Lebesgue 测度. 在不加特殊说明的情形下, 同一不等式中半径不同的球为同心球.

2 权函数及加权函数空间

定义 1 设 $w(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 为一非负函数 , $1<p<\infty$, 若

$$\sup_{B_R\subset\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}dx\right)^{p-1}=:C_p<\infty,$$

则称权函数 $w(x)$ 属于 A_p 类 (Muckenhoupt 类). 若对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于每一个可测集 $E\subset B_R$, $|E|<\delta|B_R|$, 有 $w(E)\leqslant\varepsilon w(B_R)$, 其中 $w(E)=\int_E w(x)dx$, 则称权函数 $w(x)$ 属于 A_∞ 类.

注 1 A_p 类及 A_∞ 类具有如下的性质：$A_\infty=\bigcup_{p>1}A_p$; 对于 $w(x)\in A_\infty$, 总存在 $K>0$, 使得 $w(B_{2R})\leqslant Kw(B_R)$, 即权函数 $w(x)$ 具有二重性质 (参见文献 [10]).

本文对 (1.2) 中出现的权函数 $w(x)$ 和 $v(x)$, 要求函数 $w(x)$ 和 $z(x)=\frac{v^p(x)}{w^{p-1}(x)}$ 满足如下假定:

1. 权函数 $w(x)$, $z(x)$ 具有二重性质.

2. 加权 Poincaré 不等式和加权 Sobolev 不等式成立, 即存在 $C>0, k>1$, 使得对于任意的球 $B_R\subset\Omega$, $f\in C^1(\overline{B_R})$, 有

$$\left(\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R}\left|f(y)-\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R} f(x)z(x)dx\right|^{kp} z(y)dy\right)^{\frac{1}{kp}}$$

$$\leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}|Df(x)|^p\,w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}};\tag{2.1}$$

对于任意的 $f\in C_0^1(B_R)$, 有

$$\left(\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R}|f(x)|^{kp}\,z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}}\leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}|Df(x)|^p\,w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{2.2}$$

注 2 若 $w(x)=v(x)\in A_2$, 则假定 1、2 成立 (参见文献 [4]). 若 $w(x)\neq v(x), w(x)\in A_p, z(x)=\frac{v^p(x)}{w^{p-1}(x)}$ 具有二重性质, 且存在 $q=kp>p$, 使得对于所有的球心在 B_{2R} 的球 B_R, $s\in(0,1)$, 有

$$s\left(\frac{z(B_{sR})}{z(B_R)}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\frac{w(B_{sR})}{w(B_R)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 (2.1), (2.2) 也成立 (参见文献 [10, 13]).

注 3 对于 $\sigma>0$, $a\in B_R(0)$, 存在正常数 c_1,c_2, 使得

$$c_1R^n(R+|a|)^\sigma\leqslant\int_{B_R(a)}|x|^\sigma\,dx\leqslant c_2R^n(R+|a|)^\sigma,\tag{2.3}$$

参见文献 [10]. 若令 $w(x)=|x|^\sigma$, $v(x)=|x|$, $\sigma\in(-n,\min\{\frac{n+p}{p-1},p-n\})$, 则 $w(x)$ 及 $v(x)$ 在 $B_1(0)$ 上满足以上条件 1、2.

下面介绍弱解定义中用到的加权函数空间.

定义 2 我们用 $H^{1,p}(\Omega,v,w)$ 表示 $C^1(\bar{\Omega})$ 在如下范数

$$\|u\|_{1,p,\Omega}=\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_iuD_judx+\int_\Omega|u|^p\,v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

下的完备化; 用 $H_0^{1,p}(\Omega,v,w)$ 表示 $C_0^1(\Omega)$ 在如下范数

$$\|u\|_{1,p,0,\Omega}=\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_iuD_judx\right)^{\frac{1}{p}}$$

下的完备化.

