

抽取和内插的分数阶 Fourier 域分析

孟祥意 陶然* 王越

(北京理工大学电子工程系, 北京 100081)

摘要 为了节省系统中信号处理的运算量和存储量, 常需要对信号进行抽样率转换. 分数阶 Fourier 变换是分析非平稳信号的有力工具, 它已在雷达、通信、电子对抗、信息内容安全等领域得到广泛的应用. 文中从分数阶 Fourier 域的采样定理出发, 定义了分数阶 Fourier 域的数字频率, 推导了非平稳信号经抽取和内插之后分数阶 Fourier 谱的表达式, 并设计了分数阶 Fourier 域的去镜像和抗混叠滤波器, 进而总结出了非平稳信号经过有理数倍抽样率转换之后其分数阶 Fourier 谱的变化规律, 最后导出了抽取和内插在分数阶 Fourier 域内的恒等关系. 此研究成果为基于分数阶 Fourier 变换的多抽样信号处理理论体系奠定了基础. 仿真实验验证了所提理论的正确性.

关键词 抽取 内插 抽样率转换 分数阶 Fourier 变换 分数阶 Fourier 域数字频率

随着信号处理技术的飞速发展和信息处理系统性能要求的提高, 现代信息处理系统中参数检测和估计问题已由正弦波信号的检测和估计问题发展到多分量线性调频信号的检测和估计问题, 例如 SAR 成像处理、扫频干扰抑制与识别、导弹脱靶量测量等问题. 传统的基于正弦分解的 Fourier 变换由于其在时频定位和分辨率上的局限性已不能适应现代信息处理系统中 chirp 信号的检测和估计要求. 因此, 这就需要寻找新的理论工具来解决工程实践问题.

分数阶 Fourier 变换的概念早在 1929 年即被提出^[1], 在 20 世纪 80 年代应用于光学领域, 从 90 年代起成为信号处理领域的研究热点之一. 分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的广义形式, 它在统一的时频域上进行信号处理, 因此它相对于传统的 Fourier 变换灵活性更强, 适于进行非平稳信号的处理^[2,3]. 而且信号的分数阶 Fourier 变换可以理解为将信号分解到一系列同一调频率不同起始频率的 chirp 基上, 因此分数阶 Fourier 变换也是针对多分量 chirp 信号检测和参数估计的合适工具^[4,5]. 近年来, 出现了许多基于分数阶 Fourier 变换的信号处理方法, 并已经在信号分析与重构、信号检测与参数估计、变换域滤波、语音分析、图象处理、神经网络、模

收稿日期: 2006-05-16; 接受日期: 2007-01-18

国家杰出青年科学基金项目(批准号: 60625104)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 60232010)和国家自然科学基金项目(批准号: 60572094)资助

* 联系人, E-mail: rantao@bit.edu.cn

式识别、阵列信号处理和雷达、通信、声纳中得到了广泛的应用^[5-12]。但目前的研究工作主要集中在均匀、单一采样率的情况下对非平稳信号进行分析。

随着数字信号处理的迅速发展, 信息系统中信号的处理、编码、传输和存储等工作量越来越大。为了节省计算工作量及存储空间, 在一个信号处理系统中常常需要不同的抽样率及其相互之间的转换。在这种情况下, 多抽样率信号处理理论产生并发展起来, 目前该理论在传统的 Fourier 变换理论中都已经有了较深入的研究, 并且针对平稳信号取得了较好的效果, 但是对于非平稳信号, 没有好的解决方法, 因此迫切的需要将多抽样率信号处理理论推广到分数阶 Fourier 域。信号抽样率转换理论是多抽样率信号处理理论的基础, 抽取和内插是信号抽样率转换的两个基本操作, 使信号抽样率降低的转换, 称为抽取; 反之, 使信号抽样率升高的转换, 称为内插。传统的信号抽样率转换分析是在频域(Fourier 域)中完成的, 主要解决如何选择抽取的倍数以避免造成信号频谱的混叠以及信号在内插之后如何去多余的镜像等问题^[13,14]。本文所研究的抽样率转换的分数阶 Fourier 域分析问题, 是多抽样率信号处理理论在分数阶 Fourier 域中应用的基础。

首先, 简要地介绍了分数阶 Fourier 域的采样定理和离散时间分数阶 Fourier 变换(DTFRT)的基本定义, 并由此定义了分数阶 Fourier 域的数字频率, 之后推导了非平稳信号经抽取和内插之后分数阶 Fourier 谱的表达式, 并讨论了分数阶 Fourier 域的抗镜像和抗混叠滤波器的设计方法, 进而总结出了非平稳信号经有理数倍抽样率转换之后其分数阶 Fourier 谱的变化规律。最后, 使用分数阶 Fourier 域的数字频率导出了抽取和内插在分数阶 Fourier 域内的恒等关系。仿真实验验证了所提理论的正确性。本文的成果不仅能丰富分数阶 Fourier 变换的理论体系, 而且也能为基于分数阶 Fourier 变换的多抽样信号处理理论的研究奠定基础。

1 离散时间分数阶 Fourier 变换

1.1 分数阶 Fourier 变换

分数阶 Fourier 变换(FRFT)是近年来出现的一种新的时频工具, 它是 Fourier 变换的一种广义形式。信号的 FRFT 是信号在时频平面内坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后的表示方法, 而当这个旋转角度为 $\pi/2$ 时, 这个表示则为传统的 Fourier 变换。

信号 $x(t)$ 的 FRFT 定义为^[3,4]

$$X_p(u) = \{F_p[x(t)]\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)K_p(u, t)dt, \quad (1a)$$

其中, $p = 2\alpha/\pi$ 为分数阶 Fourier 变换的阶次, α 为分数阶 Fourier 域与时域的夹角, $F_p[\]$ 为分数阶 Fourier 变换算子, $K_p(u, t)$ 为 FRFT 的变换核, 其定义为

$$K_p(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \exp\left(j\frac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha - jut\csc\alpha\right), & \alpha \neq n\pi; \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi; \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n+1)\pi. \end{cases} \quad (1b)$$

FRFT 的逆变换为

$$x(t) = \{F_{-p}[X_p(u)]\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(u)K_{-p}(t, u)du. \quad (2)$$

1.2 分数阶 Fourier 变换域采样定理

对于模拟信号 $x(t)$, 它被一脉冲串以采样周期 Δt 均匀采样后, 其采样信号为

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot \Delta t). \quad (3)$$

根据文献 [15] 可以知道, $x_s(t)$ 的 p 阶分数阶 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} F_p[x_s(t)] &= \frac{1}{\Delta t} e^{\frac{j}{2}u^2 \cot \alpha} \left[X_p(u) e^{-\frac{j}{2}u^2 \cot \alpha} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - n \frac{2\pi \sin \alpha}{\Delta t}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} e^{\frac{j}{2}u^2 \cot \alpha} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p\left(u - n \frac{2\pi \sin \alpha}{\Delta t}\right) e^{-\frac{j}{2}\left(u - n \frac{2\pi \sin \alpha}{\Delta t}\right)^2 \cot \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $X_p(u)$ 为 $x(t)$ 的 p 阶分数阶 Fourier 谱 [15].

