带有流量限制的拟线性趋化模型解的整体有界性

献给陈恕行教授 80 华诞

涂馨予¹, 穆春来^{2*}, 郑攀³

1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

2. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331;

3. 重庆邮电大学理学院, 重庆 400065

E-mail: xinyututu@163.com, clmu2005@163.com, zhengpan52@sina.com

收稿日期: 2020-07-20; 接受日期: 2020-11-20; 网络出版日期: 2021-02-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771062, 11971082, 11601053 和 11526042)、中央高校基本科研业务费 (批准号:

2020CDJQY-Z001, XDJK2020C054 和 2019CDJCYJ001)、中国博士后科学基金 (批准号: 2020M673102)、重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2019jcyj-msxmX0082 和 cstc2020jcyj-bshX0071)、重庆市博士后创新人才支持计划和重庆市分析数学与应用重点实验室资助项目

摘要 本文考虑如下带流量限制的趋化模型:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\frac{u^p \nabla u}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} \right) - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u^q \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu + u, & x \in \Omega, \quad t > 0 \end{cases}$$

的初边值问题, 其中 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2, R > 0$), $\chi > 0$, $\mu := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx$. 本文主要通过区域划分, 建立新的先验估计, 在 $p > q \geq 1$ 的条件下, 证明该模型唯一的经典解是整体存在且关于时间一致有界的, 从而解决了 Mizukami 等 (2019, 2020) 提出的公开问题.

关键词 趋化 流量限制 整体有界性

MSC (2020) 主题分类 35B40, 35K55, 35Q30, 92C17

1 引言

趋化性 (chemotaxis) 是指生物体在化学信号物质的刺激作用下沿其浓度的梯度方向产生的一种定向运动, 它们通过感知环境中的信号决定如何配置和组织, 是生物个体之间通信的重要手段. 为了刻画趋化现象, Keller 和 Segel^[1] 在 1970 年提出了如下偏微分方程模型:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

英文引用格式: Tu X Y, Mu C L, Zheng P. Global boundedness of solutions to the quasilinear chemotaxis model with flux limitation (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1003–1012, doi: 10.1360/SSM-2020-0230

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的有界区域, 函数 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别表示在 $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ 处细胞的密度和化学信号物质的浓度, $\chi > 0$ 为趋化灵敏度系数. 随后, 这类模型受到了广大数学工作者的广泛关注. 在齐次 Neumann 边界条件下, 当空间维数 $n = 1$ 时, 模型 (1.1) 的解的爆破行为是不会发生的, 即解总是整体存在且一致有界的 (参见文献 [2]); 当 $n = 2$ 时, 模型 (1.1) 存在临界质量现象 (参见文献 [3–5]); 当 $n \geq 3$ 时, 无论细胞初始质量的大小如何选取, 模型 (1.1) 都存在有限时间发生爆破的解 (参见文献 [6]). 如果将模型 (1.1) 中第二个方程替换为 $0 = \Delta v - \mu + u$, 其中 $\mu := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx$, 则其研究结果与模型 (1.1) 较为类似 (参见文献 [7–9]).

