

# 球面波源叠加法与球面波源边界点法 实现声全息比较研究

毕传兴\* 陈心昭 周蓉 陈剑

(合肥工业大学动态测试中心, 合肥 230009, \* 联系人, E-mail: [cxbi@hfut.edu.cn](mailto:cxbi@hfut.edu.cn))

**摘要** 在提出球面波源概念的基础上, 建立了完备的基于球面波源叠加法的近场声全息理论, 其中包括展开系数的重构、声场的预测、误差敏感性分析、正则化处理以及提出的一种最优球面波源展开项数的选取方法——双面测量遍历法; 随后简要地介绍了球面波源边界点法及其实现近场声全息的过程. 考虑到上述两种近场声全息实现方法之间具有很大的相似性, 对两者进行了比较研究, 通过严格的数学证明以及对半自由声场中单源和多源声场的实验研究, 阐明了它们之间的异同点, 并论证了球面波源边界点法作为声全息变换算法的优越性.

**关键词** 声全息 球面波 边界点法 叠加法 逆问题

从20世纪80年代初Williams等人首次提出近场声全息(NAH)概念至今<sup>[1,2]</sup>, NAH经历了重大的发展和改进. 其中主要体现在NAH变换算法上, 现有主流的NAH变换算法有3种: 二维空间Fourier变换及其逆变换法<sup>[1~5]</sup>、边界元法(BEM)<sup>[6~10]</sup>以及Helmholtz最小二乘(HELS)法<sup>[11~13]</sup>. 第1种方法计算速度快, 但是对源面和全息面的形状要求严格; 第2种方法对源面和全息面的形状适应性强, 但是计算效率低, 其中存在解的非唯一性、奇异积分的处理等问题; 第3种方法是介于前两者之间的一种折衷的方法, 它所需的展开项数和测量点数要比BEM中源面离散点数和外部测量点数少得多, 并且避免了大量耗时的积分运算, 计算量要远小于BEM, 计算速度快, 而且它适用于任意形状声源的外部<sup>[11,12]</sup>和内部<sup>[13]</sup>声场分析, 但对于细长形声源, 存在收敛性差的问题<sup>[14]</sup>.

在前期的研究工作中, 作者提出了一种新型的基于分布源边界点法的NAH技术<sup>[15]</sup>, 并对半自由声场<sup>[16]</sup>和多源混合声场<sup>[17]</sup>进行了系统的研究, 该方法一方面继承了BEM适用于任意形状声源分析的优点, 另一方面则有效地避开了BEM中存在的奇异积分、解的非唯一性处理以及计算量大等问题. 另外, 在考虑到常规的分布源边界点法在特解源的位置选取等方面存在一定的缺陷, 还对其进行了改进, 提出了采用不同阶次的球面波源作为特解源的球面波源边界点法, 并成功将其用于实现NAH<sup>[18]</sup>.

在此基础上, 本文首先提出采用球面波源直接叠加的方法作为声全息变换算法, 建立了完备的基

于球面波源叠加法的 NAH 理论, 其中包括: 展开系数的重构、声场的预测、最优展开项数的选取、误差的敏感性分析以及正则化处理. 随后, 简要地介绍了球面波源边界点法及其实现 NAH 的过程. 进而, 考虑到球面波源叠加法和球面波源边界点法之间的相似性, 对两者进行了详细的比较研究, 首先通过严格的数学证明, 论述了两者的异同点, 并阐明了球面波源边界点法实现 NAH 的优越性; 随后通过对半自由声场中单源和多源声场的实验研究, 进一步验证了上述结论的正确性.

## 1 理论基础

### 1.1 波动方程的解

在理想流体媒质小振幅时谐声场中, 去除时间相关性  $e^{-i\omega t}$  后, 球面坐标下波动方程的行波解为<sup>[19]</sup>

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [C_{mn} h_n^{(1)}(kr) + D_{mn} h_n^{(2)}(kr)] Y_n^m(\theta, \phi), \quad (1)$$

式中,  $k$  为波数;  $r$  为球面波源所处位置与声场中任意点之间的距离,  $\theta$  为  $r$  与  $z$  轴正方向之间的夹角,  $\phi$  为  $r$  与  $x$  轴正方向之间沿逆时针方向的夹角(如图1所示);  $C_{mn}$  和  $D_{mn}$  为展开系数;  $h_n^{(1)}(kr)$  和  $h_n^{(2)}(kr)$  为球面 Hankel 函数, 它们分别代表入射波和辐射波成分;  $Y_n^m(\theta, \phi)$  为不同阶次的球面谐波, 它代表声源在不同角度处的辐射属性, 它可以表示为

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n-1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (2)$$

式中,  $m$  和  $n$  为球面谐波的阶数, 其中  $n=0, \dots, \infty$ ,  $m=-n, \dots, n$ ;  $P_n^m(\cos\theta)$  为连带 Legendre 函数. 由于不同阶次的连带 Legendre 函数相互正交; 因而不同阶球面谐波函数亦相互正交, 即

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (3)$$

式中,  $\delta_{nn'}$  和  $\delta_{mm'}$  为 Dirac 常量.

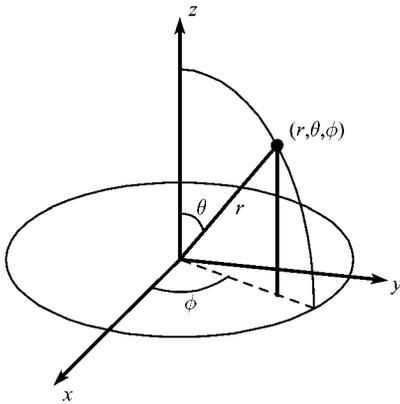


图 1 球面坐标与笛卡尔坐标之间的关系图

### 1.2 球面波源

球面波源是由上述不同阶次的球面谐波函数和第一类球面 Hankel 函数构成, 它代表的是波动方程行波解的辐射波部分, 球面波源的声压和质点振速的具体表达式分别为

$$p_{mn}^*(r, \theta, \phi) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (4)$$

$$v_{mn}^*(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{i\omega\rho} \frac{dh_n^{(1)}(kr)}{dr} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (5)$$

式中,  $dh_n^{(1)}(kr)/dr$  为一阶球面 Hankel 函数  $h_n^{(1)}(kr)$  对  $r$  的一阶导数.

由(3)式可知, 不同阶球面谐波相互正交, 因而由其构成的不同阶球面波源亦具有相互正交性.

各阶球面波源的远场指向性  $D_{mn}(\theta, \phi)$  可以通过从声压中分离出  $e^{ikr}/r$  而获得, 它与声压之间的关系可以描述为以下形式

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [p_{mn}^*(r, \theta, \phi)] = \frac{e^{ikr}}{r} D_{mn}(\theta, \phi). \quad (6)$$

将(4)式代入(6)式中, 则  $D_{mn}(\theta, \phi)$  可表示为

$$D_{mn}(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} [re^{-ikr} h_n^{(1)}(kr)] Y_n^m(\theta, \phi). \quad (7)$$

当  $r \rightarrow \infty$  时, 第 1 类球面 Hankel 函数可以近似表示为 [19]

$$h_n^{(1)}(kr) \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式, 可得  $(n, m)$  阶球面波源的远场指向因式为

$$D_{mn}(\theta, \phi) = \frac{(-i)^{n+1}}{k} Y_n^m(\theta, \phi). \quad (9)$$

## 2 基于球面波源叠加法的 NAH

基于球面波源叠加法的 NAH 的基本思想是通过一系列不同阶次的球面波源加权组合来近似实际声源所辐射的外部声场. 如图 2 所示, 在点  $O$  处分布不同阶的球面波源, 将它们在声源边界面上的辐射声压和法向振速分别进行加权叠加, 实际声源表面的边界条件以加权叠加的表面声压和表面法向振速近似代替, 其中  $O$  点位于振动体最小外接球心处. 对于各阶球面波源的展开系数, 通过建立声场中某些测点与各阶球面波源之间的线性关系, 并求解该线性关系来确定. 其中, 声场中  $r$  点处辐射声压与各阶球面波源之间的关系可以描述为

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n C_{mn} p_{mn}^*(r, \theta, \phi) = \sum_{j=1}^J C_j \psi_j^*(r, \theta, \phi), \quad (10)$$

式中, 系数  $j, n$  和  $m$  之间的关系可以描述为  $j = n^2 + n + m + 1$ ;  $J$  和  $N$  之间的关系为  $J = (N + 1)^2$ , 其中  $N = 0 \dots \infty$ ;  $\psi_j^*$  与  $(n, m)$  阶球面波源声压  $p_{mn}^*$  相对应;  $C_j$  与  $(n, m)$  阶球面波源的展开系数  $C_{mn}$  相对应.