在 p 阶分数阶 Fourier 域中, chirp 周期(chirp period)被定义为 [16]

$$X_p(u - \Delta u^p) e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha (u - \Delta u^p)^2} = X_p(u) e^{-\frac{j}{2} \cot \alpha u^2}, \quad (5)$$

其中

$$\Delta u^p = \frac{2\pi |\sin \alpha|}{\Delta t} \quad (6)$$

为 chirp 周期长度. 由(5)式可以进一步有

$$X_p(u) = X_p(u - \Delta u^p) e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot \Delta u^p \cdot (2u - \Delta u^p)}.$$

由上式可以看出, 信号以 chirp 周期移位后, 幅值不变, 幅角呈线性变化.

因此, 综合公式(4)和(5)可以发现, 模拟信号 $x(t)$ 被一脉冲串以采样周期 Δt 均匀采样后, 其 p 阶分数阶 Fourier 谱是将 $x(t)$ 的分数阶 Fourier 谱以 chirp 周期 Δu^p 延拓而得. 当 $\alpha = \pi/2$, 即 $p = 1$ 时, (4)式即转变采样定理为传统的 Fourier 域中的表现形式

$$F_1[x_s(t)] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_1\left(u - n \frac{2\pi}{\Delta t}\right).$$

(4)式给出了原始信号分数阶 Fourier 谱与采样信号分数阶 Fourier 谱之间的关系, 根据(4)式, 图 1 以 FRFT 域上的低通信号为例给出了信号时域采样过程对 FRFT 域的影响. 可以看到信号在时域采样相当于信号分数阶 Fourier 谱以 chirp 周期延拓而得, 即信号分数阶 Fourier 谱的幅值进行周期复制, 角度进行线性变化.

1.3 离散时间分数阶 Fourier 变换

由于在实际应用中处理的大多是由模拟信号采样而得的离散信号, 因此需要使用离散时间分数阶 Fourier 变换, 其定义为 [16]

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(u) &= \tilde{F}_p[x(n)] \\ &= \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot u^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j u \cdot n \cdot \Delta t \cdot \csc \alpha + \frac{1}{2} j \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

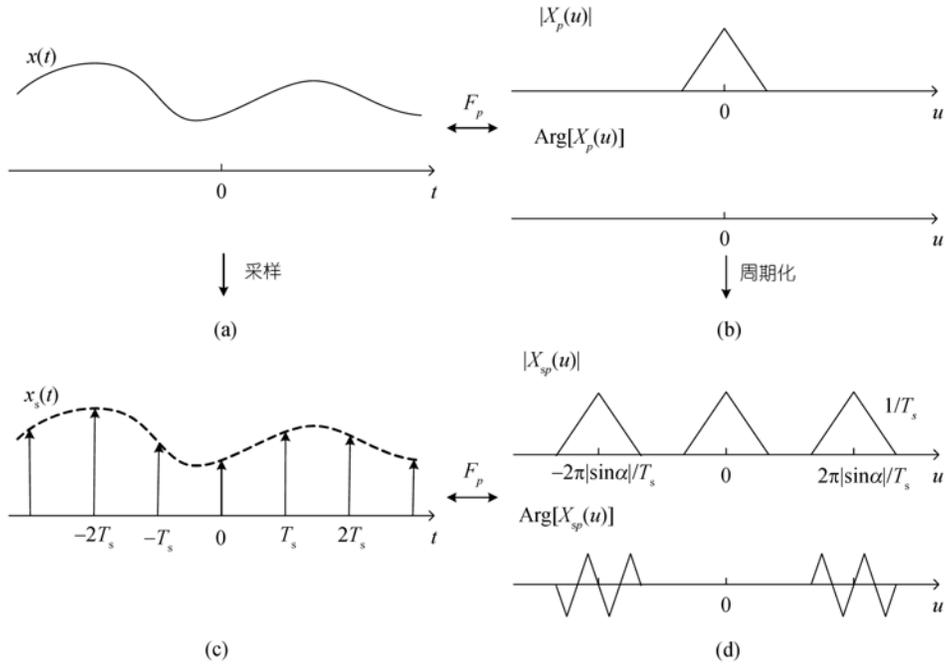


图 1 时域采样对 FRFT 域的影响

(a) 连续时间信号 $x(t)$; (b) $x(t)$ 的分数阶 Fourier 变换 $X_p(u)$; (c) $x(t)$ 均匀采样得到的信号 $x_s(t)$; (d) $x_s(t)$ 的分数阶 Fourier 变换 $X_{sp}(u)$

其中, $p = 2\alpha/\pi$ 表示离散时间分数阶 Fourier 变换的阶次, Δt 为连续信号的采样间隔. 因为信号 $x(n)$ 的 p 阶 DTFRT $\tilde{X}_p(u)$ 是将原连续信号 $x(t)$ 的 p 阶分数阶 Fourier 谱 $X_p(u)$ 以 chirp 周期 $2\pi \sin \alpha / \Delta t$ 延拓而得, 所以相应的 p 阶离散时间分数阶 Fourier 反变换为

$$x(n) = \Delta t \cdot \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{\langle u^p \rangle} \tilde{X}_p(u) e^{-j \frac{n^2 \Delta t^2 + u^2}{2} \cot \alpha + j u \cdot n \cdot \Delta t \cdot \csc \alpha} du. \quad (8)$$

其中, $\langle u^p \rangle$ 表示宽度为 $2\pi \sin \alpha / \Delta t$ 的积分区间, 在本文中, $\langle u^p \rangle$ 定义为 $[-\pi \sin \alpha / \Delta t, \pi \sin \alpha / \Delta t]$.

由于分数阶 Fourier 域的旋转角度都是以 2π 为周期, 并且当 $-2 < p < 0$ 时, 根据分数阶 Fourier 变换的阶数可加性, 有

$$F_p[x(n)] = F_{-2} F_{p+2}[x(n)] = F_q[x(-u)], \text{ 其中 } q = p + 2.$$

所以, 在本文中取 $\alpha \in (0, \pi)$, 即 $p \in (0, 2)$.

1.4 分数阶 Fourier 域的数字频率

为了对问题做进一步分析, 在这里引入变量 ω , 其表达式为

$$\omega = u \cdot \Delta t, \quad (9)$$

即

$$u = \frac{\omega}{\Delta t}, \quad (10)$$

其中, Δt 为信号在时域的采样周期. 将(10)式代入到(4)式中有

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(\omega) &= F_p[x_s(t)] \\ &= \frac{1}{\Delta t} e^{\frac{j}{2} \left(\frac{\omega}{\Delta t}\right)^2 \cot \alpha} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p \left(\frac{\omega}{\Delta t} - n \frac{2\pi \sin \alpha}{\Delta t} \right) e^{-\frac{j}{2} \left(\frac{\omega}{\Delta t} - n \frac{2\pi \sin \alpha}{\Delta t}\right)^2 \cot \alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} e^{\frac{j}{2} \frac{\omega^2}{\Delta t^2} \cot \alpha} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p \left(\frac{\omega - 2\pi \cdot n \cdot \sin \alpha}{\Delta t} \right) e^{-\frac{j}{2} \frac{(\omega - 2\pi \cdot n \cdot \sin \alpha)^2}{\Delta t^2} \cot \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $p=1$ 时, (11)式则转换为

$$\tilde{X}_1(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_1 \left(\frac{\omega - 2\pi \cdot n}{\Delta t} \right). \quad (12)$$

可以发现, (12)式为连续信号 $x(t)$ 在 Fourier 域中的模拟频率谱与其采样序列在 Fourier 域中的数字频率谱的关系. 另外, 结合(5)和(12)式可以发现, $\tilde{X}_p(\omega)$ 是将 $X_p(\omega)$ 以归一化的 chirp 周期 $2\pi \sin \alpha$ 延拓而得.