随后, Hillen 和 Painter^[10] 提出了如下的拟线性趋化模型:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D(u) \nabla u) - \nabla \cdot (S(u) u \nabla v), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $\tau \in \{0, 1\}$, $D(u)$ 为细胞扩散的函数, $S(u)$ 为趋化敏感函数. 当 $D(u) = 1$ 且 $S(u) = \chi$ 时, (1.2) 即为经典的 Keller-Segel 模型. 当 $D(u) = (u + 1)^{p-1}$ 且 $S(u) = (u + 1)^{q-2}$ ($p, q \in \mathbb{R}$) 时, 无论是全抛物形式 ($\tau = 1$), 还是抛物椭圆形式 ($\tau = 0$), 模型解的性质都依赖于 p 和 q 的关系, 例如, 当 $\tau = 1$ 时, 在 $q < p + \frac{2}{n}$ 的条件下, 模型 (1.2) 解的整体存在性和一致有界性在文献 [11, 12] 中得到了证明; 相反地, 当 $q > p + \frac{2}{n}$ 时, Cieřlak 和 Stinner^[13–15] 建立了解的有限时间爆破结果. 至于 $\tau = 0$ 的情形, 最近 Lankeit^[16] 证明了解在 $q < p + \frac{2}{n}$ 的条件下是整体存在且有界的, 而当 $q \leq 1$ 且 $q > p + \frac{2}{n}$ 时, 系统存在有限时间发生爆破的解. 若将 (1.2) 中的第二个方程替换为 $0 = \Delta v - \mu + u$, Cieřlak 和 Winkler^[7] 在 $q = 2, 2 < p + \frac{2}{n}$ 和 $q = 2, 2 > p + \frac{2}{n}$ 的条件下分别证明了解是整体有界的以及系统存在有限时间发生爆破的解; 进一步, 在文献 [17] 中, 通过选取 $p \leq 1$ 和 $q \in \mathbb{R}$, Winkler 和 Djie 证明了 $q < p + \frac{2}{n}$ 时解是整体存在且有界的, 而 $q > p + \frac{2}{n}$ 时系统存在有限时间发生爆破的解. 当 $D(u) = u^{p-1}$ 且 $S(u) = u^{q-2}$ ($p, q \in \mathbb{R}$) 时, 系统是退化的, 与之前的分析类似, 研究发现模型解的性质仍依赖于 p 与 q 的关系, 相关内容可参见文献 [18–21]. 此外, 关于其他相关模型的研究可参见文献 [22].

本文考虑如下的一类带流量限制的拟线性抛物 - 椭圆方程组的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\frac{u^p \nabla u}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} \right) - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u^q \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu + u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \left(\frac{u^p \nabla u}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} - \chi \frac{u^q \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \cdot \nu = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2, R > 0$) 是半径为 R 的球形区域. 模型 (1.3) 是经典 Keller-Segel 模型的一类推广, 由 Bellomo 等^[23] 提出, 用于描述细胞运动受到抑制的情形. 模型中函数 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别表示在 $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ 处细胞的密度和化学信号物质的浓度, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\chi > 0$ 表示趋化交叉扩散的强度, 参数 $p, q \geq 1$, μ 表示细胞初始质量在空间区域的平均值, 即为

$$\mu := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx, \quad (1.4)$$

其中初值 u_0 是 $\bar{\Omega}$ 中正的径向对称函数, 且满足以下条件:

$$u_0 \in C^3(\bar{\Omega}), \quad \text{在边界 } \partial\Omega \text{ 上有 } \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0. \quad (1.5)$$

由于在模型 (1.3) 中带有流量限制项, 使得与模型相关的 Lyapunov 泛函或能量泛函难以构造, 这给模型解适定性问题的研究带来了一定的困难. 到目前为止, 关于此模型的研究结果还比较少. 近年来, 当 $p = q = 1$ 时, Bellomo 和 Winkler^[24, 25] 得到了如下结果:

(i) 若 $n \geq 2$, $0 < \chi < 1$, 或者 $n = 1$, $\chi > 0$, $\int_{\Omega} u_0(x) dx < m_c$, 其中

$$m_c := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - 1}}, & \text{当 } \chi > 1 \text{ 时,} \\ +\infty, & \text{当 } \chi \leq 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

则模型 (1.3) 存在唯一整体的经典径向对称解, 且解关于时间 t 一致有界;

(ii) 若 $\chi > 1$, 且任意的 m 满足

$$m > \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - 1}}, & \text{当 } n = 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n \geq 2 \text{ 时,} \end{cases}$$

则存在正的初值 $u_0 \in C^3(\overline{\Omega})$ 满足 $\int_{\Omega} u_0(x) dx = m$, 使得模型 (1.3) 的经典解在有限时间爆破.