注 4 由 (1.2) 式易见,

$$\int_\Omega|Du|^p\,w(x)dx+\int_\Omega|u|^p\,v(x)dx\leqslant\|u\|_{1,p,\Omega}^p\leqslant\int_\Omega(|Du|^p+|u|^p)v(x)dx.$$

定义 3 如果 $u\in H^{1,p}(\Omega,v,w)$, 且对于任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\varphi\geqslant0$, 有

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_juD_i\varphi dx+\int_\Omega bv(x)\,|Du|^{p-2}\,Du\varphi dx\leqslant0,\tag{2.4}$$

则称 u 为方程 (1.1) 的弱下解. 如果 $-u$ 为方程 (1.1) 的弱下解, 则称 u 为方程 (1.1) 的弱上解. 如果 u 既为方程 (1.1) 的弱下解, 又为方程 (1.1) 的弱上解, 则称 u 为方程 (1.1) 的弱解.

3 弱解的局部有界性

引理 1 设 u 为方程 (1.1) 在 Ω 上的弱下解, 则对于满足条件 $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leqslant C_1$ 的任意 $B_R \subset \Omega$, $0<\alpha<\beta<1$, 有

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leqslant C(n,\alpha,\beta,C_1)\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}} \left|u^+\right|^p z(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.1}$$

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leqslant C(n,\alpha,\beta,C_1)\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}} \left|u^+\right|^{kp} z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}}, \tag{3.2}$$

其中 $u^+(x)=\max\{u(x),0\}, k$ 为不等式 (2.1) 和不等式 (2.2) 中的常数.

证明 设 $q \geqslant 1, 0<N<\infty$, 令

$$F_N(u)=\begin{cases}(u^+)^q, & u \leqslant N,\\ qN^{q-1}u-(q-1)N^q, & u>N.\end{cases}$$

在 (2.4) 中取试验函数 $\varphi(x)=\eta^p(x)F_N(u)$, 其中 $\eta \geqslant 0, \eta \in C_0^\infty(B_R)$, 得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_j u\eta^p F_N'(u)D_i u dx\\ &\quad\leqslant -p\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_j u\eta^{p-1}D_i\eta F_N(u)dx-\int_\Omega bv(x)\left|Du\right|^{p-2}Du\eta^p(x)F_N(u)dx.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (1.2) 的左端不等式知, (3.3) 式左端可估计为

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_j u\eta^p F_N'(u)D_i u dx \geqslant \int_\Omega \eta^p|Du|^p F_N'(u)w(x)dx. \tag{3.4}$$

利用 (1.2) 的右端不等式、Cauchy 不等式、含 ε 的 Young 不等式, 并注意到 $F_N(u) \leqslant u^+F_N'(u)$, 可将 (3.3) 式右端放大为

$$\begin{aligned}&\left|p\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_j u\eta^{p-1}D_i\eta F_N(u)dx+\int_\Omega bv(x)|Du|^{p-2}Du\eta^p(x)F_N(u)dx\right|\\ &\quad\leqslant p\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \eta^{p-1}\sqrt{a^{ij}(x)D_j uD_i u}\sqrt{a^{ij}(x)D_j\eta D_i\eta}F_N(u)dx\\ &\qquad+|b|\int_\Omega |Du|^{p-1}\eta^p(x)F_N(u)v(x)dx\\ &\quad\leqslant p\int_\Omega \eta^{p-1}|Du|^{p-1}|D\eta|F_N(u)v(x)dx+|b|\int_\Omega |Du|^{p-1}\eta^p(x)u^+F_N'(u)v(x)dx\\ &\quad\leqslant p\int_\Omega \eta^{p-1}|Du|^{p-1}|D\eta|u^+F_N'(u)w^{\frac{p-1}{p}}(x)w^{-\frac{p-1}{p}}(x)v(x)dx\\ &\qquad+|b|\int_\Omega \eta^{p-1}|Du|^{p-1}\eta u^+F_N'(u)w^{\frac{p-1}{p}}(x)w^{-\frac{p-1}{p}}(x)v(x)dx\\ &\quad\leqslant \varepsilon\int_\Omega \eta^p|Du|^pF_N'(u)w(x)dx+C(\varepsilon,p)\int_\Omega (|D\eta|^p+\eta^p)(u^+)^pF_N'(u)z(x)dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

将不等式 (3.4), (3.5) 代入 (3.3), 则有

$$\int_\Omega \eta^p |Du|^p F_N'(u) w(x) dx \leqslant C \int_\Omega (|D\eta|^p + \eta^p)(u^+)^p F_N'(u) z(x) dx. \tag{3.6}$$