由此, 仿照 Fourier 域中数字频率的定义形式 [17], 可以将 ω 定义为分数阶 Fourier 域中的数字频率, 并将 $2\pi \sin \alpha$ 定义为分数阶 Fourier 域数字频率周期, 仿照(5)式 chirp 周期的定义, 分数阶 Fourier 域数字频率周期 $\Delta \omega_p$ 有如下性质:

$$\tilde{H}_p(\omega) e^{-\frac{1}{2} j \cot \alpha \frac{\omega^2}{\Delta t^2}} = \tilde{H}_p(\omega - \Delta \omega_p) e^{-\frac{1}{2} j \cot \alpha \frac{(\omega - \Delta \omega_p)^2}{\Delta t^2}},$$

即

$$\tilde{H}_p(\omega) = \tilde{H}_p(\omega - \Delta \omega_p) e^{j \frac{1}{2} \cot \alpha \frac{\Delta \omega_p (2\omega - \Delta \omega_p)}{\Delta t^2}},$$

也就是说

$$\tilde{H}_p(\omega) = \tilde{H}_p(\omega - 2\pi \sin \alpha) e^{j 2\pi \cos \alpha \frac{\omega - \pi \sin \alpha}{\Delta t^2}}. \quad (13)$$

那么(8)式所示的采样序列 $x(n)$ 的分数阶 Fourier 谱在分数阶 Fourier 域数字频率轴上表示为

$$\tilde{X}_p(\omega) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2} j \cot \alpha \frac{\omega^2}{\Delta t^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot \csc \alpha + \frac{1}{2} j \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2}. \quad (14a)$$

那么, 其相应的 p 阶离散时间分数阶 Fourier 反变换可以定义为

$$x(n) = \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{-\pi \sin \alpha}^{\pi \sin \alpha} \tilde{X}_p(\omega) e^{-j \frac{n^2 \Delta t^2 + (\omega / \Delta t)^2}{2} \cot \alpha + j \cdot n \cdot \omega \cdot \csc \alpha} d\omega. \quad (14b)$$

可以发现, 当 $\alpha = \pi/2$, 即 $p=1$ 时, (14a)和(14b)式即变为传统 Fourier 域中的数字频率谱表现形式:

$$\tilde{X}_1(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jn\omega},$$

$$x(n) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_1(\omega) e^{jn\omega} d\omega.$$

分数阶 Fourier 域数字频率的提出, 为后续的抽样率转换的分数阶 Fourier 域分析、抽取和内插的恒等关系以及分数阶 Fourier 域滤波器组研究提供了有力的工具.

2 L 倍抽样率转换

由(8)式可以发现, 对一个时域抽样间隔为 Δt 序列 $x(n)$ 的 DTFRT 可以分解成三步进行:

- 1) 乘以调频率为 $\cot \alpha$, 以 Δt 为采样间隔的 chirp 信号序列, 即 $g(n) = x(n) e^{\frac{1}{2}j \cot \alpha \cdot n^2 \cdot \Delta t^2}$;
- 2) 对 $g(n)$ 做离散时间 Fourier 变换, 即 $\Psi(u) = G(u \cdot \csc \alpha)$;
- 3) 对 $\Psi(u)$ 进行相位调制, 即 $\tilde{X}_p(u) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j \cot \alpha \cdot u^2} \cdot \Psi(u)$.

可以发现, 一个离散序列的 DTFRT 不仅与序列本身有关, 还与其时域抽样间隔有关. 也就是说, 对信号 $x(n)$ 进行抽样率转换的分数阶 Fourier 域分析时, 不仅要考虑到 $x(n)$ 序列在数值上的变化, 同时还要考虑信号 $x(n)$ 经抽取和内插之后其时域抽样率的变化. 下面, 就从抽样率变换的两个基本操作——抽取和内插的分数阶 Fourier 域分析入手, 研究抽样率转换的分数阶 Fourier 域分析.

本文所要分析的信号 $x(n)$ 均由在分数阶 Fourier 域带宽有限的非平稳信号 $x(t)$ 采样得到, 其 p 阶分数阶 Fourier 谱的截止频率为 u_c^p , 时域采样周期为 Δt_x .

2.1 内插

对于抽样周期为 Δt_x 的信号 $x(n)$, 如果希望它的抽样率增加 L 倍, 最简单的方法就是在 $x(n)$ 每两个点之间补 $L-1$ 个 0, 也就是进行 L 倍的内插. 信号 $x(n)$ 进行 L 倍内插之后的数学表达式为

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & n = Lk, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (15)$$

$y(n)$ 的抽样周期为

$$\Delta t_y = \Delta t_x / L. \quad (16)$$

相应地, $y(n)$ 在 p 阶分数阶 Fourier 域的重复周期 Δu_y^p 变为

$$\Delta u_y^p = L \cdot \Delta u_x^p. \quad (17)$$

由此, 可以根据(14a)式求出 $y(n)$ 的 p 阶 DTFRT 为

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_p(\omega) &= \tilde{F}_p[y(n)] \\ &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta T_y}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j\omega\cdot n\cdot\csc\alpha+\frac{1}{2}j\cot\alpha\cdot n^2\cdot\Delta T_y^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

根据(15)和(16)式, 可以将(18)式进一步化为

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_p(\omega) &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta T_y}\right)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(L\cdot k)e^{-j\omega\cdot(L\cdot k)\cdot\csc\alpha+\frac{1}{2}j\cot\alpha\cdot(L\cdot k)^2\cdot\Delta T_y^2} \\ &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{L\omega}{\Delta T_x}\right)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j(L\omega)\cdot k\cdot\csc\alpha+\frac{1}{2}j\cot\alpha\cdot k^2\cdot\Delta T_x^2} \\ &= \tilde{X}_p(L\omega).\end{aligned}\quad (19)$$

从(17)和(19)式可以看出, 信号 $x(n)$ 经过 L 倍的内插之后, $\tilde{X}_p(\omega)$ 的带宽压缩了 L 倍, 并且增加了 $L-1$ 个镜像, 因此在 $-\pi\sin\alpha \sim \pi\sin\alpha$ 内, $\tilde{Y}_p(\omega)$ 包含了 L 个 $\tilde{X}_p(\omega)$ 的压缩样本. 但是 $y(n)$ 的分数阶 Fourier 谱相对于 $x(n)$ 的分数阶 Fourier 谱并没有发生改变, 只是它的 chirp 周期变为了原来的 L 倍, 这一点与频域的内插是很相像的.

2.2 L 倍抽样率转换

由 2.1 中的分析可以知道, 为实现信号 L 倍抽样率的转换, 必须在信号内插之后经过一相应分数阶 Fourier 域的低通滤波器以滤除掉多余的镜像, 该低通滤波器在分数阶 Fourier 域的传递函数为

$$\tilde{H}_p(\omega) = \begin{cases} c \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta T^2}}, & |\omega| \leq \frac{\pi\sin\alpha}{L}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}\quad (20)$$

其中, ω 为分数阶 Fourier 域的数字频率. 由此, 可以得出信号进行 L 倍抽样率转换的系统框图(见图 2).