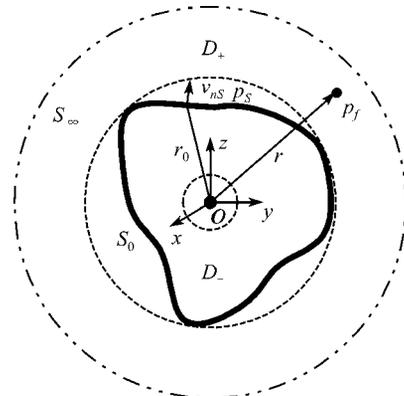


图 2 不同阶球面波源近似实际声源声辐射示意图

设全息面上分布了  $M$  个测点, 则全息面上声压与各阶球面波源之间的传递关系可以描述为以下矩阵形式:

$$p_h = \Psi_{hp} C, \quad (11)$$

式中,

$$\Psi_{hp} = \begin{bmatrix} \psi_1^*(r_{h1}) & \psi_2^*(r_{h1}) & \cdots & \psi_J^*(r_{h1}) \\ \psi_1^*(r_{h2}) & \psi_2^*(r_{h2}) & \cdots & \psi_J^*(r_{h2}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_1^*(r_{hM}) & \psi_2^*(r_{hM}) & \cdots & \psi_J^*(r_{hM}) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_J]^T, \quad (13)$$

式中, 上标“T”为矩阵转置;  $M \times J$  传递矩阵  $\Psi_{hp}$  的每一列对应一阶球面波源在全息面上  $M$  个测点处产生的声压特解向量; 由于不同阶球面波源之间相互正交, 因而矩阵  $\Psi_{hp}$  所有的列向量相互正交;  $C$  为球面波源展开系数列向量.

### 2.1 展开系数的重构

对于(11)式所示线性方程组, 如果式中传递矩阵  $\Psi_{hp}$  的阶数满足使  $M \geq J$ , 则通过奇异值分解法可以唯一确定球面波源的展开系数列向量  $C$ . 此时传递矩阵  $\Psi_{hp}$  的奇异值分解如下<sup>[8]</sup>:

$$\Psi_{hp} = U_{hp} \Sigma_{hp} V_{hp}^H, \quad (14)$$

式中, 对角阵  $\Sigma_{hp} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J)$ , 其对角元素为奇异值  $\sigma_i$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_J > 0$ ;  $U_{hp}$  和  $V_{hp}$  为列向量相互正交的酉矩阵, 即  $u_i^H u_j = \delta_{ij}$ ,  $v_i^H v_j = \delta_{ij}$ ;  $\delta_{ij}$  为 Dirac 常量.

通过对传递矩阵  $\Psi_{hp}$  进行奇异值分解并求其广义逆, 则可得展开系数列向量  $C$  为

$$C = \Psi_{hp}^+ p_h = [\Psi_{hp}^H \Psi_{hp}]^{-1} \Psi_{hp}^H p_h = V_{hp} \Sigma_{hp}^{-1} U_{hp}^H p_h, \quad (15)$$

式中, 上标“+”和“H”分别表示矩阵广义逆和 Hermitian 算子.

### 2.2 声场的预测

根据重构的球面波源展开系数, 可以预测出整个声场中任意点处(包括声源表面上)的声压、质点振速、声强以及辐射声功率等声学量. 由(11)式可知, 在声场中任意点  $r$  处的声压可以表示为

$$p_f(r) = \Psi_{fp}(r) C = \Psi_{fp}(r) \Psi_{hp}^+ p_h, \quad (16)$$

式中,  $\Psi_{fp}(r)$  为  $J$  阶球面波源与场点  $r$  处声压之间的传递矩阵, 且

$$\Psi_{fp}(r) = [\psi_1^*(r) \ \psi_2^*(r) \ \cdots \ \psi_J^*(r)]. \quad (17)$$

通过构造  $J$  阶球面波源与场点  $r$  处的质点振速之间的传递矩阵  $\Psi_{fv}(r)$ , 可获取该点的质点振速为

$$v_f(r) = \Psi_{fv}(r) C = \Psi_{fv}(r) \Psi_{hp}^+ p_h, \quad (18)$$

式中,

$$\Psi_{fv}(r) = [v_1^*(r) \ v_2^*(r) \ \cdots \ v_J^*(r)], \quad (19)$$

式中,  $v_j^*$  与  $(n, m)$  阶球面波源质点振速  $v_{mn}^*$  相对应.

同理, 声源的表面声压和表面法向振速可以分别表示为

$$p_s = \Psi_{Sp} C = \Psi_{Sp} \Psi_{hp}^+ p_h, \quad (20)$$

$$v_{nS} = \Psi_{Sv} C = \Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_h, \quad (21)$$

式中,  $\Psi_{Sp}$  和  $\Psi_{Sv}$  分别为表面声压和表面法向振速与各阶球面波源之间的传递矩阵, 且

$$\Psi_{Sp} = \begin{bmatrix} \psi_1^*(r_{01}) & \psi_2^*(r_{01}) & \cdots & \psi_J^*(r_{01}) \\ \psi_1^*(r_{02}) & \psi_2^*(r_{02}) & \cdots & \psi_J^*(r_{02}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_1^*(r_{0N}) & \psi_2^*(r_{0N}) & \cdots & \psi_J^*(r_{0N}) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\Psi_{Sv} = \begin{bmatrix} v_1^*(r_{01}) & v_2^*(r_{01}) & \cdots & v_J^*(r_{01}) \\ v_1^*(r_{02}) & v_2^*(r_{02}) & \cdots & v_J^*(r_{02}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^*(r_{0N}) & v_2^*(r_{0N}) & \cdots & v_J^*(r_{0N}) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

式中,  $N$  为声源表面结点数.

实际声源的远场指向性因式  $D(\theta, \phi)$  可以通过各阶球面波源的指向性加权叠加获取为

$$D(\theta, \phi) = [D_1(\theta, \phi) \ D_2(\theta, \phi) \ \cdots \ D_J(\theta, \phi)] \Psi_{hp}^+ p_h, \quad (24)$$

$$D_j(\theta, \phi) = \frac{(-i)^{n+1}}{k} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (25)$$

式中,  $D_j(\theta, \phi)$  为第  $j$  阶球面波源的指向性因子.

另外, 根据预测的声压和质点振速可以计算声场中任意点处的有功和无功声强以及任意面上的辐射声功率等声学量.

### 2.3 最佳展开项数的选取

由 2.1 节可知, 声源的实际辐射声场是由不同阶次的球面波源近似代替, 理论上应该包含所有阶次的球面波源, 而实际计算中只能选取有限阶数, 因而选取最优的展开项数也非常关键. 对此, 本文提出采用双面测量遍历法来确定, 该方法除全息面之外, 还需在全息面与声源之间对另一个面  $\Gamma_2$  进行测量, 设

该面上测得的复声压数据为  $\tilde{p}(\Gamma_2)$ . 该方法的具体实施步骤为: 首先根据全息面上测得的复声压信息, 对应每一个球面波源展开项数  $J$ , 采用(15)式重构出对应的展开系数  $C_j$ , 并计算出面  $\Gamma_2$  上的复声压为  $p_j(\Gamma_2)$ , 其中  $J$  从 1 开始遍历; 进而, 根据面  $\Gamma_2$  上实际测量声压幅值与其计算值之间的相对误差取最小来确定最优的展开项数  $J_{op}$ . 该问题可以描述为以下形式,

$$\min_j \left( \frac{\|p_j(\Gamma_2)\| - \|\tilde{p}(\Gamma_2)\|}{\|\tilde{p}(\Gamma_2)\|} \times 100\% \right). \quad (26)$$

实际所采用的各阶球面波源展开系数  $C$  是展开项数为  $J_{op}$  时重构获得的结果.