随后, Bellomo 和 Winkler^[24, 25] 的结果被推广到了拟线性的情形 ($p, q \geq 1$), 参见文献 [26, 27]:

(i) 如果 $p, q \geq 1$ 且满足 $p > q + 1 - \frac{1}{n}$, 则模型 (1.3) 的解是整体存在且一致有界的;

(ii) 如果 $1 \leq p \leq q$, 参数 χ 和初值 u_0 满足一定的条件, 则模型 (1.3) 存在有限时间发生爆破的解.

然而遗憾的是, 当 $1 \leq q < p \leq q + 1 - \frac{1}{n}$ 且 $n \geq 2$ 时, 模型 (1.3) 的解是整体存在还是有限时间爆破仍不清楚, 它作为公开问题在文献 [26, 27] 中被提出来. 因此, 本文通过巧妙地划分区域, 避免了使用 $p > q + 1 - \frac{1}{n}$ 的限制条件, 从而建立了新的先验估计, 成功地解决了这个公开问题.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2, R > 0$), $\chi > 0$, $p > q \geq 1$, 初值 $u_0 > 0$ 是径向对称函数且满足 (1.5), 则模型 (1.3) 的唯一经典解是整体存在且关于时间一致有界的.

注 1.1 从定理 1.1 可以看到, 只要 $p > q \geq 1$ 成立, 则对任意满足 (1.5) 的正的径向初值 u_0 和任意 $\chi > 0$, 模型 (1.3) 的唯一经典解就都是整体存在且一致有界的. 这解决了文献 [26, 27] 中提出的公开问题.

本文余下内容的安排如下: 第 2 节介绍模型 (1.3) 解的局部存在性定理和一些重要的不等式; 第 3 节通过巧妙地划分区域, 给出定理 1.1 的证明.

2 局部适定性和一些重要估计

本节讨论模型 (1.3) 的解的局部适定性, 并给出一些重要的估计. 首先回顾文献 [27] 中的局部存在性定理.

引理 2.1 令 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $R > 0$, 参数 $\chi > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, 假设初值 $u_0 > 0$ 是径向对称函数且满足 (1.5), 则存在 $T_{\max} \in (0, \infty]$ 使得模型 (1.3) 存在唯一的正的径向对称经典解 (u, v) , 且满足

$$u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})), \quad v \in C^{2,0}(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})).$$

此外, 以下延拓准则:

$$\text{如果 } T_{\max} < \infty, \text{ 则 } \limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

成立.

引理 2.2 假设引理 2.1 的条件成立, 则存在常数 $M > 0$ 使得

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx =: M, \quad \forall t \in (0, T_{\max}), \quad (2.1)$$

且

$$v_{rr} = \mu - u - \frac{n-1}{r} v_r \quad (2.2)$$

对任意 $r \in (0, R)$ 和 $t \in (0, T_{\max})$ 成立.

证明 将模型 (1.3) 中的第一个方程两边同时在 Ω 上积分, 根据齐次 Neumann 边界条件即可得到 u 质量守恒 (2.1) 成立. 应用模型 (1.3) 中的第二个方程, 在径向对称条件下, 经过简单计算可证 (2.2) 成立. $\square$

接下来, 为了证明模型 (1.3) 解的整体有界性, 需要给出两个重要的估计.

引理 2.3 令 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1, R > 0$), $p > 1, \zeta \geq 1, \varrho \geq 1$, (u, v) 是模型 (1.3) 的一组经典解, 则

$$\int_{\Omega} u^{\varrho-1} |\nabla u| dx \leq \int_{\Omega} \frac{u^{\varrho-1} |\nabla u|^2}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} dx + \int_{\Omega} u^{\varrho} dx, \quad \forall t \in (0, T_{\max}), \quad (2.3)$$

并且存在常数 $C > 0$ 满足

$$\int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx \leq \eta \int_{\Omega} |\nabla u^{\zeta+p-1}| dx + C^{\zeta} (\eta^{-n(\zeta+p-2)} + 1), \quad \forall \eta > 0. \quad (2.4)$$

证明 估计 (2.3) 可直接由文献 [27, 引理 6.1] (或文献 [24, 引理 6.1]) 得到. 估计 (2.4) 是文献 [27, 引理 6.2] 当 $\alpha = -1$ 时的一种特殊情形. $\square$

3 整体有界性

第 2 节得到了模型 (1.3) 解的局部适定性. 本节的目标是通过作一些先验估计将局部解延拓到整体解.