令

$$G_N(u) = \int_0^u |F_N'(t)|^{\frac{1}{p}}\, dt = \begin{cases} q^{\frac{1}{p}} \dfrac{p}{p+q-1} (u^+)^{\frac{p+q-1}{p}}, & u \leqslant N, \\ q^{\frac{1}{p}} N^{\frac{q-1}{p}} u, & u > N, \end{cases}$$

则 (3.6) 可改写为

$$\int_\Omega \eta^p \left|DG_N(u)\right|^p w(x) dx \leqslant C \int_\Omega (|D\eta|^p + \eta^p) \left|u^+ G_N'(u)\right|^p z(x) dx. \tag{3.7}$$

注意到 $G_N(u) \leqslant u^+ G_N'(u)$, 由不等式 (2.2) 及 (3.7), 有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} \left|\eta G_N(u)\right|^{kp} z(x) dx\right)^{\frac{1}{kp}} \\
&\qquad \leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} (|D\eta G_N(u)| + |\eta DG_N(u)|)^p w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} \left|D\eta G_N(u)\right|^p w(x) dx + \frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} (|D\eta|^p + \eta^p) \left|u^+ G_N'(u)\right|^p z(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \leqslant CR\left(\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} (|D\eta|^p + \eta^p) \left|u^+ G_N'(u)\right|^p z(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

设 $0 < \alpha < \rho < \sigma < \beta < 1$, 取函数 $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ 使得 $\operatorname{supp} \eta \subset B_{\sigma R}$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \equiv 1\,(x \in B_{\rho R})$, $|D\eta| \leqslant \frac{C}{(\sigma-\rho)R}$, 由权函数的二重性质, 上式可表示为

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})} \int_{B_{\rho R}} \left|G_N(u)\right|^{kp} z(x) dx\right)^{\frac{1}{kp}} \leqslant C(C_1)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\sigma-\rho} \left(\frac{1}{z(B_{\sigma R})} \int_{B_{\sigma R}} \left|u^+ G_N'(u)\right|^p z(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.8}$$

令 $l = \frac{p+q-1}{p}$, 在上式中令 $N \to \infty$, 然后取 l 次方根, 得

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})} \int_{B_{\rho R}} \left|u^+\right|^{lkp} z dx\right)^{\frac{1}{lkp}} \leqslant \left(\frac{Cl}{\sigma-\rho}\right)^{\frac{1}{l}} \left(\frac{1}{z(B_{\sigma R})} \int_{B_{\sigma R}} \left|u^+\right|^{pl} z(x) dx\right)^{\frac{1}{pl}}. \tag{3.9}$$

令 $l = k^i, \sigma = \rho_i = \alpha + (\beta-\alpha)^i, \rho = \rho_{i+1}$ 以及

$$I_i = \left(\frac{1}{z(B_{\rho_i R})} \int_{B_{\rho_i R}} \left|u^+\right|^{k^i p} z(x) dx\right)^{\frac{1}{k^i p}},$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$, 则 (3.9) 式可写为

$$I_{i+1} \leqslant \left(C\left(\frac{k}{\beta-\alpha}\right)^i\right)^{\frac{1}{k^i}} I_i. \tag{3.10}$$

将 (3.10) 连续迭代 i 次, 得

$$I_{i+1} \leqslant C^{\sum_{j=1}^i \frac{1}{k^j}} \left(\frac{k}{\beta-\alpha}\right)^{\sum_{j=1}^i \frac{j}{k^j}} I_1$$

$$= C^{\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{k^j}}\left(\frac{k}{\beta-\alpha}\right)^{\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{k^j}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|u^+\right|^{kp}z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}}.$$

从而有

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leqslant C(n,\alpha,\beta,C_1)\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}|u^+|^{kp}z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}},$$

于是 (3.2) 得证. 类似地可得 (3.1).

注 5 若 $-u$ 为方程的弱下解, 则将引理 1证明中函数 $F_N(u)$ 的参数 $q\geqslant 1$ 修改为 $q\in(-(p-1),0)$, 并对 $F_N(u)$ 作微小的修改, 仍可得到不等式 (3.9), 其中 $l\in(0,\frac{p-1}{p})$. 这一点将在第 4 节用到.