### 2.4 误差敏感性分析

上述球面波源的展开系数的求解问题实际上是属于数学逆问题的范畴. 与其他逆问题相似, 在球面波源展开系数的重构过程中, 实际测量误差会被放大, 从而严重影响所求结果的精度. 下面将对声源表面法向振速对测量误差的敏感性进行分析. 首先设全息面上包含误差干扰的实际测量声压  $\tilde{p}_h$  为

$$\tilde{p}_h = p_{hr} + p_{he}, \quad (27)$$

式中,  $p_{hr}$  为全息面上理论声压列向量;  $p_{he}$  为声压测量误差项. 将(27)式代入(15)式, 则此时各阶球面波源的展开系数  $\tilde{C}$  可以表示为

$$\tilde{C} = \Psi_{hp}^+ \tilde{p}_h = \Psi_{hp}^+ p_{hr} + \Psi_{hp}^+ p_{he}, \quad (28)$$

式中,  $\Psi_{hp}^+ p_{hr}$  为重构展开系数的理论值项;  $\Psi_{hp}^+ p_{he}$  为其误差干扰项. 由(21)式可知, 此时预测所得声源表面法向振速为

$$\tilde{v}_{nS} = \Psi_{Sv} \tilde{C} = \Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ \tilde{p}_h = \Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_{hr} + \Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_{he}, \quad (29)$$

式中,  $\Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_{hr}$  为预测声源表面法向振速理论值项;  $\Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_{he}$  为其误差项. 令

$$(v_{nS})_e = \Psi_{Sv} C_e = \Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+ p_{he} = T p_{he}. \quad (30)$$

由矩阵范数不等式可知

$$\begin{aligned} \|(v_{nS})_e\| \quad \|T\| \|p_{he}\| &= \|T\| \|p_{he}\| \cdot \frac{\|T^+\|}{\|T\|} \\ &= \text{cond}(T) \cdot \frac{\|p_{he}\|}{\|T^+\|}. \end{aligned} \quad (31)$$

由此可得预测声源表面法向振速的相对误差为

$$\begin{aligned} \frac{\|(v_{nS})_e\|}{\|\tilde{v}_{nS}\|} &= \text{cond}(T) \cdot \frac{\|p_{he}\|}{\|T^+\| \cdot \|\tilde{v}_{nS}\|} \\ &= \text{cond}(T) \cdot \frac{\|p_{he}\|}{\|T^+ \tilde{v}_{nS}\|} \\ &= \text{cond}(T) \cdot \frac{\|p_{he}\|}{\|\tilde{p}_h\|}. \end{aligned} \quad (32)$$

式中,  $\text{cond}(T) = \|T\| \|T^+\| = \sigma_1/\sigma_r$ , 其中  $\sigma_r$  为矩阵  $T$  中分解出的最小奇异值. (32)式表明, 根据全息面上测得的复声压数据预测声源表面法向振速时, 预测结果对测量误差非常敏感, 全息面上声压测量误差将以  $\text{cond}(\Psi_{Sv} \Psi_{hp}^+)$  的倍数放大, 因而在求解过程中必须采取措施抑制误差的影响.

### 2.5 正则化处理

正则化处理方法的基本思想是对(14)式中传递矩阵的各奇异值分解项进行加权处理, 控制其中对测量误差非常敏感而有对重建结果贡献小的项的影响. 对于上述问题, 加上滤波系数  $f_j$  后, 所得的展开系数正则化解为

$$C_{\text{reg}} = \sum_{j=1}^J f_j \frac{u_j^H p_h}{\sigma_j} v_j. \quad (33)$$

根据滤波系数的选取方法不同, 正则化方法可以分为不同的种类. 当滤波系数为

$$\begin{cases} f_j = 1, & \sigma_j > \alpha \sigma_1, \\ f_j = 0, & \sigma_j < \alpha \sigma_1 \end{cases} \quad (34)$$

时, 称其为截断滤波正则化法<sup>[10]</sup>, 其中  $\alpha$  为截断系数比. 当滤波系数为

$$f_j^{(k)} = 1 - (1 - \beta \sigma_j^2)^k. \quad (35)$$

时, 称其为Landweber反复正则化法<sup>[20]</sup>, 其中  $k$  为反复计算的次数,  $f_j^{(k)}$  为第  $k$  次计算时的滤波系数,  $\beta$  为收敛因子. 当滤波系数为

$$f_j = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}. \quad (36)$$

时, 称其为标准Tikhonov正则化方法<sup>[21]</sup>, 其中  $\lambda$  为正则化系数.

对于上述正则化方法, 截断系数比  $\alpha$ 、反复次数  $k$  以及正则化系数  $\lambda$  直接控制着重建结果对误差扰动的影响, 因而准确地选取这些系数也非常关键. 到目前为止, 还没有一种最好的选取方法, 根据具体情

况的不同,可以采用信噪比法则<sup>[10]</sup>、Morozov离差原理法<sup>[22]</sup>、L曲线准则<sup>[23]</sup>或广义交叉校验法<sup>[24]</sup>等来选取。

### 3 基于球面波源边界点法的 NAH

#### 3.1 球面波源边界点法<sup>[18]</sup>

分布源边界点法的关键是通过分布在声源内部的一系列特解源(如点源、面源或体源)所构造的表面声压、表面法向振速、场压等特解来间接获取各场量<sup>[25]</sup>。设声源表面法向振速特解矩阵为  $v_{nS}^*$ , 表面声压特解矩阵为  $p_S^*$ , 声场中某测量面上的声压特解矩阵为  $p_f^*$ , 则声源表面声压与表面法向振速之间的传递关系以及某测量面上声压与表面法向振速之间的传递关系可以分别描述为以下形式,

$$p_S = A_S^{-1} B_S v_{nS} = p_S^* (v_{nS}^*)^+ v_{nS}, \quad (37)$$

$$p_f = G_{fv} v_{nS} = p_f^* (v_{nS}^*)^+ v_{nS}. \quad (38)$$

式中,  $A_S^{-1} B_S$  为声源表面声压与表面法向振速之间的传递矩阵,  $G_{fv}$  为声源表面法向振速与测量面上声压之间的传递矩阵。

球面波源边界点法则结合了分布源边界点法和球面波源的优点,它采用不同阶的球面波源作为特解源形成特解来构造各传递矩阵,其中,所有特解源均位于声源内部同一位置(如图2所示,所有球面波源都位于  $O$  点处),且特解源的个数  $J$  小于等于声源表面结点的个数  $N$ 。因而该方法有效地解决了分布源边界点法中对特解源的位置有要求而又只能由经验公式来确定的问题。

此时声源的表面声压特解矩阵  $p_S^*$ 、表面法向振速特解矩阵  $v_{nS}^*$ 、任意场点  $r$  处的声压特解行向量  $p_f^*(r)$  以及场点  $r$  处的质点振速特解行向量  $v_f^*(r)$  均由球面波源构造而成,即

$$p_S^* = \begin{bmatrix} \psi_1^*(r_{01}) & \psi_2^*(r_{01}) & \cdots & \psi_J^*(r_{01}) \\ \psi_1^*(r_{02}) & \psi_2^*(r_{02}) & \cdots & \psi_J^*(r_{02}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_1^*(r_{0N}) & \psi_2^*(r_{0N}) & \cdots & \psi_J^*(r_{0N}) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$v_{nS}^* = \begin{bmatrix} v_1^*(r_{01}) & v_2^*(r_{01}) & \cdots & v_J^*(r_{01}) \\ v_1^*(r_{02}) & v_2^*(r_{02}) & \cdots & v_J^*(r_{02}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^*(r_{0N}) & v_2^*(r_{0N}) & \cdots & v_J^*(r_{0N}) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$p_f^*(r) = [\psi_1^*(r) \quad \psi_2^*(r) \quad \cdots \quad \psi_J^*(r)], \quad (41)$$

$$v_f^*(r) = [v_1^*(r) \quad v_2^*(r) \quad \cdots \quad v_J^*(r)], \quad (42)$$

式中,  $\psi_{ij}^*(r_0)$  和  $v_{ij}^*(r_0)$  分别对应  $(n, m)$  阶球面波源声压  $p_{mn}^*$  和质点振速  $v_{mn}^*$  在第  $i$  个表面结点处的取值。所取球面波源的总数  $J$  通过 2.3 节相同的球面波源展开项数的选取方法来确定。