引理 3.1 令 $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2, R > 0$), $\chi > 0, p > q \geq 1$, 初值 $u_0 > 0$ 是径向对称函数且满足 (1.5), 则对所有 $\zeta \geq 1$, 存在与 ζ 无关的常数 $K_1, K_2, K_3 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\zeta} dx + \int_{\Omega} u^{\zeta} dx + \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx \\ & \leq 2\zeta(\zeta-1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + K_1 \cdot \zeta \cdot K_2^{\zeta} + K_3 \cdot \zeta, \quad \forall t \in (0, T_{\max}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

证明 当 $\zeta = 1$ 时, 由 u 的质量守恒性质, 显然有 (3.1) 成立. 不失一般性, 我们在以下证明中取 $\zeta \geq 2$. 对方程 (1.3) 中的第一个方程两端同时乘以 $\zeta u^{\zeta-1}$ 并在 Ω 上积分, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\zeta} dx + \zeta(\zeta-1) \int_{\Omega} \frac{u^{\zeta+p-2} |\nabla u|^2}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} dx = \zeta(\zeta-1) \chi \int_{\Omega} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx, \quad \forall t \in (0, T_{\max}). \quad (3.2)$$

利用引理 2.3, 取 $\varrho = \zeta + p - 1$, 可得

$$\zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} \frac{u^{\zeta+p-2} |\nabla u|^2}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} dx \geq \zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx - \zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx. \quad (3.3)$$

联合 (3.1) 和 (3.2) 可知,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\zeta} dx + \zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx \leq \zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{\Omega} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \quad (3.4)$$

对任意的 $t \in (0, T_{\max})$ 成立.

为了处理 (3.4) 右端的第二项, 我们将空间区域 Ω 划分为两部分:

$$\Omega = \{x \in \Omega \mid u(\cdot, t) \geq (2\chi)^{\frac{1}{p-q}}\} \cup \{x \in \Omega \mid u(\cdot, t) < (2\chi)^{\frac{1}{p-q}}\} =: E_1 \cup E_2,$$

从而得到以下估计:

$$\begin{aligned} & \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{\Omega} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \\ &= \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_1} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx + \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_2} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \\ &=: \mathcal{I}_1(t) + \mathcal{I}_2(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

接下来分别估计 $\mathcal{I}_1(t)$ 和 $\mathcal{I}_2(t)$. 一方面, 利用条件 $p > q \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t) &= \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_1} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \\ &\leq \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_1} u^{\zeta+q-2} |\nabla u| dx \\ &= \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_1} u^{\zeta+p-2} u^{q-p} |\nabla u| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \zeta(\zeta - 1) \int_{E_1} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \zeta(\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

另一方面, 我们估计 $\mathcal{I}_2(t)$. 利用分部积分和模型 (1.3) 中第二个方程可知,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(t) &= \zeta(\zeta - 1) \chi \int_{E_2} \frac{u^{\zeta+q-2} \nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \\ &= \frac{\zeta(\zeta - 1) \chi}{\zeta + q - 1} \int_{E_2} \frac{\nabla u^{\zeta+q-1} \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} dx \\ &= \frac{\zeta(\zeta - 1) \chi}{\zeta + q - 1} \int_{\partial E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \cdot \nu dS - \frac{\zeta(\zeta - 1) \chi}{\zeta + q - 1} \int_{E_2} u^{\zeta+q-1} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) dx \\ &= \frac{\zeta(\zeta - 1) \chi}{\zeta + q - 1} \int_{\partial E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \cdot \nu dS - \frac{\zeta(\zeta - 1) \chi}{\zeta + q - 1} \int_{E_2} u^{\zeta+q-1} \left(\frac{\Delta v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right. \\ &\quad \left. + \nabla v \cdot \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{\partial E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} \cdot \nu dS + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{u-\mu}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} dx \\
&\quad + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{2(\zeta+q-1)} \int_{E_2} \frac{u^{\zeta+q-1}}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}^3} \nabla v \cdot \nabla(|\nabla v|^2) dx \\
&=: \mathcal{I}_{21}(t) + \mathcal{I}_{22}(t) + \mathcal{I}_{23}(t).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