当 u 为方程 (1.1) 在 Ω上的非负弱下解时, 我们在引理 1 的证明中放宽 q 的限制为 $q>0$, 可知 (3.9) 对于 $l>\frac{p-1}{p}$ 也成立, 于是有如下的结论:

推论 1 设 u 为方程 (1.1) 在 Ω 上的非负弱下解, 则对于满足条件 $\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\leqslant C_1$ 的任意 $B_R\subset\Omega, 0<\alpha<\beta<1$ 和 $\gamma>p-1$, 有

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leqslant C\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}u^{\gamma}z(x)dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

4 弱解的 Hölder 连续性

引理 2 设 u 为方程 (1.1) 在 Ω 上的非负弱上解, 则对于满足条件 $\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\leqslant C_1$ 的任意 $B_R\subset\Omega$, $0<\alpha<\beta<1$ 有

$$\frac{1}{\inf_{B_{\alpha R}} u}\leqslant \exp\left(C-\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}(\log u)z(x)dx\right).$$

证明 假定 $u\geqslant\varepsilon>0$, 在方程 (1.1) 的弱上解定义中, 取试验函数 $\varphi(x)=\eta(x)u^{-(p-1)}(x)$, 其中 $\eta\geqslant 0,\eta\in C_0^\infty(B_R)$, 得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u^{-(p-1)}D_juD_i\eta dx-(p-1)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\eta u^{-p}D_juD_iudx\\&\quad+\int_\Omega bv(x)\left|Du\right|^{p-2}Du\eta u^{-(p-1)}dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

令 $g=\log\frac{t}{u}$, 其中 t 为待定常数, 由上式得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u^{-(p-2)}D_jgD_i\eta dx+(p-1)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\eta u^{-(p-2)}D_jgD_igdx\\&\quad+\int_\Omega b\eta\left|Dg\right|^{p-2}Dgv(x)\leqslant 0.\end{aligned}$$

从而有

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u^{-(p-2)}D_jgD_i\eta dx+\int_\Omega b\eta\left|Dg\right|^{p-2}Dgv(x)dx\leqslant 0.$$

即 g 为方程 (1.1) 的弱下解. 于是由引理 1, 对于任意的 $0<\alpha<\beta<1$, 有

$$\sup_{B_{\alpha R}} g\leqslant C\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|g^+\right|^p z(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

在方程 (1.1) 弱上解的定义中, 重新取试验函数 $\varphi(x)=\eta^p(x)u^{-(p-1)}(x)$, 其中 $\eta\geqslant 0,\eta\in C_0^\infty(B_R)$, 类似于 (3.6) 的证明, 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta^p u^{-p}\left|Du\right|^p w(x)dx &\leqslant c\int_\Omega |Du|^{p-1}\eta^{p-1}u^{-(p-1)}(|D\eta|+\eta)v(x)dx\\ &\leqslant \varepsilon\int_\Omega \eta^p u^{-p}\left|Du\right|^p w(x)dx+c\int_\Omega (|D\eta|+\eta)^p z(x)dx.\end{aligned}$$

进而有

$$\int_\Omega \eta^p\left|Dg\right|^p w(x)dx\leqslant c\int_\Omega (|D\eta|+\eta)^p z(x)dx. \tag{4.2}$$

现在令 η 满足 $\operatorname{supp}\eta\subset B_R, 0\leqslant\eta\leqslant 1$, $\eta\equiv 1(x\in B_{\beta R})$, $|D\eta|\leqslant\frac{c}{(1-\beta)R}$, 则由 (4.2) 及权函数 $z(x)$ 的二重性质, 有

$$\int_{B_{\beta R}}\left|Dg\right|^p w(x)dx\leqslant\frac{c}{R^p}\int_{B_{\beta R}} z(x)dx. \tag{4.3}$$

取 t 使得 $\log t=\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}(\log u)z(x)dx$, 由不等式 (2.1), (4.3) 及权函数 $z(x)$ 的二重性质, 得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|g\right|^{kp} z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}} &\leqslant cR\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|Dg\right|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant c\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}} z(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant c\left(\frac{|z(B_{\beta R})|}{|w(B_{\beta R})|}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

由 (4.1) 式, Hölder 不等式及 (4.4), 可得

$$\begin{aligned}\log t+\log\frac{1}{\inf_{B_{\alpha R}}u}=\sup_{B_{\alpha R}} g &\leqslant c\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|g^+\right|^p zdx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant c\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}\left|g^+\right|^{kp} zdx\right)^{\frac{1}{kp}}=C.\end{aligned}$$

注意到 t 的取法, 即得结果.