#### 3.2 声源的重建和声场的预测

采用球面波源边界点实现 NAH 的过程与常规的分布源边界点法相似。首先根据(38)式构造声源表面法向振速与全息面上声压之间的传递关系为

$$p_h = G_{hv} v_{nS} = p_h^* (v_{nS}^*)^+ v_{nS}, \quad (43)$$

式中,  $G_{hv}$  为声源与全息面之间的振声传递矩阵。

对于(43)式,通过对传递矩阵  $G_{hv}$  进行奇异值分解并求其广义逆,可以唯一确定表面法向振速  $v_{nS}$ , 即

$$v_{nS} = G_{hv}^+ p_h. \quad (44)$$

预测声源表面声压为

$$p_S = p_S^* (v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+ p_h, \quad (45)$$

根据(41)式所构造的任意场点  $r$  处的声压特解行向量  $p_f^*(r)$ , 可以预测场点  $r$  处的声压为

$$p_f(r) = G_{fv}(r) v_{nS} = p_f^*(r) (v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+ p_h. \quad (46)$$

同理,根据(42)式构造的场点  $r$  处的质点振速特解行向量  $v_f^*(r)$ , 可预测场点  $r$  处的质点振速为

$$v_f(r) = v_f^*(r) (v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+ p_h. \quad (47)$$

另外,实际声源的远场指向性可以通过(9)式中  $J$  阶球面波源的指向性、表面法向振速特解以及重建的声源表面法向振速联合表示为

$$D(\theta, \phi) = [D_1(\theta, \phi) \quad D_2(\theta, \phi) \quad \cdots \quad D_J(\theta, \phi)] (v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+ p_h, \quad (48)$$

$$D_j(\theta, \phi) = \frac{(-i)^{n+1}}{k} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (49)$$

式中,  $D_j(\theta, \phi)$  为第  $j$  阶球面波源的指向性因子。

对于上述重建过程,采用 2.4 节类似的误差敏感性分析方法,可得重建表面法向振速的相对误差为

$$\frac{\| (v_{nS})_e \|}{\| \tilde{v}_{nS} \|} \text{cond}(G_{hv}) \cdot \frac{\| p_{he} \|}{\| \tilde{p}_h \|}. \quad (50)$$

(50)式表明,在重建过程中,测量误差将以  $\text{cond}(G_{hv})$  倍数放大,因而同样需要采取 2.5 节所述的正则化处理方法。

### 4 上述两种方法的比较

实际上,上述两种方法在原理上具有很大的相

似性, 其中全息面、源面以及声场中任意点处的声压和质点振速的特解是相互对应的, 表面法向振速特解矩阵  $v_{nS}^*$  等价于  $\Psi_{Sv}$ , 表面声压特解矩阵  $p_S^*$  等价于  $\Psi_{Sp}$ , 全息面上的声压特解矩阵  $p_h^*$  等价于  $\Psi_{hp}$ , 任意场点  $r$  处声压特解  $p_f^*(r)$  和质点振速特解矩阵  $v_f^*(r)$  分别等价于  $\Psi_{fv}(r)$  和  $\Psi_{fp}(r)$ . 但是, 它们在本质上却存在一定的差别: 基于球面波源叠加法的 NAH 是首先重构出各阶球面波源的展开系数, 再对源面及整个声场进行预测; 而基于球面波源边界点法的 NAH 则是直接重建出声源的表面法向振速, 再通过表面法向振速预测整个声场. 两者根本的区别就是重建求解的过程不同, 下面将对两种方法所获得的声源表面法向振速进行比较, 并从理论上说明两者的异同点.

细观(45)~(48)式与(16)、(18)、(20)和(24)式, 两者不同之处在中间部分. 如果能够满足

$$(p_h^*)^+ = (v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+, \quad (51)$$

则上述等式等价.

而对于声源表面法向振速(21)和(44)式, 如果能够满足

$$G_{hv}^+ = v_{nS}^* (p_h^*)^+, \quad (52)$$

则该两等式等价.

由此可知, 两种方法完全等价的条件是使(51)和(52)式同时成立.

下面首先对(52)式进行转换, 在(52)式两边同时乘上  $(v_{nS}^*)^+$ , 则

$$(v_{nS}^*)^+ G_{hv}^+ = (v_{nS}^*)^+ v_{nS}^* (p_h^*)^+. \quad (53)$$

显然, 要使(51)和(53)式同时成立, 等价于必须满足使

$$(v_{nS}^*)^+ v_{nS}^* = I_J. \quad (54)$$

则上述两种方法完全等价的必要条件转化为使(54)和(52)式同时成立. 下面将首先给出列满秩矩阵和行满秩矩阵的定义以及一个广义逆矩阵的基本性质定理<sup>[26]</sup>, 并分析(54)式成立的条件.

定义 1: 设矩阵  $A \in C^{m \times n}$ , 如果  $\text{rank}(A)=n$ , 则称  $A$  为列满秩矩阵; 如果  $\text{rank}(A)=m$ , 则称  $A$  为行满秩矩阵.

定理 1: 设矩阵  $A \in C^{m \times n}$ , 则使  $A^+ A = I_n$  成立的充分必要条件是  $\text{rank}(A)=n$ .

由定理 1 可知, 要使(54)式成立, 矩阵  $v_{nS}^*$  的秩必

须等于球面波源的阶数  $J$ , 即矩阵  $v_{nS}^*$  必须为列满秩矩阵.

在两种方法中, 分布在声源内部的球面波源是相互正交的, 因而可以保证其列向量相互正交, 但是要使  $v_{nS}^*$  为列满秩矩阵, 还得保证各表面结点处的特解不能由其他结点处特解线性表示, 至少应有  $J$  个结点处特解线性无关. 显然, 这是做不到的. 由此可知, 当且仅当  $v_{nS}^*$  为列满秩矩阵时, (54)式才成立.

由上述分析两种方法完全等价的条件可知, 不仅要使(54)式成立, 而且还必须使(52)式成立. 下面将进一步分析(52)式成立的条件.

将(43)式中  $G_{hv}$  代入(52)式, 则有

$$[p_h^* (v_{nS}^*)^+]^+ = v_{nS}^* (p_h^*)^+. \quad (55)$$

由(55)式可知, 该等式实际上是矩阵求逆的乘法公式  $(AB)^+ = B^+ A^+$ , 根据矩阵计算定理, 如果矩阵  $A$  和  $B$  为同阶方阵且皆可逆, 则乘积矩阵  $AB$  亦可逆, 且乘法公式  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$  成立. 此定理对于可逆矩阵成立, 但是对于广义逆, 乘法公式  $(AB)^+ = B^+ A^+$  一般来说是不成立的, 它需要满足一定的附加条件. 下面将证明在矩阵  $v_{nS}^*$  为列满秩矩阵时, 即等式(54)成立时, 乘法公式是否成立, 或者是否还需要一些附加条件. 首先给出以下两个定理<sup>[26,27]</sup>, 并在其基础上推出一个引理.

定理 2: 设矩阵  $A \in C^{m \times n}$ , 则使  $A A^+ = I_m$  成立的充分必要条件是  $\text{rank}(A) = m$ .

定理 3: 乘法公式  $(AB)^+ = B^+ A^+$  成立的充分必要条件是:

$$A^+ A B B^H A^H = B B^H A^H, \quad (56)$$

$$B B^+ A^H A B = A^H A B, \quad (57)$$

同时成立.

根据定理 1, 2 和 3 可以推出以下引理:

引理 1: 设  $A \in C^{m \times r}$ ,  $B \in C^{r \times n}$ , 则  $A$  为列满秩矩阵,  $B$  为行满秩矩阵是  $AB$  满足乘法公式  $(AB)^+ = B^+ A^+$  的充分必要条件.

证明: 由定理 1 可知,  $A$  为列满秩矩阵, 则满足

$$A^+ A = I_r. \quad (58)$$

由定理 2 可知, 如果  $B$  为行满秩矩阵, 则满足

$$B B^+ = I_r. \quad (59)$$

显然, (58)式等价于(56)式, (59)式等价于(57)式. 即(58)和(59)式同时成立亦为乘法公式  $(AB)^+ = B^+ A^+$

成立的充分必要条件. 则引理 1 得证.