先考虑 $\mathcal{I}_{21}(t)$ 估计, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{21}(t) &= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{\partial E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} \cdot \nu dS \leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{\partial E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{|\nabla v|}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} dS \\
&\leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} |\partial E_2|.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

再考虑 $\mathcal{I}_{22}(t)$ 估计, 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{22}(t) &= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{E_2} u^{\zeta+q-1} \frac{u-\mu}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} dx \leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} ((2\chi)^{\frac{\zeta+q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}}) |E_2| \\
&\leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} ((2\chi)^{\frac{\zeta+q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}}) |\Omega|.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

最后估计 $\mathcal{I}_{23}(t)$, 由引理 2.2 可知,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{23}(t) &= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{E_2} \frac{u^{\zeta+q-1}}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}^3} \nabla v \cdot \nabla(|\nabla v|^2) dx \\
&= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} \int_{E_2} \frac{u^{\zeta+q-1}}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}^3} \sum_{i,j}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx \\
&\leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} \int_{E_2} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}^3} \left| \sum_{i,j}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right| dx \\
&\leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2 \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} \int_0^R \frac{v_r^2}{\sqrt{1+|v_r|^2}^3} |v_{rr}| r^{n-1} dr \\
&= \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2 \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} \int_0^R \frac{v_r^2}{\sqrt{1+|v_r|^2}^3} \left| \mu - u - \frac{n-1}{r} v_r \right| r^{n-1} dr \\
&\leq \frac{\mu \zeta(\zeta-1)\chi n \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^n + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} \int_{\Omega} |u| dx \\
&\quad + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2 \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^{n-1} \\
&= \frac{\mu \zeta(\zeta-1)\chi n \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^n + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} M \\
&\quad + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2 \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^{n-1}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

联立 (3.7)–(3.10), 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(t) &\leq \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} |\partial E_2| + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi}{\zeta+q-1} ((2\chi)^{\frac{\zeta+q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}}) |\Omega| \\
&\quad + \frac{\mu \zeta(\zeta-1)\chi n \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^n + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} M + \frac{\zeta(\zeta-1)\chi n^2 \omega_n}{\zeta+q-1} (2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \zeta \chi(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} |\partial E_2| + \zeta \chi((2\chi)^{\frac{\zeta+q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}}) |\Omega| \\
&\quad + \mu \zeta \chi n \omega_n(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^n + \zeta \chi n^2(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} M + \zeta \chi n^2 \omega_n(2\chi)^{\frac{\zeta+q-1}{p-q}} R^{n-1} \\
&= (\chi(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} |\partial E_2| + \chi((2\chi)^{\frac{q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}}) |\Omega| + \mu \chi n \omega_n(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} R^n \\
&\quad + \chi n^2(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} M + \chi n^2 \omega_n(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} R^{n-1}) \zeta ((2\chi)^{\frac{1}{p-q}})^\zeta \\
&=: K_1 \cdot \zeta \cdot K_2^\zeta,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
K_1 &= \chi(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} |\partial E_2| + \chi((2\chi)^{\frac{q}{p-q}} + \mu(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}}) |\Omega| + \mu \chi n \omega_n(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} R^n \\
&\quad + \chi n^2(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} M + \chi n^2 \omega_n(2\chi)^{\frac{q-1}{p-q}} R^{n-1}
\end{aligned}$$

和 $K_2 = (2\chi)^{\frac{1}{p-q}}$ 都是与 ζ 无关的常数, 且根据有限覆盖定理可知 $|\partial E_2|$ 是有界的常数.