引理 3 在引理 2 的条件下, 对于任意的 $0<\gamma<k(p-1)$, 有

$$\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})}\int_{B_{\alpha R}}\left|u\right|^\gamma z(x)dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant\exp\left(C+\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}(\log u)z(x)dx\right).$$

其中 k 为 (2.1) 和 (2.2) 不等式中的常数.

证明 假定 $u\geqslant\varepsilon>0$. 令 $f=(\log\frac{u}{t})^+$, 其中常数 t 如引理 2 的证明所述, 在方程 (1.1) 的弱上解定义中, 取试验函数 $\varphi(x)=\eta^p u^{-(p-1)}(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})$, 其中 $\delta\geqslant 1,\eta\geqslant 0,\eta\in C_0^\infty(B_R)$, 类似于 (3.6) 的证明, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \eta^p u^{-p}\left|Du\right|^p\left((p-1)(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})-\frac{p\delta}{2}f^{\frac{p\delta}{2}-1}\right)w(x)dx\\ &\qquad\leqslant\int_\Omega (p\left|D\eta\right|+\left|b\right|\eta)\eta^{p-1}\left|Du\right|^{p-1}u^{-(p-1)}(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})v(x)dx.\end{aligned}$$

由 Young 不等式可知 $\frac{p\delta}{2}f^{\frac{p\delta}{2}-1}\leqslant\frac{1}{2}(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})$, 注意到 $Df=u^{-1}Du$, 有

$$\int_\Omega \eta^p\,|Df|^p\,(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})w(x)dx\leqslant c\int_\Omega |D\eta+\eta|^p\,(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})z(x)dx. \tag{4.5}$$

Young 不等式还蕴含

$$f^{\frac{p(\delta-1)}{2}}\leqslant f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}},\quad f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}}\leqslant 2(f^{\frac{p(\delta+1)}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}}). \tag{4.6}$$

令 $q=\frac{\delta+1}{2}$, 由不等式 (2.2), (4.5) 及 (4.6), 得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R}|\eta f^q|^{kp}\,z(x)dx\right)^{\frac{1}{kp}}\\
&\quad\leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}(|D\eta|^p\,f^{pq}+q^p\eta^p f^{p(q-1)}\,|Df|^p)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad= CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}(|D\eta|^p\,f^{pq}+q^p\eta^p f^{\frac{p(\delta-1)}{2}}\,|Df|^p)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}(|D\eta|^p\,f^{pq}+q^p\eta^p(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})\,|Df|^p)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}|D\eta|^p\,f^{pq}w(x)dx+q^p\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R}|D\eta+\eta|^p\,(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})z(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant CR\left(\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R}|D\eta|^p\,f^{pq}z(x)dx+\frac{1}{z(B_R)}q^p\int_{B_R}|D\eta+\eta|^p\,(f^{\frac{p(\delta+1)}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})z(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant CRq\left(\frac{z(B_R)}{w(B_R)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{z(B_R)}\int_{B_R}|D\eta+\eta|^p\,f^{pq}z(x)dx+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}}\sup_{B_R}|D\eta+\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

设 $0<\alpha<\tau<\rho<\sigma<\beta<1$, 取 η 使得 $\operatorname{supp}\eta\subset B_{\sigma R}$, $0\leqslant\eta\leqslant 1,\eta\equiv 1(x\in B_{\rho R})$, $|D\eta|\leqslant\frac{c}{(\sigma-\rho)R}$, 对 (4.7) 的两边取 q 次方根, 由权函数 $w(x),z(x)$ 的二重性质, 有

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})}\int_{B_{\rho R}}f^{kpq}z(x)dx\right)^{\frac{1}{kpq}}\leqslant C\left(\frac{q}{\sigma-\rho}\right)^{\frac{1}{q}}\left(q+\left(\frac{1}{z(B_{\sigma R})}\int_{B_{\sigma R}}f^{pq}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pq}}\right).$$