由(54)式成立的必要条件可知,  $v_{nS}^*$  为列满秩矩阵. 对  $v_{nS}^*$  求广义逆, 则  $(v_{nS}^*)^+$  为行满秩矩阵, 显然此时可以保证(59)式成立. 由引理 1 可知, 如果要使  $p_h^*(v_{nS}^*)^+$  满足乘法公式, 除了  $(v_{nS}^*)^+$  要为行满秩矩阵外,  $p_h^*$  还必须为列满秩矩阵.

与  $v_{nS}^*$  相同, 也不能保证  $p_h^*$  为列满秩矩阵. 由此可知, 当且仅当  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  均为列满秩矩阵时, (52)式才成立.

对于两种方法实现声源重建时对测量误差的敏感性, 第一种方法误差是以  $\text{cond}(v_{nS}^*(p_h^*)^+)$  倍数放大, 第二种方法是以  $\text{cond}((p_h^*(v_{nS}^*)^+)^+)$  倍数放大, 显然同样仅当  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  均为列满秩矩阵时, 两种方法对误差的敏感性才相同.

总之, 在实现声全息问题时, 球面波源边界点法和球面波源叠加法是不完全等价的, 当且仅当  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  均为列满秩矩阵时, 两者等价关系才成立.

此外, 两种方法还有一个关键的不同点, 那就是正则化处理过程的不同. 由 2.5 节正则化处理过程可知, 正则化是在求解逆问题时进行的, 也就是说, 采用球面波源叠加法实现 NAH 时, 其正则化处理是用来控制测量误差对各阶球面波源权重系数  $C$  的影响, 并找到较好的一组展开系数  $C_{\text{reg}}$ ; 实际上, 由(21)和(33)式可知, 最终所获得的表面法向振速为

$$v_{nS} = \Psi_{Sv} C_{\text{reg}} = \Psi_{Sv} \sum_{j=1}^J f_j \frac{u_j^H p_h}{\sigma_j} v_j. \quad (60)$$

由(60)式可知,  $v_{nS}$  不仅与  $\Psi_{hp}$  的奇异值分解项有关系, 而且与  $\Psi_{Sv}$  也有关系. 而 2.5 节正则化处理仅对  $\Psi_{hp}$  部分影响加以控制, 而忽视了  $\Psi_{Sv}$  部分的影响, 因而此时的求解过程是一个间接的过程, 根据所获得的较好的一组展开系数  $C_{\text{reg}}$ , 并不一定能使获得的声源表面法向振速也为较好的解, 这一点对于多源混合声场的重建尤为明显, 后面将通过实验进行说明.

由 3.2 节可知, 采用球面波源边界点法实现 NAH 时, 其求逆过程是对声源表面法向振速与全息面上声压之间的传递矩阵进行的, 此时所获得的声源表面法向振速为

$$v_{nS} = (v_{nS})_{\text{reg}} = \sum_{j=1}^N \tilde{f}_j \frac{\tilde{u}_j^H p_h}{\tilde{\sigma}_j} \tilde{v}_j, \quad (61)$$

式中,  $\tilde{f}_j$  为滤波系数,  $\tilde{u}_j$  和  $\tilde{v}_j$  为传递矩阵  $G_{hv}$  的奇异值分解项,  $\tilde{\sigma}_j$  为其奇异值. 由(61)式可知, 此时正则化处理所获得较优的解直接为声源表面法向振速, 即能够保证所获得的声源表面法向振速为较优解.

## 5 实验验证

为了验证上述两种方法等价成立条件的正确性以及采用正则化方法时球面波源边界点法的优越性, 下面分别选取半自由声场中单个音箱源和两个相干的音箱源作为实验研究对象, 对采用上述两种方法获得的结果与实际结果进行比较研究.

### 5.1 半自由声场单源实验

在半自由声场中, 由于存在地面的反射, 因而无论采用那一种方法, 首先都必须进行半自由声场处理<sup>[16]</sup>. 对于球面波源叠加法, 全息面和预测面上声压和质点振速特解矩阵均是由实源和像源内部分布的特解源所构造的特解矩阵组合而成, 通过对全息面上组合声压特解矩阵求广义逆, 重构出各阶球面波源的展开系数, 并进一步根据重构的展开系数重现整个声场; 对于球面波源边界点法, 声源表面法向振速与全息面和预测面上声压以及质点振速之间的传递矩阵同样是由实源和虚源组合而成, 通过对组合传递矩阵求广义逆, 直接重建声源表面法向振速, 并进一步预测整个声场.

如图 3 所示, 实验所选音箱源的结构尺寸为 0.14 m × 0.15 m × 0.32 m, 其中音箱表面圆形纸盘中心与音箱顶面的距离为 0.185 m, 音箱左右两边对称分布. 实验中选取的其他测量参数为: 全息面为平行于音箱前表面的 1 m × 1 m 的平面, 与音箱前表面的距离为 0.2 m, 其中心距离地面的高度为 1.3 m, 且对准音箱上扬声器的圆盘中心; 全息面上均匀地分布 21 × 21 个测点; 音箱外表面上共分布 294 个结点, 其结点分布如图 3 所示; 所有的球面波源均位于图 3 所示坐标原点  $O$  处; 音箱所播声音为 400 Hz 单频声.

首先需要确定球面波源的最佳展开项数, 根据 2.3 节所述方法, 在全息面以外选取参考面  $\Gamma_2$  为  $\{x = 0.1 \text{ m}, -0.1 \text{ m} \quad y = 0.1 \text{ m}, -0.1 \text{ m} \quad z = 0.15 \text{ m}\}$ , 参考面内均匀地分布 5 × 6 个测点. 此时采用基于球

面波源叠加法的 NAH 预测所得参考面上声压与其测量值之间的相对误差随球面波源展开项数的分布如图 4 所示. 图中曲线呈现盆形分布, 由此选取最优的展开项数  $J_{op}$  为 14, 此时相对误差为 2.891%. 当展开项数为 15, 16 和 17 时, 相对误差均小于 3%, 因而展开项数也可以在这四个数中选择. 本实验中选为 14. 此时表面法向振速特解矩阵  $v_{nS}^*$  的阶数为  $294 \times 14$ , 全息面声压特解矩阵  $p_h^*$  的阶数为  $441 \times 14$ , 根据计算,  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  的秩均为 14, 因而两者均为列满秩矩阵. 根据第 4 节结论, 如果不采取任何正则化措施, 上述两种方法等价, 则两种方法所选取的最优展开项数应相同, 此处均选为 14.

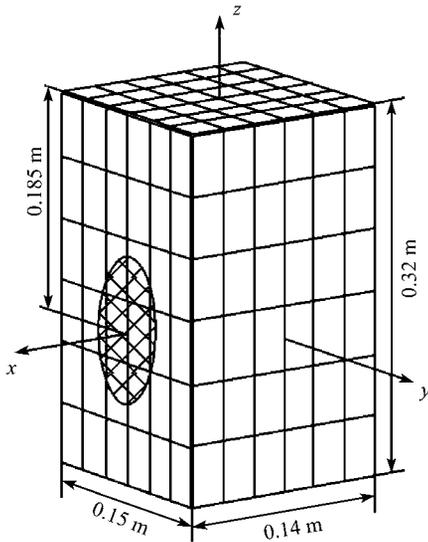


图 3 音箱源结构尺寸及表面结点分布图

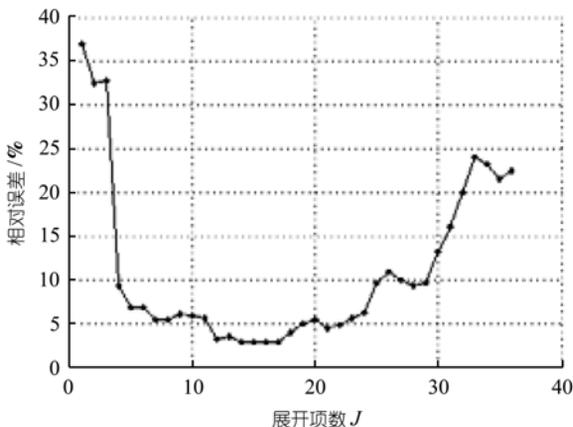


图 4 预测声压的相对误差随球面波源展开项数分布图

在不采用任何正则化处理时, 采用球面波源叠加法和球面波源边界点法所得声源表面法向振速幅值分布如图 5 所示, 图中 A 为音箱的顶部, B 为前表面, C 为右侧表面, D 为后表面, E 为左侧表面, F 为底面. 显然两种方法所获得的结果完全一致, 这也验证了在  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  均为列满秩矩阵, 且不采用任何正则化处理方法时, 两种方法等价的结论. 另外, 图 5 所示音箱源纸盘振动的位置均在音箱的背面, 显然这与实际结果不符, 这种结果正是测量误差被放大而引起的, 因而必须对重建过程进行正则化处理, 本文均采用标准 Tikhonov 正则化方法.