结合 (3.4)、(3.6) 和 (3.11), 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^\zeta dx + \frac{1}{2} \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx \\
&\leq \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + K_1 \cdot \zeta \cdot K_2^\zeta, \quad \forall t \in (0, T_{\max}).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

在 (3.12) 的两端同时加上 $\int_{\Omega} u^\zeta dx$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^\zeta dx + \int_{\Omega} u^\zeta dx + \frac{1}{2} \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-2} |\nabla u| dx \\
&\leq \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + \int_{\Omega} u^\zeta dx + K_1 \cdot \zeta \cdot K_2^\zeta, \quad \forall t \in (0, T_{\max}),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

注意到 $\zeta + p - 1 > \zeta$, 利用 Young 不等式, 则有

$$\int_{\Omega} u^\zeta dx \leq \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + |\Omega| \leq \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + \zeta \cdot |\Omega| =: \zeta (\zeta - 1) \int_{\Omega} u^{\zeta+p-1} dx + \zeta \cdot K_3. \tag{3.14}$$

因此, 结合 (3.13) 和 (3.14), 可以推出 (3.1). 故引理得证. $\square$

定理 1.1 的证明 根据引理 3.1 的结论, 定理 1.1 的证明可利用文献 [27, 引理 6.4 和 6.5] 得到, 但为了本文内容的完整性, 我们简略地叙述证明过程.

第一步, 运用引理 2.3 中 (2.4), 取 (2.4) 中参数 $\eta = \frac{1}{4(\zeta+p-1)}$ 来处理 (3.1) 右端的第一项. 紧接着, 利用常微分方程中比较原理, 立即可以证得, 对任意 $\zeta \geq 1$, 存在与 ζ 相关的常数 K_ζ 使得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\zeta(\Omega)} \leq K_\zeta, \quad \forall t \in (0, T_{\max}). \tag{3.15}$$

第二步, 先引入序列

$$\zeta_k := 2^k + p - 1, \quad \text{其中 } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.16}$$

通过直接计算可以得到

$$\zeta_{k-1} = \frac{\zeta_k + p - 1}{2}, \tag{3.17}$$

$$\zeta_0 = p > q \geq 1, \quad \zeta_k > \zeta_{k-1}, \quad \text{对所有 } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ 成立,} \quad (3.18)$$

以及

$$\zeta_k \rightarrow \infty, \quad \text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时.} \quad (3.19)$$

固定任意的 $T \in (0, T_{\max})$, 取 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 定义

$$M_k := \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} u^{\zeta_k}(x, t) dx. \quad (3.20)$$

运用 Gagliardo-Nirenberg 型不等式 (参考文献 [28]) 和 Young 不等式, 我们能够找到某个 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\zeta_k} dx + \int_{\Omega} u^{\zeta_k} dx \\ & \leq C \cdot \zeta_k^2 \left(\frac{\zeta_k + p - 1}{2} \right)^{n+1} \left(\int_{\Omega} u^{\frac{\zeta_k + p - 1}{2}} dx \right)^2 + K_1 \cdot \zeta_k \cdot K_2^{\zeta_k} + K_3 \cdot \zeta_k, \quad \forall t \in (0, T_{\max}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

因此, 运用比较原理, 对所有的 $t \in (0, T_{\max})$, 有

$$M_k \leq \max \left\{ \int_{\Omega} u_0^{\zeta_k} dx, 2(K_1 \cdot \zeta_k \cdot K_2^{\zeta_k} + K_3 \cdot \zeta_k), 2C \cdot \zeta_k^{n+3} \cdot M_{k-1}^2 \right\}, \quad \forall t \in (0, T_{\max}). \quad (3.22)$$