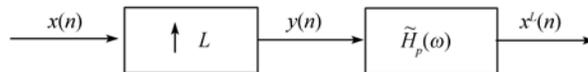


图 2 L 倍抽样率转换系统图

在图 2 所示系统中, $y(n)$ 与去镜像滤波器做分数阶卷积运算, 根据分数阶卷积理论^[18], 系统输出 $x^L(n)$ 可以在分数阶 Fourier 域表示为

$$\tilde{X}_p^L(\omega) = e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta T_y}\right)^2} \tilde{Y}_p(\omega)\tilde{H}_p(\omega).\quad (21)$$

由(14b)式可以得出输出信号的时域表示为

$$x^L(n) = \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{\langle -\pi \sin \alpha, \pi \sin \alpha \rangle} \tilde{X}_p^L(\omega) e^{-j \frac{n^2 \Delta t_y^2 + \left(\frac{\omega}{\Delta t_y}\right)^2}{2} \cot \alpha + j \omega \cdot n \cdot \csc \alpha} d\omega. \quad (22)$$

将(16)、(19)~(21)式代入(22)式中有

$$x^L(n) = c \cdot \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{\langle -\frac{\pi \sin \alpha}{L}, \frac{\pi \sin \alpha}{L} \rangle} \tilde{X}_p(L\omega) e^{-j \frac{\left(\frac{\Delta t_x}{L}\right)^2 n^2 + \left(\frac{L\omega}{\Delta t_x}\right)^2}{2} \cot \alpha + j \omega \cdot n \cdot \csc \alpha} d\omega. \quad (23)$$

为确定滤波器 $H_p(u)$ 的幅值 c , 取(23)式中 n 为 0 有

$$\begin{aligned} x^L(0) &= c \cdot \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} \cdot \int_{\langle -\frac{\pi \sin \alpha}{L}, \frac{\pi \sin \alpha}{L} \rangle} \tilde{X}_p(L\omega) e^{-j \frac{1}{2} \left(\frac{L\omega}{\Delta t_x}\right)^2 \cot \alpha} dL\omega \\ &= \frac{c}{L} \cdot x(0). \end{aligned} \quad (24)$$

为了保证内插后原信号点的幅值不变, 即 $x^L(0) = x(0)$, 取 $c = L$. 因此, 可以将(20)式重新写为

$$\tilde{H}_p(\omega) = \begin{cases} L \cdot e^{j \frac{1}{2} \cot \alpha \frac{\omega^2}{\Delta t^2}}, & |\omega| \leq \frac{\pi \sin \alpha}{L}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (25)$$

L 倍抽样率转换的仿真实现过程见第 6 节仿真分析部分.

3 1/M 倍抽样率转换

3.1 抽取

对于抽样周期为 Δt_x 的信号 $x(n)$, 如果希望它的抽样率减小为原来的 M 倍, 那么最简单的方法就是将 $x(n)$ 中每 M 个点抽取一个, 依次组成一个新序列 $y(n)$. 因此, 抽取在时域的数学表达式为

$$y(n) = x(M \cdot n). \quad (26)$$

$y(n)$ 的抽样周期为

$$\Delta t_y = M \cdot \Delta t_x. \quad (27)$$

相应地, $y(n)$ 在分数阶 Fourier 域的重复周期 Δu_y^p 变为

$$\Delta u_y^p = \frac{\Delta u_x^p}{M}. \quad (28)$$

进而结合(26)式, 可以根据(14a)式求出 $y(n)$ 的 DTFRT 为

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_p(\omega) &= \tilde{F}_p[y(n)] \\
&= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t_y}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j\omega n \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_y^2} \\
&= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t_y}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(M \cdot n)e^{-j\omega n \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_y^2}.
\end{aligned} \tag{29}$$

在这里, 为了分析方便, 引入辅助函数

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k \cdot M). \tag{30}$$

$r(n)$ 为一脉冲序列, 它在 M 的整数倍处的值为 1, 其余为 0, 其在时域的采样间隔为 Δt , 那么

$$x(M \cdot n) = x(n) \cdot r(n). \tag{31}$$

将(27)和(31)式代入(29)式可以得出

$$\tilde{Y}_p(\omega) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{M\Delta t_x}\right)^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r(n) \cdot e^{-j\left(\frac{\omega}{M}\right)n \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_x^2}. \tag{32}$$

根据 Poisson summation formula, 可以将(30)式进一步写为

$$r(n) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}n \cdot k}. \tag{33}$$

将(33)式代入(32)式中, 交换式中的求和顺序, 根据(14a)式 DTFRFT 的定义进而有

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_p(\omega) &= \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{M\Delta t_x}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}n \cdot k}\right) \cdot e^{-j\left(\frac{\omega}{M}\right)n \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_x^2} \\
&= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\left(\frac{\omega}{M\Delta t_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j\left(\frac{\omega-2k \cdot \pi \sin\alpha}{M}\right)n \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_x^2} \\
&= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot \left[\left(\frac{\omega}{M\Delta t_x}\right)^2 - \left(\frac{\omega-2k \cdot \pi \sin\alpha}{M\Delta t_x}\right)^2\right]} \\
&\quad \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot \left(\frac{\omega-2k \cdot \pi \sin\alpha}{M\Delta t_x}\right)^2} \cdot e^{-j\left(\frac{\omega-2k \cdot \pi \sin\alpha}{M}\right)n \Delta t_x \csc\alpha + \frac{1}{2}j\cot\alpha n^2 \cdot \Delta t_x^2} \\
&= \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2k\pi(\omega-k \cdot \pi \sin\alpha)}{(M\Delta t_x)^2}} \cdot \tilde{X}_p\left(\frac{\omega-k \cdot 2\pi \sin\alpha}{M}\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

可以发现, 当 $\alpha = \pi/2$, 即 $p=1$ 时, (34)式可以化为

$$\tilde{Y}_1(\omega) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{X}_1\left(\frac{\omega-2 \cdot k \cdot \pi}{M}\right). \tag{35}$$

上式即为抽取在传统的 Fourier 域中的形式.

从(28)和(34)式可以看出, 信号 $x(n)$ 经过 M 倍的抽取之后, $\tilde{X}_p(\omega)$ 的幅值变为原来的 $1/M$,

带宽扩展了 M 倍, 并做 k ($k=1,2,\dots,M-1$) 倍分数阶 Fourier 域数字频率周期 ($\Delta\omega^p = 2\pi \cdot \sin \alpha$) 移位后进行叠加, 因此在 $-\pi \sin \alpha \sim (2M-1)\pi \sin \alpha$ 内, $\tilde{Y}_p(\omega)$ 包含了 M 个 $\tilde{X}_p(\omega)$ 的扩展样本, 即信号分数阶 Fourier 谱的 chirp 周期变为了原来的 $1/M$, 并在分数阶 Fourier 域 u 轴上做 k ($k=1,2,\dots,M-1$) 倍 chirp 周期 ($\Delta u^p = \Delta u_x^p / M$) 移位后进行叠加.