在正则化之前, 首先需要选取合适的正则化系数, 图 6(a)和(b)分别为采用球面波源叠加法和球面波源边界点法时的 L 曲线分布图. 当采用球面波源叠加法时, L 曲线一直在下滑, 拐角不明显, 很难直接选取最优的正则化系数, 本实验中选取正则化系数为 0.1; 当采用球面波源边界点法时, L 曲线的拐角非常明显, 在拐角的右边, 曲线较为平滑, 说明此时解范数较为稳定, 在拐角上端, 曲线直线上升, 说明此时残余范数比较稳定, 在此选取正则化系数为 1.1.

根据上述选择的正则化系数, 对重建求逆的过程进行正则化处理, 采用两种方法计算所得声源表面法向振速幅值分布如图 7 所示, 图 7(a)为正则化处理后采用球面波源叠加法预测所得表面法向振速幅值展开图, 图 7(b)为正则化处理后采用球面波源边界点法重建所得表面法向振速幅值展开图. 从两图的显示结果分析可知, 图 7(b)所示正则化处理后的振速分布已经将图 5 给出的错误信息修正过来, 它准确地给出了音箱表面纸盘振动的位置; 而图 7(a)则显示在音箱的前后表面均有振源存在, 显然这与实际不符. 由此可知, 在采用正则化处理方法时, 球面波源边界点法不仅在正则化系数的选取时体现出较大的优势, 而且其重建结果要比球面波源叠加法更佳. 显然, 这与第 4 节的结论是一致的.

### 5.2 半自由声场多源实验

由于实验仍是在 5.1 节相同的半消声室中进行, 因而必需采取类似的半自由声场处理方法. 另外, 由于声场中同时存在多个相干的声源, 因而全息面上测得的声压为多个声源辐射声压叠加而成, 则无论是采用上述那一种方法实现声场的全息变换, 还必须采用多源处理方法<sup>[17]</sup>, 本文将直接采用单面测量组合法.

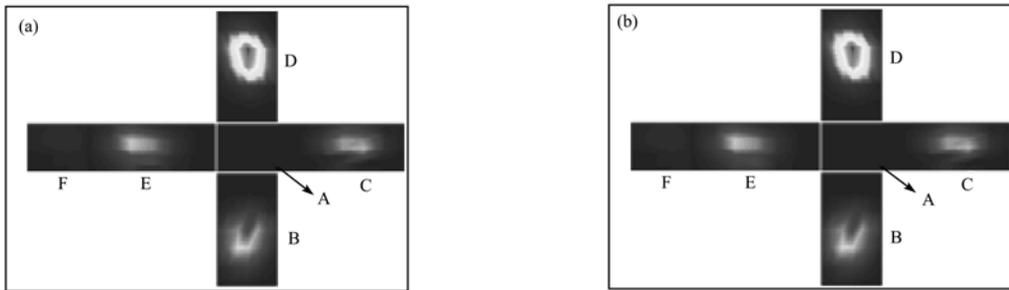


图5 采用球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)重建所得声源表面法向振幅分布展开图

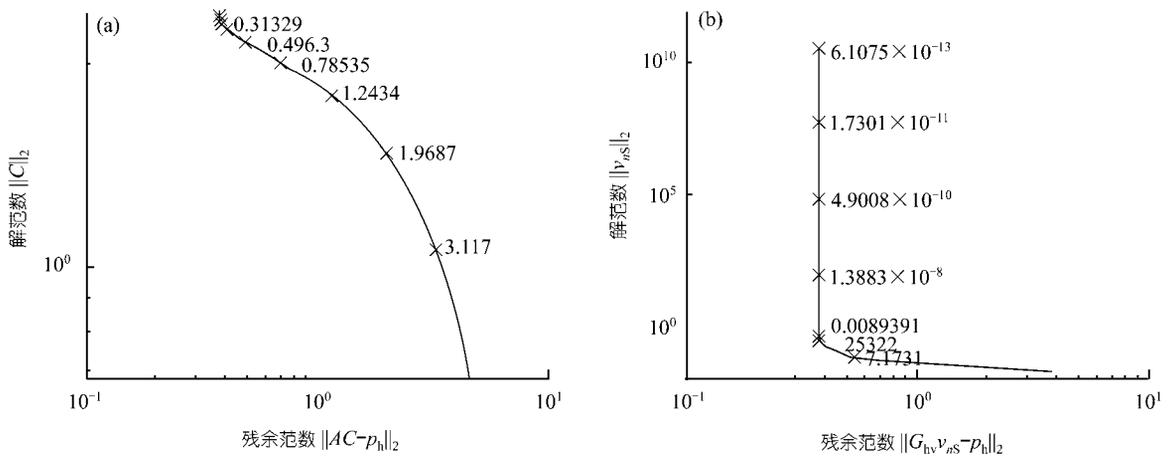


图6 球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)对应的L曲线分布

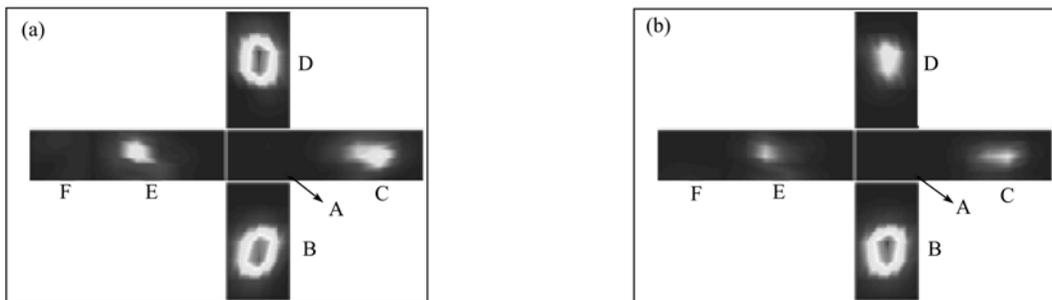


图7 正则化后采用球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)重建所得声源表面法向振幅分布展开图

实验声源由两个步步高家庭影院用组合扬声器系列后置环绕音箱组成,如图8所示,音箱的结构尺寸均为  $0.14\text{ m} \times 0.15\text{ m} \times 0.32\text{ m}$ ,扬声器圆盘中心距离音箱上表面的距离为  $0.135\text{ m}$ ,两个音箱源平行放置,两音箱表面扬声器圆盘中心相距为  $0.4\text{ m}$ ,距离音箱地面的高度为  $1.32\text{ m}$ ,分析过程中每个音箱外表面上均均匀地分布  $294$  个结点,对于音箱表面拐角处采用稍离结点法处理.声源为  $630\text{ Hz}$  的单频声.实验

中,位于  $y$  轴负方向上的音箱源所对应的球面波源都位于坐标点  $(0, -0.2, 0)$  处,位于  $y$  轴正方向上的音箱源所对应的球面波源都位于坐标点  $(0, 0.2, 0)$  处.