接下来将分情形讨论:

如果存在一组序列 $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 使得 $k_i \rightarrow \infty$ (当 $i \rightarrow \infty$ 时), 并且

$$M_{k_i} \leq \int_{\Omega} u_0^{\zeta_{k_i}} dx, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (3.23)$$

那么,

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{当 } \zeta_{k_i} \rightarrow \infty \text{ 时.} \quad (3.24)$$

反之, 如果不存在以上情形的序列, 则一定存在某个充分大的 $k_0 > 0$, 使得

$$M_k \leq 2(K_1 \cdot \zeta_k \cdot K_2^{\zeta_k} + K_3 \cdot \zeta_k) \quad \text{或者} \quad M_k \leq 2C \cdot \zeta_k^{n+3} \cdot M_{k-1}^2$$

对所有的 $k > k_0$ 成立. 如果存在 $k_1 > 0$ 满足

$$M_k \leq 2(K_1 \cdot \zeta_k \cdot K_2^{\zeta_k} + K_3 \cdot \zeta_k) \quad \text{对所有的 } k > k_1 \text{ 成立,} \quad (3.25)$$

那么显然有

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 + K_2, \quad \text{当 } \zeta_k \rightarrow \infty \text{ 时.} \quad (3.26)$$

如果存在 $k_2 > 0$ 满足

$$M_k \leq 2C \cdot \zeta_k^{n+3} \cdot M_{k-1}^2 \quad \text{对所有的 } k > k_2 \text{ 成立,} \quad (3.27)$$

那么, 利用 Moser 迭代和一些基础不等式, 可以找到常数 $L > 1$ 使得

$$M_k \leq L^k \cdot M_{k-1}^2 \quad \text{对所有 } k \geq 1 \text{ 成立.} \quad (3.28)$$

进一步, 通过直接计算可以得到

$$M_k \leq L^{\sum_{j=0}^k j \cdot 2^{k-j}} \cdot M_0^{2^k} \leq L^{2^{k+1}} \cdot M_0^{2^k}, \quad \forall k \geq 1, \quad (3.29)$$

于是,

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^{\zeta_k}(\Omega)} = M_k^{\frac{1}{\zeta_k}} \leq L^{\frac{2^{k+1}}{2^k + p - 1}} \cdot M_0^{\frac{2^k}{2^k + p - 1}}. \quad (3.30)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 对上式取极限即可得

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L^2 M_0. \quad (3.31)$$

因此, 由引理 2.1 有 $T_{\max} = \infty$, 并且还能证得系统 (1.3) 的解是整体有界的, 即定理 1.1 成立. $\square$

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改建议.