3.2 $1/M$ 倍抽样率转换

由 2.1 中的分析可以发现, 进行信号 $1/M$ 倍抽样率转换时, M 值的大小并不是可以随意改变的. 设 u_c^p 为信号在 p 阶分数阶 Fourier 域的截止频率, ω_c^p 为信号在 p 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率, 由(28)式可以发现, 当

$$\Delta u_y^p = \frac{\Delta u_x^p}{M} \leq 2u_c^p, \text{ 即 } M \geq \frac{\Delta u_x^p}{2u_c^p} \quad (36)$$

时, 也就是说, 在分数阶 Fourier 域数字频率轴上

$$M \geq \frac{2\pi \sin \alpha}{2\omega_c^p} = \frac{\pi \sin \alpha}{\omega_c^p}, \quad (37)$$

对 $x(n)$ 的 M 倍抽取将带来频谱的混叠. 因此, 为了抵抗混叠带来的影响, 在抽取之前, 必须对 $x(n)$ 进行相应分数阶 Fourier 域的低通滤波, 其在分数阶 Fourier 域的传递函数为

$$\tilde{H}_p(\omega) = \begin{cases} e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta^2}}, & |\omega| \leq \frac{\pi \sin \alpha}{M}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (38)$$

由此, 可以得出信号进行 $1/M$ 倍抽样率转换的系统框图见图 3, 其中, $x(n)$ 与抗混叠滤波器做分数阶卷积运算. $1/M$ 倍抽样率转换的仿真实现过程见第 6 节仿真分析部分.

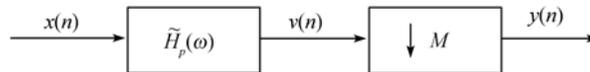


图 3 $1/M$ 倍抽样率转换系统图

4 L/M 倍抽样率转换

在实际应用中, 常需要对信号 $x(n)$ 进行 L/M 倍抽样率的转换, 前面所讨论的 L 倍抽样率转换以及 $1/M$ 倍抽样率转换只是 L/M 倍抽样率转换在 $M=1$ 和 $L=1$ 时的特例. L/M 倍抽样率转换可以由 L 倍抽样率转换以及 $1/M$ 倍抽样率转换两步完成. 但是, 由于抽取使 $x(n)$ 的数据量减少, 造成信息的丢失, 因此对 $x(n)$ 进行 L/M 倍抽样率转换时, 应先进行 L 倍抽样率转换, 再进行 $1/M$ 倍抽样率转换, 由此可以得出 $x(n)$ 的 L/M 倍抽样率转换的系统框见图 4, 其中, $u(n)$ 与滤波器 $\tilde{H}_p(\omega)$ 做分数阶卷积运算. 结合(25)和(38)式可以知道, 图 4 中滤波器在分数阶 Fourier 域的传递函数 $\tilde{H}_p(\omega)$ 为

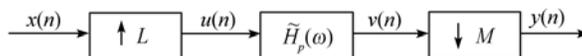


图 4 L/M 倍抽样率转换系统图

$$\tilde{H}_p(\omega) = \begin{cases} L \cdot e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta t^2}}, & |\omega| \leq \min\left\{\frac{\pi\sin\alpha}{L}, \frac{\pi\sin\alpha}{M}\right\}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (39)$$

假设 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的抽样周期为 Δt_u , 那么 $y(n)$ 的抽样周期为

$$\Delta t_y = M \Delta t_u = \frac{M}{L} \Delta t_x. \quad (40)$$

相应地, $y(n)$ 在分数阶 Fourier 域的重复周期 Δu_y^p 变为

$$\Delta u_y^p = L \cdot \frac{\Delta u_x^p}{M}. \quad (41)$$

由(26)式, $y(n)$ 可以表示为

$$y(n) = v(M \cdot n). \quad (42)$$

根据分数阶卷积定理, $v(n)$ 可以由 $u(n)$ 和 $h(n)$ 表示为

$$v(n) = A_\alpha e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot n^2 \Delta t_u^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot k^2 \Delta t_u^2} h(n-k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (n-k)^2 \Delta t_u^2}. \quad (43)$$

其中, $A_\alpha = \sqrt{(1-j\cot\alpha)/2\pi}$. 由(15)式, $u(n)$ 可以表示为

$$u(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & n = Lk, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (44)$$

联合(42)~(44)式可以得出

$$\begin{aligned} y(n) &= A_\alpha e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn)^2 \Delta t_u^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot k^2 \Delta t_u^2} h(Mn-k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn-k)^2 \Delta t_u^2} \\ &= A_\alpha e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn)^2 \Delta t_u^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{L}\right) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot k^2 \Delta t_u^2} h(Mn-k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn-k)^2 \Delta t_u^2} \\ &= A_\alpha e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn)^2 \Delta t_u^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Lk)^2 \Delta t_u^2} h(Mn-Lk) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn-Lk)^2 \Delta t_u^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

由于低通滤波器 $h(n)$ 是一个因果系统, 因此 $Mn-Lk \geq 0$, 也就是说 $k \leq (M/L)n$. 记 $k = \lfloor Mn/L \rfloor - m$, $\lfloor p \rfloor$ 表示小于或等于 p 的最大整数. (45)式可以进一步写为

$$\begin{aligned} y(n) &= A_\alpha e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn)^2 \Delta t_u^2} \\ &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - m\right) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (Mn - \langle Mn \rangle_L - mL)^2 \Delta t_u^2} h(mL + \langle Mn \rangle_L) e^{\frac{1}{2}j\cot\alpha \cdot (mL + \langle Mn \rangle_L)^2 \Delta t_u^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

$\langle p \rangle_L$ 表示 p 对模 L 求余. (46)式给出了信号 L/M 倍抽样率的转换分数阶 Fourier 域分析的时域表达式, 下面根据前面的结论可以求出信号 L/M 倍抽样率的转换后其分数阶 Fourier 谱变化的表达式, 由(19)式和分数阶卷积定理可以知道 $v(n)$ 的 DTFRT 为

$$\begin{aligned}\tilde{V}_p(\omega) &= \tilde{U}_p(\omega)\tilde{H}_p(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta_t^2}} = \tilde{X}_p(L\omega)\tilde{H}_p(\omega)e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{\omega^2}{(\Delta_t/L)^2}} \\ &= \begin{cases} L \cdot \tilde{X}_p(L\omega) & |\omega| \leq \min\left\{\frac{\pi \sin \alpha}{L}, \frac{\pi \sin \alpha}{M}\right\}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}\end{aligned}\quad (47)$$

由(34)和(47)式可以得出 $y(n)$ 的 DTFRT 为

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_p(\omega) &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\cos\alpha\frac{2k\pi(\omega-k\cdot\pi\sin a)}{(M\Delta_t)^2}} \tilde{V}_p\left(\frac{\omega-k\cdot 2\pi\sin a}{M}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{L}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\cos\alpha\frac{2k\pi L^2(\omega-k\cdot\pi\sin a)}{(M\Delta_t)^2}} \tilde{X}_p\left[\frac{L(\omega-k\cdot 2\pi\sin a)}{M}\right], & |\omega| \leq \min\left\{\frac{M\pi\sin\alpha}{L}, \pi\sin\alpha\right\}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}\end{aligned}\quad (48)$$

由(41)和(48)式可以总结出信号经有理数倍抽样率转换之后其分数阶 Fourier 谱的变化规律: 设 $x(n)$ 为 $x(t)$ 采样而得的序列, 它在 p 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率为 ω_c^p , $x(n)$ 经过 L/M 倍抽样率转换之后, 其分数阶 Fourier 谱的变换规律为:

1) $\tilde{X}_p(\omega)$ 的幅值变为原先的 L/M 倍;

2) 当 $(M/L)\omega_c^p < \pi\sin(p\pi/2)$ 时, 在分数阶 Fourier 域数字频率轴上, $\tilde{X}_p(\omega)$ 展宽为原来的 M/L 倍, 当 $(M/L)\omega_c^p \geq \pi\sin(p\pi/2)$ 时, $\tilde{X}_p(\omega)$ 的截止频率变为 $\pi\sin(p\pi/2)$;

3) 经过 1)和 2)变化后的信号分数阶 Fourier 谱再在相应的分数阶 Fourier 域数字频率轴上做 k ($k=1, 2, \dots, M-1$) 倍分数阶 Fourier 域数字频率周期 ($\Delta\omega_p = 2\pi\sin(p\pi/2)$) 移位后进行叠加.