令 $q=k^i,\rho=\rho_i=\alpha+2^{-i}(\beta-\alpha),\sigma=\sigma_i=\rho_i+2^{-i}(\beta-\alpha)=\rho_{i-1}$, 则

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho_i R})}\int_{B_{\rho_i R}}f^{pk^{i+1}}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pk^{i+1}}}\leqslant(C(2k)^i)^{\frac{1}{k^i}}\left(k^i+\frac{1}{z(B_{\rho_{i-1}R})}\int_{B_{\rho_{i-1}R}}f^{pk^i}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pk^i}},$$

$i=0,1,2,\ldots$ 迭代上式, 得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z(B_{\rho_i R})}\int_{B_{\rho_i R}}f^{pk^{i+1}}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pk^{i+1}}}&\leqslant\sum_{j=1}^{i}Ck^j\prod_{l=j}^{i}(C(2k)^l)^{\frac{1}{k^l}}\\
&\quad+\prod_{j=1}^{i}(C(2k)^j)^{\frac{1}{k^j}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}f^{pk}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pk}}.
\end{aligned}$$

从而, 对于任意的 $q>pk$,

$$\left(\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}f^q z(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c_2\left(q+\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}f^{pk}z(x)dx\right)^{\frac{1}{pk}}\right).$$

令 $d=(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}f^{pk}z(x)dx)^{\frac{1}{pk}}$), 利用上式, $e^{s_0 f}$(其中 s_0 待定) 的幂级数展开及 n 充分大时的 Stirling 公式: $n!\approx\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, 便有

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}\frac{s_0^n f^n}{n!}z(x)dx &\leqslant \frac{(c_2 s_0)^n}{n!}(n+d)^n \leqslant c_3\frac{(c_2 s_0 e)^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}(n+d)^n\\ &\leqslant c_3\frac{(c_2 s_0 e)^n}{\sqrt{2\pi n}}(1+\frac{d}{n})^n \leqslant c_3\frac{(c_2 s_0 e)^n}{\sqrt{2\pi n}}e^d.\end{aligned}$$

取 $s_0\in(0,\frac{1}{c_2 e})$, 则

$$\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}e^{s_0 f}z(x)dx=\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_0^n f^n}{n!}z(x)dx\leqslant c_3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_2 s_0 e)^n}{\sqrt{2\pi n}}e^d=c_4 e^d. \tag{4.8}$$

由 (4.8), (4.4) 及 f 的定义, 可知

$$\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}(\frac{u}{t})^{s_0}z(x)dx\leqslant\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}e^{s_0(\log\frac{u}{t})^+}z(x)dx\leqslant c. \tag{4.9}$$

注意到 $-u$ 为方程的弱下解, 利用注 5 可知, 不等式 (3.9) 对于 $l\in(0,\frac{p-1}{p})$ 仍成立. 取 $l_0=\frac{\gamma}{pk}, l_i=\frac{l_{i-1}}{k}$, 对不等式 (3.9) 进行有限次的反向迭代, 即将 (3.9) 右端连续迭代有限次, 可使得 $pl_i\leqslant s_0$, 从而由 (3.9), Hölder 不等式及 (4.9), 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})}\int_{B_{\alpha R}}u^{\gamma}z(x)dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} &\leqslant c\left(\frac{1}{z(B_{\tau R})}\int_{B_{\tau R}}u^{s_0}z(x)dx\right)^{\frac{1}{s_0}}\\ &\leqslant ct=\exp\left(C+\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}(\log u)z(x)dx\right).\end{aligned}$$

结论得证.

注 6 当 $1\leqslant p<2$ 时, 引理 3 证明中的不等式 $\frac{p\delta}{2}f^{\frac{p\delta}{2}-1}\leqslant\frac{1}{2}(f^{\frac{p\delta}{2}}+(p\delta)^{\frac{p\delta}{2}})$ 不能由 Young 不等式得到, 故而本文只考虑 $p\geqslant 2$ 的情形.

推论 2 在引理 3 的条件下, 有

$$\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int_{B_{\beta R}}|u|^{\gamma}z(x)dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant C(n,\alpha,\beta,\gamma,C_1)\inf_{\alpha R}u.$$

证明 将引理 2 和引理 3 结合在一起, 即得结论.

定理 1 的证明 将推论 1 和推论 2 结合, 即证.