与单源实验相同,首先需要确定最佳的球面波源展开项数,根据2.3节所示方法,在全息面以外选取参考面  $\Gamma_2$  为  $\{x = 0.35, -0.5\text{ m} < y < 0.5\text{ m}, -0.5\text{ m} < z < 0.5\text{ m}\}$ ,参考面内均匀地分布  $21 \times 21$  个测点.此时采用基于球面波源叠加法的NAH预测所得

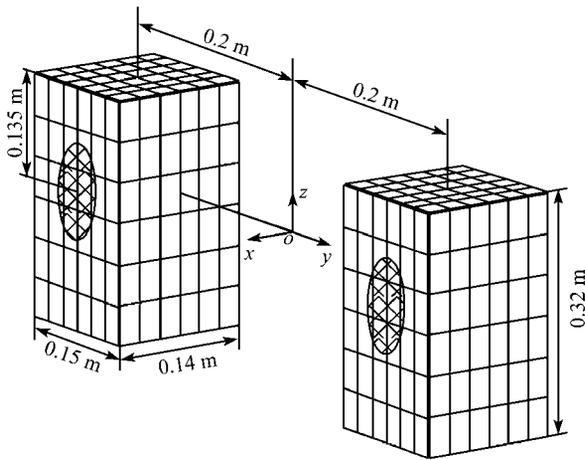


图 8 声源结构尺寸和表面结点分布图

参考面上声压与其测量值之间的相对误差随球面波源展开项数的分布如图 9 所示. 图中曲线同样呈现盆形分布, 由此选取最优的展开项数  $J_{op}$  为 9, 此时的相对误差为 8.24%, 当展开项数为 14 时, 相对误差为 9.12%, 因而展开项数也可以为 14. 本实验中, 展开项数选为 14. 此时表面法向振速特解矩阵  $v_{nS}^*$  的阶数为  $588 \times 14$ , 全息面声压特解矩阵  $p_h^*$  的阶数为  $441 \times 14$ . 根据计算,  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  的秩均为 14, 因而两者均为列满秩矩阵. 根据第 4 节结论, 如果不采取任何正则

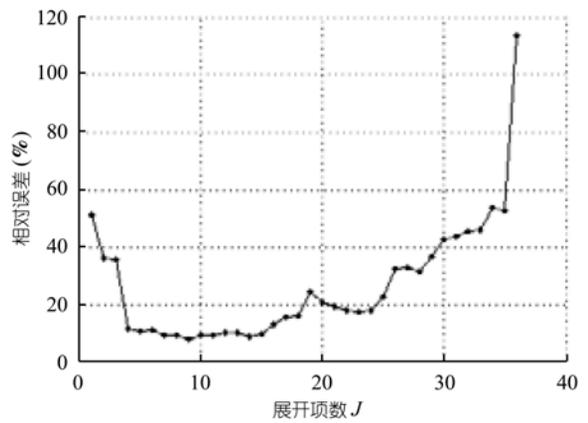


图 9 预测声压的相对误差随球面波源展开项数分布图

化措施, 上述两种方法等价, 则两种方法所选取的最优展开项数应相同, 本实验均选为 14.

在不采用任何正则化处理时, 两种方法重建所得声源表面法向振速如图 10 所示. 图 10(a1)和(b1)为 y 轴负方向上的音箱源表面法向振速幅值分布, 图 10(a2)和(b2)为 y 轴正方向上的音箱源表面法向振速幅值分布; 图 10(a1)和(a2)为球面波源叠加法重建的结果, 图 10(b1)和(b2)为球面波源边界点法重建的结果. 显然两种方法所获得的结果完全一致, 这进一步验证了在  $v_{nS}^*$  和  $p_h^*$  均为列满秩矩阵, 且不采用任何

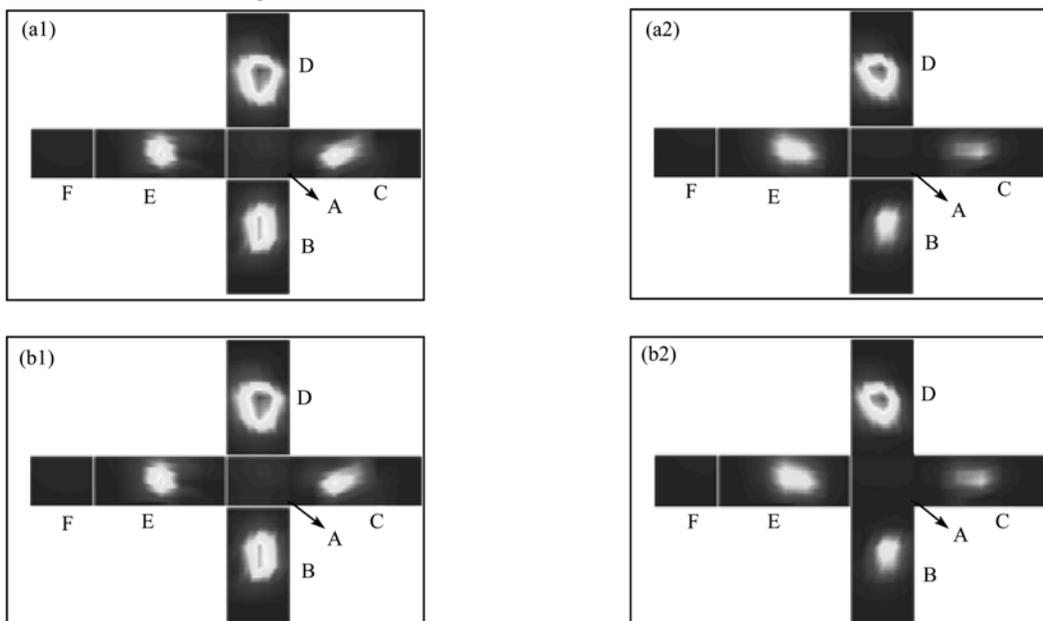


图 10 采用球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)重建所得声源表面法向振速幅值分布展开图

正则化处理方法时,两种方法等价的结论.但是,图10所显示的两个音箱纸盘振动的位置均在音箱的背面,显然这与实际结果不符,这种结果正是测量误差被放大而引起的,因而必须采用正则化处理,本实验仍采用标准 Tikhonov 正则化方法.

图11分别对应采用球面波源叠加法和球面波源边界点法时的L曲线分布图,与单源实验相似,当采用球面波源叠加法时,L曲线一直在下滑,很难直接选取最优的正则化系数,实验中选取正则化系数为0.06;当采用球面波源边界点法时,L曲线的拐角非

常明显,在此选取正则化系数为4.0.

根据上述选择的正则化系数,对重建求逆的过程进行正则化处理,采用两种方法计算所得的声源表面法向振速幅值分布如图12所示.图12(a1)和12(a2)为正则化处理后采用球面波源叠加法重建所得两声源表面法向振速幅值展开图,图12(b1)和12(b2)为正则化处理后采用球面波源边界点法重建所得表面法向振速幅值展开图.由图12(a1)和12(a2)显示结果可知,对于多源声场,当采用球面波源叠加法实现声源的重建时,即使是采用正则化处理仍然不能获