L/M 倍抽样率转换的仿真实现过程见第 6 节仿真分析部分.

5 抽样率转换的恒等关系

在实际工程中, 为使抽样率转换中所消耗的代价最小, 需要把乘法运算安排在低抽样率的一端, 减少后续操作, 提高计算的效率, 这就需要寻找抽样率转换的恒等关系. 下面所示系统中的卷积运算皆为分数阶卷积运算.

5.1 内插的恒等关系

在图 5(a)中, 根据分数阶卷积定理有

$$\tilde{Y}_p(\omega) = e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta_t^2}} \tilde{U}_p(\omega)\tilde{H}_p(L\cdot\omega).\quad (49)$$

根据(19)式信号内插的分数阶 Fourier 域分析, (49)式可以写为

$$\tilde{Y}_p(\omega) = e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\left(\frac{L\omega}{\Delta_t}\right)^2} \tilde{X}_p(L\cdot\omega)\tilde{H}_p(L\cdot\omega).\quad (50)$$

在图 5(b)中, 根据分数阶卷积定理有

$$\tilde{V}_p(\omega) = e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha\left(\frac{\omega}{\Delta t_x}\right)^2} \tilde{X}_p(\omega)\tilde{H}_p(\omega). \tag{51}$$

根据(19)式信号内插的分数阶 Fourier 域分析可以有

$$\tilde{Y}'_p(\omega) = e^{-j\frac{1}{2}\cot\alpha\left(\frac{L\omega}{\Delta t_x}\right)^2} \tilde{X}_p(L\cdot\omega)\tilde{H}_p(L\cdot\omega). \tag{52}$$

比较(50)和(52)式可以知道 $\tilde{Y}'_p(\omega) = \tilde{Y}_p(\omega)$, 那么可以得出如图 6 所示的 L 倍内插在分数阶 Fourier 域的恒等关系.

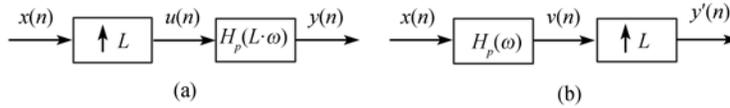


图 5 L 倍内插



图 6 L 倍内插的恒等关系

5.2 抽取的恒等关系

在图 7(a)中, 根据分数阶卷积定理有

$$\tilde{U}_p(\omega) = \tilde{X}_p(\omega) \cdot \tilde{H}_p(M\omega) e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha\frac{\omega^2}{\Delta t_x^2}}. \tag{53}$$

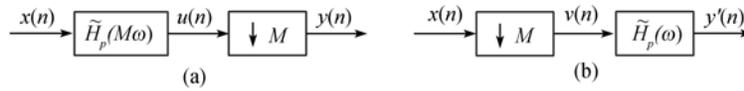


图 7 M 倍抽取

根据(34)式信号抽取的分数阶 Fourier 域分析可以得出

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_p(\omega) &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\cos\alpha\frac{2k\pi}{\Delta t_y^2}(\omega-k\pi\sin\alpha)} \cdot \tilde{U}_p\left(\frac{\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left(e^{j\cos\alpha\frac{2k\pi}{M^2\Delta t_x^2}(\omega-k\pi\sin\alpha)} \cdot \tilde{X}_p\left(\frac{\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right) \cdot \tilde{H}_p(\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha) \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha\frac{(\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha)^2}{M^2\Delta t_x^2}} \right). \end{aligned} \tag{54}$$

根据(13)式所示的分数阶 Fourier 域数字频率的周期性, (54)式可以进一步化为

$$\tilde{Y}_p(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{X}_p\left(\frac{\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right) \cdot \tilde{H}_p(\omega) \cdot e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha\frac{(\omega-k\cdot 2\pi\sin\alpha)^2}{M^2\Delta t_x^2}}. \tag{55}$$

在图 7(b)中, 根据(34)式信号抽取的分数阶 Fourier 域分析可以得出

$$\tilde{V}_p(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\cos\alpha \frac{2k\pi}{(M\Delta t_x)^2}(\omega - k\pi\sin\alpha)} \cdot \tilde{X}_p\left(\frac{\omega - k \cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right). \quad (56)$$

根据分数阶卷积定理进而有

$$\begin{aligned} \tilde{Y}'_p(\omega) &= \tilde{V}_p(\omega) \tilde{H}_p(\omega) e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \frac{\omega^2}{(M\Delta t_x)^2}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\cos\alpha \frac{2k\pi}{(M\Delta t_x)^2}(\omega - k\pi\sin\alpha)} \cdot \tilde{X}_p\left(\frac{\omega - k \cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right) \cdot \tilde{H}_p(\omega) \cdot e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \frac{\omega^2}{(M\Delta t_x)^2}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-\frac{1}{2}j\cot\alpha \frac{(\omega - k \cdot 2\pi\sin\alpha)^2}{(M\Delta t_x)^2}} \cdot \tilde{X}_p\left(\frac{\omega - k \cdot 2\pi\sin\alpha}{M}\right) \cdot \tilde{H}_p(\omega). \end{aligned} \quad (57)$$

比较(55)和(57)式可以知道 $\tilde{Y}'_p(\omega) = \tilde{Y}_p(\omega)$, 那么可以得出如图 8 所示的 M 倍抽取在分数阶 Fourier 域的恒等关系.



图 8 M 倍抽取的恒等关系

6 仿真分析

下面通过仿真实例来对提出的理论进行验证. 在仿真中, 采用了 Soo-Chang Pei 在 2000 年提出的离散分数阶 Fourier 变换算法^[19]. 在以下的仿真中, 原始信号 $x(n)$ 的抽样频率为 40 Hz, 采样时间为 $[-20 \text{ s}, 20 \text{ s}]$.

首先, 给出 L 倍抽样率转换的仿真实例. $x(n)$ 在 $p = 2/3$ 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率为 0.87. 经 3 倍抽样率转换和 2 倍抽样率转换之后, 其抽样率变为 120 Hz 和 80 Hz. 图 9 和 10 分别为对信号进行 3 倍抽样率转换和 2 倍抽样率转换之后在 $p = 2/3$ 阶分数阶 Fourier 域分析的仿真结果. 其中, $\tilde{X}_p(\omega)$, $\tilde{Y}_p(\omega)$, $\tilde{X}_p^L(\omega)$ 分别为图 2 所示系统中 $x(n)$, $y(n)$ 和 $x^L(n)$ 的离散分数阶 Fourier 变换.

从图 9 和 10 可以看出, $x(n)$ 经过 3 倍和 2 倍抽样率转换之后, 其分数阶 Fourier 谱在分数阶 Fourier 域数字频率轴上分别压缩了 3 倍和 2 倍, 也就是说, 其在相应的分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率分别变为 0.29 和 0.435, 并且分别增加了 2 个和 1 个镜像, 同时其分数阶 Fourier 谱的幅值分别变为原来的 3 倍和 2 倍.