引理 4[2] 设 $\omega(R)$ 为定义在 $[0,R_0]$ 上的非负非减函数. 若存在 $0<\theta,\eta<1, 0<\alpha\leqslant 1, K\geqslant 0$, 使得对于任意的 $0\leqslant R\leqslant R_0$, 有

$$\omega(\theta R)\leqslant\eta\omega(R)+KR^{\alpha},$$

则存在 $0<\beta\leqslant\alpha, C>0$, 使得

$$\omega(R)\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}[\omega(R_0)+KR_0^{\alpha}].$$

定理 2 的证明 设 $M(R)=\sup_{B_R}u, m(R)=\inf_{B_R}u$, $\omega(R)=M(R)-m(R)$, 其中 $0<R<d_x$. 令 $\bar{u}=u-m(R)$, 则 $\bar{u}$ 为如下方程

$$-\sum_{i=1}^{n}D_i(A^{ij}(x,\bar{u}+m(R),D\bar{u})D_j\bar{u})+bv(x)\,|D\bar{u}|^{p-2}\,D\bar{u}=0$$

的非负弱解, 且对任意的 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|D\bar{u}|^{p-2}|\xi|^2 w(x) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x, \bar{u} + m(R), D\bar{u})\xi_i\xi_j \leqslant |D\bar{u}|^{p-2}|\xi|^2 v(x).$$

由定理 1, 我们有 $M(\alpha R) - m(R) \leqslant C(m(\alpha R) - m(R))$. 从而

$$\begin{aligned}\omega(\alpha R) = M(\alpha R) - m(\alpha R) &\leqslant M(\alpha R) - \left[m(R) + \frac{1}{C}(M(\alpha R) - m(R))\right] \\ &\leqslant \left(1 - \frac{1}{C}\right)(M(R) - m(R) = \left(1 - \frac{1}{C}\right)\omega(R).\end{aligned}$$

由引理 4, 即得结果.

致谢 审稿人的意见和建议提高了文稿的质量, 作者在此深表谢意.

参考文献

1 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 188–202

2 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京: 科学出版社, 1991, 71–76

3 陈淑红, 谭忠. p-调和逼近方法和可控增长条件下能量极小 p-调和映射的最优内部正则性. 中国科学 A 辑, 2006, 36: 1302–1312

4 Fabes E, Kenig C, Serapioni R. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. Comm Partial Differential Equations, 1982, 7: 77–116

5 Gutiérrez C E. Harnack's inequality for degenerate Schrödinger operators. Trans Amer Math Soc, 1989, 312: 403–419

6 Vitanza C, Zamboni P. Necessary and sufficient conditions for Hölder continuity of solutions of degenerate Schrödinger operators. Le Matematiche, 1997, 52: 393–409

7 De Cicco V, Vivaldi M A. Harnack inequalities for Fuchsian type weighted elliptic equations. Comm Partial Differential Equations, 1996, 21: 1321–1347

8 Zamboni P. Hölder continuity for solutions of linear degenerate elliptic equations under minimal assumptions. J Partial Differential Equations, 2002, 182: 121–140

9 Chanillo S, Wheeden R L. Harnack's inequality and mean-value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations. Comm Partial Differential Equations, 1986, 11: 1111–1134

10 Pingen M. Regularity results for degenerate elliptic systems. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2008, 25: 369–380

11 Caffarelli L A. Regularity theorems for weak solutions of some nonlinear systems. Comm Pure Appl Anal, 1982, 35: 833–838

12 Trudinger N S. On the regularity of generalized solutions of linear non-uniformly elliptic equations. Arch Ration Mech Anal, 1971, 42: 51–62

13 Chanillo S, Wheeden R L. Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions. Amer J Math, 1985, 107: 1191–1226

Hölder continuity of weak solutions for degenerate quasilinear elliptic equations with different weights

CUI XueWei & NIU PengCheng

Abstract We study a class of degenerate quasilinear elliptic equations with coefficients depending on two different weights. Using weighted Sobolev inequality, weighted Poincaré inequality and Moser's iteration technique, we obtain Harnack inequalities for nonnegative weak solutions. As a consequence, we prove Hölder continuity of weak solutions.

Keywords **weak solution, weight, Harnack inequality, Hölder continuity**

MSC(2000): 35D10, 35J70