参考文献

- 1 Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J Theoret Biol*, 1970, 26: 399–415
- 2 Osaki K, Yagi A. Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller-Segel equations. *Funkcial Ekvac*, 2001, 44: 441–469
- 3 Herrero M A, Velázquez J J L. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1997, 24: 633–683
- 4 Horstmann D, Wang G. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions. *European J Appl Math*, 2001, 12: 159–177
- 5 Nagai T, Senba T, Yoshida K. Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial Ekvac*, 1997, 40: 411–433
- 6 Winkler M. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system. *J Math Pures Appl* (9), 2013, 100: 748–767
- 7 Cieślak T, Winkler M. Finite-time blow-up in a quasilinear system of chemotaxis. *Nonlinearity*, 2008, 21: 1057–1076
- 8 Jäger W, Luckhaus S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans Amer Math Soc*, 1992, 329: 819–824
- 9 Winkler M. How unstable is spatial homogeneity in Keller-Segel systems? A new critical mass phenomenon in two- and higher-dimensional parabolic-elliptic cases. *Math Ann*, 2019, 373: 1237–1282
- 10 Hillen T, Painter K J. A user's guide to PDE models for chemotaxis. *J Math Biol*, 2009, 58: 183–217
- 11 Ishida S, Seki K, Yokota T. Boundedness in quasilinear Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type on non-convex bounded domains. *J Differential Equations*, 2014, 256: 2993–3010
- 12 Tao Y S, Winkler M. Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity. *J Differential Equations*, 2012, 252: 692–715
- 13 Cieślak T, Stinner C. Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller-Segel system in higher dimensions. *J Differential Equations*, 2012, 252: 5832–5851
- 14 Cieślak T, Stinner C. Finite-time blowup in a supercritical quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system in dimension 2. *Acta Appl Math*, 2014, 129: 135–146
- 15 Cieślak T, Stinner C. New critical exponents in a fully parabolic quasilinear Keller-Segel system and applications to volume filling models. *J Differential Equations*, 2015, 258: 2080–2113
- 16 Lankeit J. Infinite time blow-up of many solutions to a general quasilinear parabolic-elliptic Keller-Segel system. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2020, 13: 233–255
- 17 Winkler M, Djie K C. Boundedness and finite-time collapse in a chemotaxis system with volume-filling effect. *Nonlinear Anal*, 2010, 72: 1044–1064
- 18 Hashira T, Ishida S, Yokota T. Finite-time blow-up for quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type. *J Differential Equations*, 2018, 264: 6459–6485
- 19 Ishida S, Yokota T. Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type. *J Differential Equations*, 2012, 252: 1421–1440

- 20 Ishida S, Yokota T. Boundedness in a quasilinear fully parabolic Keller-Segel system via maximal Sobolev regularity. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2020, 13: 211–232
- 21 Sugiyama Y, Kunii H. Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term. *J Differential Equations*, 2006, 227: 333–364
- 22 Yang Y, Chen H, Liu W A. On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction-diffusion equations modelling chemotaxis. *SIAM J Math Anal*, 2001, 33: 763–785
- 23 Bellomo N, Bellouquid A, Nieto J, et al. Multiscale biological tissue models and flux-limited chemotaxis for multicellular growing systems. *Math Models Methods Appl Sci*, 2010, 20: 1179–1207
- 24 Bellomo N, Winkler M. A degenerate chemotaxis system with flux limitation: Maximally extended solutions and absence of gradient blow-up. *Comm Partial Differential Equations*, 2017, 42: 436–473
- 25 Bellomo N, Winkler M. Finite-time blow-up in a degenerate chemotaxis system with flux limitation. *Trans Amer Math Soc Ser B*, 2017, 4: 31–67
- 26 Chiyoda Y, Mizukami M, Yokota T. Finite-time blow-up in a quasilinear degenerate chemotaxis system with flux limitation. *Acta Appl Math*, 2020, 167: 231–259
- 27 Mizukami M, Ono T, Yokota T. Extensibility criterion ruling out gradient blow-up in a quasilinear degenerate chemotaxis system with flux limitation. *J Differential Equations*, 2019, 267: 5115–5164
- 28 Li Y, Lankeit J. Boundedness in a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion. *Nonlinearity*, 2016, 29: 1564–1595

Global boundedness of solutions to the quasilinear chemotaxis model with flux limitation

Xinyu Tu, Chunlai Mu & Pan Zheng

Abstract In this paper, the initial boundary value problem for the following chemotaxis model with flux limitation is considered:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\frac{u^p \nabla u}{\sqrt{u^2 + |\nabla u|^2}} \right) - \chi \nabla \cdot \left(\frac{u^q \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ 0 = \Delta v - \mu + u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases}$$

where $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$, $R > 0$), $\chi > 0$ and $\mu := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx$. By dividing the domain Ω into two parts, we establish a new *a priori* estimate. Under the condition $p > q \geq 1$, it is proved that the unique classical solution for the model is globally bounded, which solves the open problem proposed by Mizukami et al. in 2019 and 2020.

Keywords chemotaxis, flux limitation, global boundedness

MSC(2020) 35B40, 35K55, 35Q30, 92C17

doi: 10.1360/SSM-2020-0230