然后, 给出 $1/M$ 倍抽样率转换的仿真实例. 在这里, 原始信号 $x(n)$ 在 $p = 1/2$ 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率为 0.74, 而 $1/2$ 阶分数阶 Fourier 域数字频率周期为

$$\Delta\omega_p = 2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot p\right) = 4.44. \quad (58)$$

那么, 由(28)式可以发现, $x(n)$ 经 $1/M$ ($M > 3$) 倍抽样率转换之后, 其 $p = 1/2$ 阶分数阶 Fourier 谱会产生混叠, 这时就需要对 $x(n)$ 在相应阶次分数阶 Fourier 域内进行抗混叠滤波. 图 11 为对信号进行 $1/3$ 倍抽样率转换的仿真结果, 其中, $\tilde{X}_p(\omega)$, $\tilde{Y}_p(\omega)$ 分别为图 3 所示系统中 $x(n)$,

$y(n)$ 的离散分数阶 Fourier 变换; 图 12 和 13 为对信号进行 1/4 倍抽样率转换的仿真结果, 其中, 图 12 所示为未经过抗混叠滤波的系统, 图 13 为经过抗混叠滤波的系统, $\tilde{X}_p(\omega)$, $\tilde{V}_p(\omega)$ 和 $\tilde{Y}_p(\omega)$ 分别为图 3 所示系统中 $x(n)$, $v(n)$ 和 $y(n)$ 的离散分数阶 Fourier 变换.

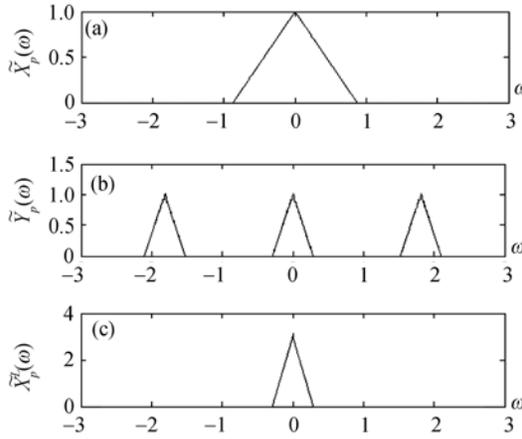


图 9 3 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析
($p=2/3$)

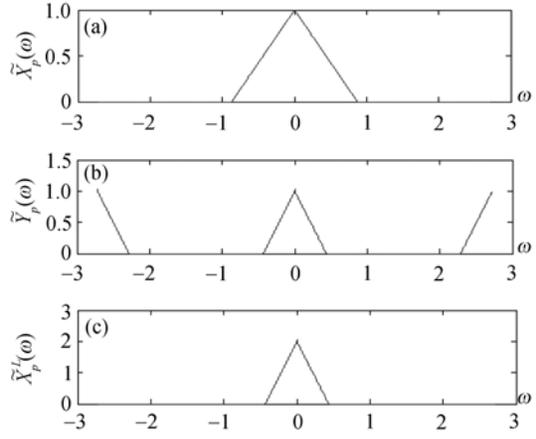


图 10 2 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析
($p=2/3$)

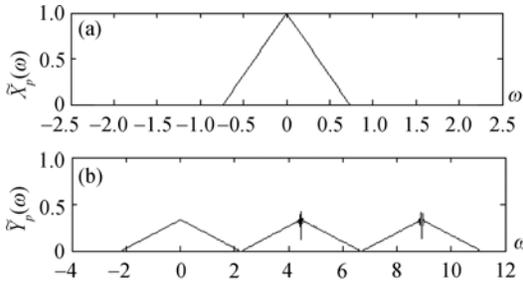


图 11 1/3 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析
($p=1/2$)

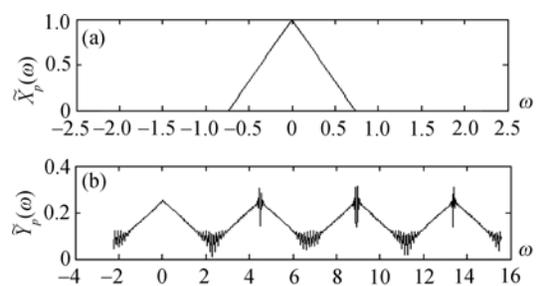


图 12 1/4 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析
($p=1/2$, 未经过抗混叠滤波)

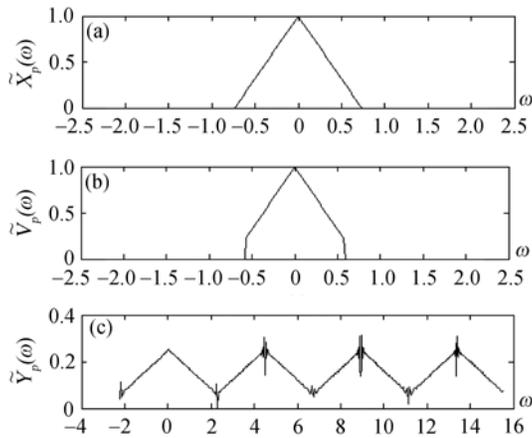


图 13 1/4 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析
($p=1/2$, 经过抗混叠滤波)

通过以上三图的仿真结果可以发现, 当 $x(n)$ 经过 1/3 倍抽样率转换之后, 其分数阶 Fourier 谱幅值变为原来的 1/3, 并且在分数阶 Fourier 域数字频率轴上展宽为原来的 3 倍, 即截止频率变为 2.22, 再做 1 倍和 2 倍的分数阶 Fourier 域数字频率周期 ($\Delta\omega_p = 4.44$) 移位后进行叠加. 当 $x(n)$ 经过 1/4 倍抽样率转换之后, 分数阶 Fourier 谱幅值变为原先的 1/4, 其截止频率变为 2.96, 大于 $\Delta\omega_p/2$, 因此会造成分数阶 Fourier 谱的混叠, 必须在抽取之前进行抗混叠滤波, 根据 (38) 式该滤波器为

$$\tilde{H}_p(\omega) = \begin{cases} e^{j\frac{1}{2}\cot\alpha\frac{\omega^2}{(0.025)^2}}, & |\omega| \leq 0.555; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此, 经过抗混叠滤波, $x(n)$ 在 1/4 倍抽样率转换之后在相应分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率变为 2.22.

最后, 给出有理分数 L/M 倍抽样率转换的仿真实例. 在这里, 原始信号 $x(n)$ 在 $p=1/2$ 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴上的截止频率为 0.74, 图 14 和 15 分别为对 $x(n)$ 进行 2/3 倍抽样率转换和 3/2 倍抽样率转换之后在 $p=1/2$ 阶分数阶 Fourier 域分析的仿真结果图. 其中, $\tilde{X}_p(\omega)$, $\tilde{U}_p(\omega)$, $\tilde{V}_p(\omega)$ 和 $\tilde{Y}_p(\omega)$ 分别为图 3 所示系统中 $x(n)$, $u(n)$, $v(n)$ 和 $y(n)$ 的离散分数阶 Fourier 变换.