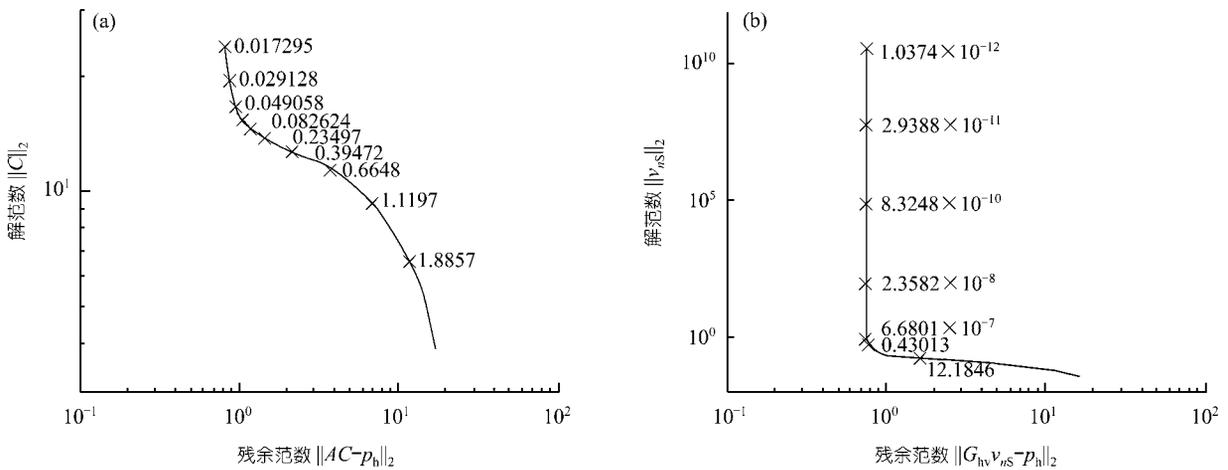


图11 球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)对应的L曲线分布

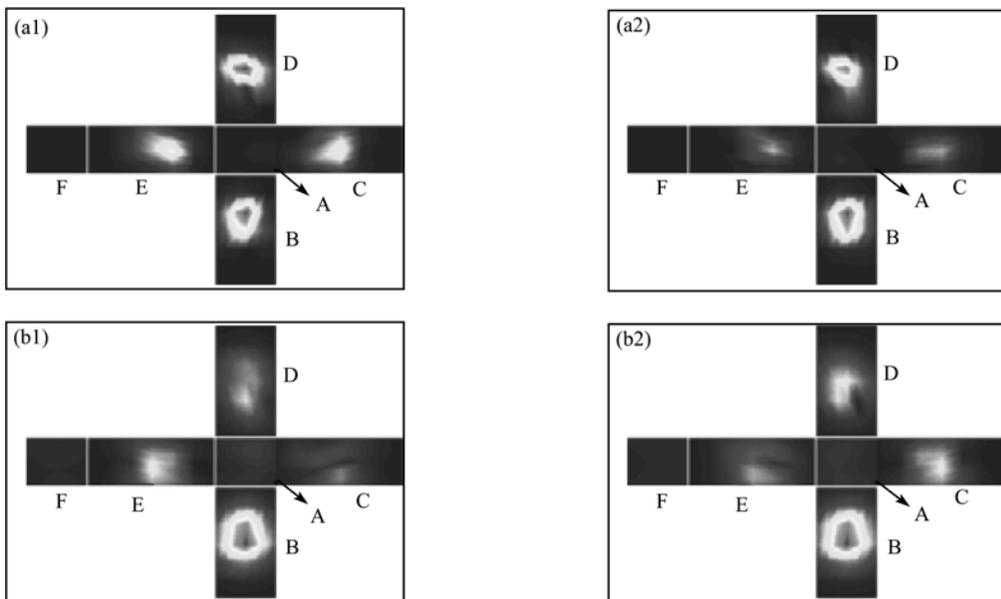


图12 正则化后采用球面波源叠加法(a)和球面波源边界点法(b)重建所得两声源表面法向振速幅值分布展开图

得很好的结果, 由重建的声源表面法向振速信息不能准确地给出了音箱表面纸盘振动的位置; 由图 12(b1)和 12(b2)可知, 当采用球面波源边界点法实现声源的重建时, 从正则化后重建的表面法向振速信息可以非常清晰地给出纸盘振动的位置. 上述结论进一步验证了在采用正则化处理方法时, 球面波源边界点法较球面波源叠加法优越的结论.

## 6 结论

(1) 建立了采用球面波源叠加法实现声场全息重建和预测的数学模型, 提出了一种最优球面波源展开项数的确定方法——双面测量遍历法, 分析了重建结果对测量误差的敏感性, 并对其正则化过程进行了剖析.

(2) 鉴于球面波源叠加法和球面波源边界点法均是以不同阶球面波源作为特解源, 因而它们之间具有一定的相似性, 文中对这两种方法进行了对比, 通过严格的数学证明阐明了两者之间的异同点: 当表面法向振速特解矩阵和全息面声压特解矩阵均为列满秩矩阵, 且不采取任何正则化措施时, 两种方法重建和预测的结果, 以及对误差的敏感性, 均是完全等价的; 在采取正则化方法时, 球面波源叠加法是间接获得声源的表面信息, 而球面波源边界点法则是直接获得声源的表面信息, 因而球面波源边界点法能获得更佳的结果.

(3) 对半自由声场中单音箱源和两个相干音箱源的实验研究, 进一步验证了球面波源叠加法和球面波源边界点法实现声场全息重建和预测时, 等价的条件, 以及球面波源边界点法的优越所在.

(4) 由于两种方法均是以球面波源近似实际声场, 对于细长形声源, 仍存在收敛性差的局限性, 因而寻找适用于所有类型声源的特解源将是下一步继续研究的工作.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号: 50275044)和高等学校博士学科点基金(批准号: 20020359005)资助项目.

## 参 考 文 献

- 1 Williams E G, Maynard J D, Skudrzyk E. Sound source reconstruction using a microphone array. *J Acoust Soc Am*, 1980, 68(1): 340~344
- 2 Williams E G, Maynard J D. Holographic imaging without the wavelength resolution limit. *Phys Rev Lett*, 1980, 45(7): 554~557[DOI]
- 3 Maynard J D, Williams E G, Lee Y. Nearfield acoustic holography I: Theory of generalized holography and development of NAH. *J Acoust Soc Am*, 1985, 78(4): 1395~1413
- 4 Veronesi W A, Maynard J D. Nearfield acoustic holography(NAH): Holographic reconstruction algorithms and computer imple-

- mentation. *J Acoust Soc Am*, 1987, 81(5): 1307~1322
- 5 Williams E G. Continuation of acoustic near-fields. *J Acoust Soc Am*, 2003, 113(3): 1273~1281[DOI]
- 6 Gardner K, Bernhard R J. A noise source identification technique using an inverse helmholtz integral equation method. *Tans. of ASME, Journal of Vib and Acoust Stress, Reliab Des*, 1988, 110: 84~90
- 7 Veronesi W A, Maynard J D. Digital holographic reconstruction of source with arbitrarily shaped surfaces. *J Acoust Soc Am*, 1989, 85(2): 588~598
- 8 Bai M R. Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *J Acoust Soc Am*, 1992, 92(2): 533~549
- 9 Kim B K, Ih J G. On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. *J Acoust Soc Am*, 1996, 100(5): 3003~3016
- 10 Williams E G, Brian H Houston. Interior near-field acoustical holography in flight. *J Acoust Soc Am*, 2000, 108(4): 1451~1463[DOI]
- 11 Wang Z, Wu S F. Helmholtz Equation-Least Squares Method for Reconstructing the Acoustic Pressure Field. *J Acoust Soc Am*, 1997, 102(4): 2020~2032[DOI]
- 12 Wu S F. On reconstruction of acoustic pressure fields using the Helmholtz equation least squares method. *J Acoust Soc Am*, 2000, 107: 2511~2522. [DOI]
- 13 Wu S F, Yu J. Reconstructing interior acoustic pressure field via Helmholtz equation least-squares method. *J Acoust Soc Am*, 1998, 104: 2054~2060[DOI]
- 14 Wu S F, Zhao X. Combined Helmholtz equation least squares (CHELS) method for reconstructing acoustic radiation. *J Acoust Soc Am*, 2002, 112(1): 179~188[DOI]
- 15 毕传兴, 陈剑, 陈心昭等. 分布源边界点法在声场全息重建和预测中的应用. *机械工程学报*, 2003, 39(8): 81~85
- 16 毕传兴, 陈心昭, 陈剑. 半自由声场的全息重建和预测实验研究. *物理学报*, 2004, 53(12): 4268~4276
- 17 毕传兴, 陈剑, 陈心昭. 基于分布源边界点法的多源声场全息重建和预测理论研究. *中国科学, E 辑*, 2004, 34(1): 111~120. [摘要] [PDF]
- 18 毕传兴, 陈心昭, 陈剑等. 正交球面波源边界点法及其在声全息中的应用. *科学通报*, 2004, 49(13): 1322~1331. [摘要] [PDF]
- 19 Williams E G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustic Holography*. London: Academic Press, 1999
- 20 Kim B K, J G Ih. Design of an optimal wave-vector filter for enhancing the resolution of reconstructed source field by near-field acoustical holography. *J Acoust Soc Am*, 2000, 107(6): 3289~3297[DOI]
- 21 Tikhonov A N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math*, 1963, 4: 1035~1038
- 22 Morozov V A. The error principle in the solution of operational equations by the regularization method. *USSR Comput Math Math Phys*, 1968, 8: 63~87
- 23 Hansen P C, O'Leary D P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J Sci Comput*, 1993, 14: 1487~1503[DOI]
- 24 Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 1979, 21: 215~223
- 25 Zhang S Y, Chen X Z. The Boundary point method for the calculation of exterior acoustic radiation problem. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 228(4): 761~772[DOI]
- 26 崔玉庭, 杨淑梅. 广义逆矩阵. 青岛: 青岛海洋大学出版社, 1990. 16
- 27 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用. 北京: 北京工业大学出版社, 1996. 90

(2004-10-20 收稿, 2005-01-26 收修改稿)