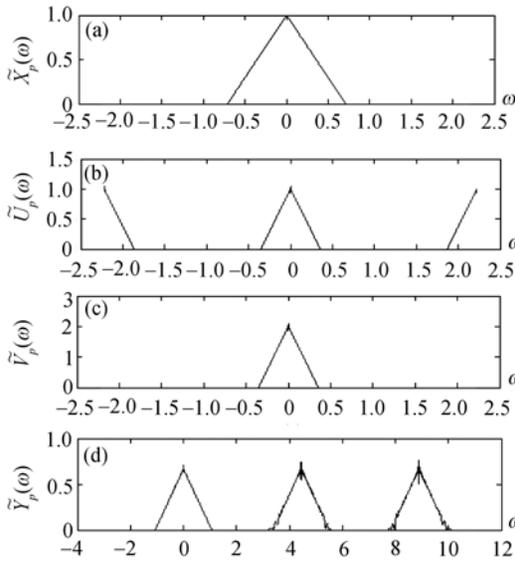


图 14 2/3 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析 ($p=1/2$)

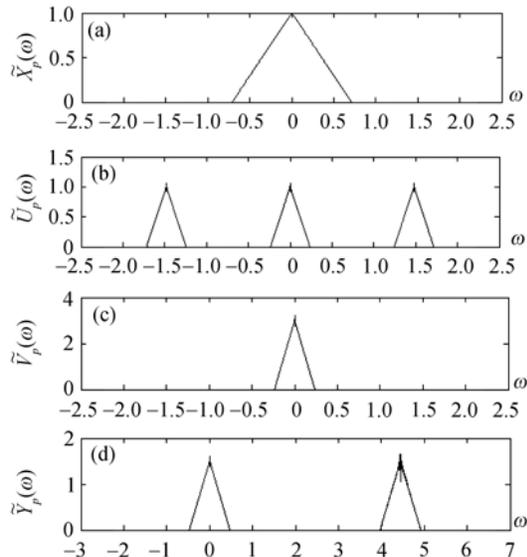


图 15 3/2 倍抽样率转换分数阶 Fourier 域分析 ($p=1/2$)

通过以上两图的仿真结果可以发现, $x(n)$ 经过 2/3 倍抽样率转换之后, 其分数阶 Fourier 谱幅值变为原来的 2/3, 并且在分数阶 Fourier 域数字频率轴上展宽为原先的 3/2 倍, 即截止频率变为 1.11, 再做 1 和 2 倍的分数阶 Fourier 域数字频率周期 ($\Delta\omega_p = 4.44$) 移位后进行叠加; 而 $x(n)$ 经过 3/2 倍抽样率转换之后, 其分数阶 Fourier 谱幅值变为原来的 3/2, 并且在分数阶

Fourier 域数字频率轴上压缩为原先的 $2/3$, 即截止频率为 0.493 , 再做 1 倍分数阶 Fourier 域数字频率周期($\Delta\omega_p = 4.44$)移位后进行叠加.

7 结论

本文从分数阶 Fourier 域的采样定理出发, 定义了分数阶 Fourier 域的数字频率, 并推导了非平稳信号在抽取和内插之后其分数阶 Fourier 谱的表达式, 设计了分数阶 Fourier 域中的去镜像和抗混叠滤波器. 通过仿真实验验证, 可以得出如下结论: 对于在 p 阶分数阶 Fourier 域中截止频率为 u_c^p 的非平稳信号 $x(t)$, 若 $x(n)$ 为 $x(t)$ 以 Δt 为间隔采样所得的序列, 那么 $x(n)$ 在 p 阶分数阶 Fourier 域数字频率轴截止频率为 $\omega_c^p = u_c^p / \Delta t$, $x(n)$ 经 L/M 倍抽样率转换之后, 其 p 阶分数阶 Fourier 谱的变换规律为

1) 信号分数阶 Fourier 谱的幅值变为原先的 L/M 倍;

2) 当 $(M/L)\omega_c^p < \pi \sin(p\pi/2)$, 即 $(M/L)u_c^p < \pi \sin(p\pi/2) / \Delta t$ 时, 其分数阶 Fourier 谱的截止频率变为原先的 M/L 倍, 也就是说, 在分数阶 Fourier 域数字频率轴上, 其分数阶 Fourier 谱展宽为原来的 M/L 倍, 当 $(M/L)\omega_c^p \geq \pi \sin(p\pi/2)$, 即 $(M/L)u_c^p \geq \pi \sin(p\pi/2) / \Delta t$ 时, 其分数阶 Fourier 谱的截止频率变为 $\pi \sin(p\pi/2) / \Delta t$, 也就是说, 在分数阶 Fourier 域数字频率轴上, 其分数阶 Fourier 谱的宽度变为 $2\pi \sin(p\pi/2)$;

3) 经过 1)、2)变化后的信号分数阶 Fourier 谱再在相应的分数阶 Fourier 域数字频率轴上做 k ($k = 1, 2, \dots, M-1$) 倍分数阶 Fourier 域数字频率周期($\Delta\omega_p = 2\pi \sin(p\pi/2)$)移位后进行叠加.

同时, 为了降低抽样率转换系统的运算量, 本文利用分数阶 Fourier 域数字频率导出了抽取和内插在分数阶 Fourier 域中的恒等关系. 本文的研究成果完善了分数阶 Fourier 变换理论体系, 为基于分数阶 Fourier 变换的多抽样信号处理理论体系奠定了基础.

参 考 文 献

- Wiener N. Hermitian polynomials and Fourier analysis. J Math Phys Math, 1929, 18: 70—73
- Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42(11): 3084—3091 [\[DOI\]](#)
- 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004. 23—49
- Tao R, Deng B, Wang Y. Research process of the fractional Fourier transform in signal processing. Sci China Ser F-Inf Sci, 2006, 49(1): 1—25
- Yetik I S, Nehorai A. Beamforming using the fractional Fourier transform. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51(6): 1663—1668 [\[DOI\]](#)
- Djurovic I, Stankovic S, Pitas I. Digital watermarking in the fractional Fourier transformation domain. J Netw Comput Appl, 2001, 24: 167—173 [\[DOI\]](#)
- Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels. IEEE Trans Commun, 2001, 49(6): 1011—1020 [\[DOI\]](#)
- Kutay M A, Ozaktas H M, Ankan O, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains. IEEE Trans Signal Process, 1997, 45(5): 1129—1143 [\[DOI\]](#)
- Qi L, Tao R, Zhou S Y, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform. Sci China Ser F-Inf Sci, 2004, 47(2): 184—198
- 齐林, 陶然, 周思永, 等. DSSS 系统中基于分数阶傅里叶变换的扫频干扰抑制算法. 电子学报, 2004, 32(5): 799—802
- 陈恩庆, 陶然, 张卫强. 一种基于分数阶傅里叶变换的时变信道参数估计方法. 电子学报, 2005, 33(12): 2101—2104

- 12 赵兴浩, 陶然. 基于分数阶相关的无源雷达动目标检测新算法. 电子学报, 2005, 33(9): 1567—1570
- 13 Vaidyanathan P P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial. Proc IEEE, 1990, 78(1): 56—93 [\[DOI\]](#)
- 14 胡广书. 现代信号处理教程. 北京: 清华大学出版社, 2004. 4—9, 121—132
- 15 张卫强, 陶然. 分数阶傅里叶变换域上带通信号的采样定理. 电子学报, 2005, 33(7): 1196—1199
- 16 Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem. IEEE Trans Signal Process, 1999, 47(12): 3419—3423 [\[DOI\]](#)
- 17 王世一. 数字信号处理. 北京: 北京理工大学出版社, 2003. 40—43
- 18 Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Process Lett, 1998, 5(4): 101—103 [\[DOI\]](#)
- 19 Pei S C, Ding J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms. IEEE Trans Signal Process, 2000, 48(5): 1338—1353 [\[DOI\]](#)