中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 10 期: 1219 ～ 1236
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

调和分析中的几何不等式

献给王斯雷教授 85 华诞

陈婷, 孙文昌

南开大学数学科学学院, 天津 300071
E-mail: t.chen@nankai.edu.cn, sunwch@nankai.edu.cn

收稿日期: 2018-04-03; 接受日期: 2018-05-22; 网络出版日期: 2018-10-09
国家自然科学基金 (批准号: 11525104 和 11761131002) 资助项目

摘要 几何不等式一直是分析、几何、方程、概率和组合学研究的热门内容之一, 而分数次积分不等式又在分析学中扮演重要角色. 因其在 Fourier 变换限制性猜想、Radon 变换和 k 平面变换等问题中发挥重要作用, 多年来一直备受分析学家们的高度关注. 本文简要回顾一些分数次积分不等式, 介绍经典几何极值不等式, 以及研究最优化问题的有用工具重排不等式; 重点介绍结合对称重排思想和竞争对称性方法在证明分数次积分不等式最优化函数中的应用. 本文还将回顾混合范数空间的基本性质, 并介绍其上的一些分数次积分不等式.

关键词 分数次积分算子 几何极值不等式 最优化函数 混合范数空间 混合弱范 累次弱范

MSC (2010) 主题分类 26D15, 42B20

1 引言

不等式是 Fourier 分析的基本工具, 最经典的结果有卷积型 Young 不等式和有关 L^p 函数 Fourier 变换估计的 Hausdorff-Young 不等式. 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数 f, 定义它的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}dy.$$

设 $1\leqslant p\leqslant 2$, 则有 Hausdorff-Young 不等式

$$\|\hat{f}\|_{p'}\leqslant\|f\|_p. \tag{1.1}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数 f 和 g, 定义它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

英文引用格式: Chen T, Sun W C. Geometric inequalities in harmonic analysis (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1219–1236, doi: 10.1360/N012018-00081

设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 满足 $1/r + 1 = 1/p + 1/q$, 由 Hölder 不等式可以得出 Young 不等式

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.2}$$

当 p' 是偶数时, Hausdorff-Young 不等式可由 Young 不等式得出; 当 $1 \leqslant p, q, r' \leqslant 2$ 时, Young 不等式可由 Hausdorff-Young 不等式得出, 参见文献 [1].

Beckner [1] 及 Brascamp 和 Lieb [2] 各自研究并得出 Young 不等式的最佳形式, 其中, Young 不等式最佳常数由 Beckner [1] 及 Brascamp 和 Lieb [2] 分别得到, 最佳形式的 Young 不等式等号成立的条件则由 Brascamp 和 Lieb [2] 得出.

定理 1.1 (参见文献 [3, 定理 4.2]) 设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 满足 $1/r + 1 = 1/p + 1/q$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f * g\|_r \leqslant (A_p A_q A_{r'})^n \|f\|_p \|g\|_q, \tag{1.3}$$

其中 $A_p = [p^{1/p}/(p')^{1/p'}]^{1/2}$, $1/p + 1/p' = 1$. 如果 $p, q, r' > 1$, 则 (1.3) 等号成立当且仅当 f 和 g 分别是下述 Gauss 函数:

$$f(x) = A \exp[-p'\langle x - a, J(x - a)\rangle - \mathrm{i}\langle k, x\rangle], \quad g(y) = B \exp[-q'\langle x - b, J(x - b)\rangle + \mathrm{i}\langle k, x\rangle],$$

其中 $A, B \in \mathbb{C}$, $a, b, k \in \mathbb{R}^n$, J 是任意实对称正定矩阵, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 n 维向量的内积.

此外, Beckner [1] 还给出了 Hausdorff-Young 不等式的最佳常数, 而最佳形式的 Hausdorff-Young 不等式等号成立的条件由 Lieb [4] 证明得出.

定理 1.2 (参见文献 [3, 定理 5.7]) 设 $1 < p < 2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leqslant C_p^n \|f\|_p, \tag{1.4}$$

其中 $C_p = [p^{1/p}/(p')^{1/p'}]^{1/2}$. 此外, (1.4) 等号成立当且仅当 f 是如下形式的 Gauss 函数:

$$f(x) = A \exp[\langle -x, Mx\rangle + \langle k, x\rangle],$$

其中 $A \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{C}^n$, M 是任意实对称正定矩阵.

除了 Young 不等式, 还有弱型 Young 不等式, 内容如下.

定理 1.3 (参见文献 [5, 定理 1.4.24]) 设 $1 < p, q, r < \infty$ 满足 $1/r + 1 = 1/p + 1/q$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且存在与 f 和 g 无关的有限常数 $K_{p,q,n}$, 使得

$$\|f * g\|_r \leqslant K_{p,q,n} \|f\|_p \|g\|_{q,\infty}. \tag{1.5}$$

由弱型 Young 不等式可以得出 Riesz 位势算子的有界性.

定理 1.4 (参见文献 [6, 第 5 章引理 1]) 设 $0 < \gamma < n$, $p > 1$ 且 $1 + 1/r = 1/p + \gamma/n$, 则

$$\|f * |\cdot|^{-\gamma}\|_r \leqslant C_{p,\gamma,n} \|f\|_p. \tag{1.6}$$

运用 Hölder 不等式和 Riesz 位势算子的有界性 (1.6) 可以得出分数次积分 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) |x - y|^{-\gamma} dx dy \leqslant C_{p,\gamma,n} \|f\|_p \|g\|_q, \tag{1.7}$$

其中 $p, q > 1$, $0 < \gamma < n$ 且 $\gamma/n = 2 - 1/p - 1/q$.

弱型 Young 不等式的最佳常数 $K_{p,q,n}$ 与 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最佳常数 $C_{p,\gamma,n}$ 关系如下 (参见文献 [3]):

$$K_{p,q,n}=\frac{1}{q'}\left(\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\right)^{1/q}C_{p,\gamma,n},\quad \gamma=\frac{n}{q}.$$

第 2 节将介绍研究 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式最优化函数的工具: 对称递减重排、球极投影和竞争对称性. 在此之前, 我们先回顾对称递减重排的定义及其基本性质.

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集, 定义它的对称重排 A^* 为中心在原点, 并且与 A 体积相等的开球, 即

$$A^*:=\{x:|x|<r\}\equiv B(0,r),$$

其中 $v_nr^n=|A|$, 这里 v_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是在无穷远处趋于零的可测函数, 定义 f 的对称递减重排 f^* 为

$$f^*(x):=\int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x)dt.$$

重排 f^* 具有以下基本性质:

(1) f^* 是非负的;

(2) f^* 径向对称递减, 即如果 $|x|=|y|$, 则 $f^*(x)=f^*(y)$; 如果 $|x|\leqslant|y|$, 则 $f^*(x)\geqslant f^*(y)$;

(3) f^* 的水平集是 $|f|$ 水平集的重排, 即

$$\{x:f^*(x)>t\}=\{x:|f(x)|>t\}^*,$$

因此, f 和 f^* 具有等测性, 即

$$|\{x:f^*(x)>t\}|=|\{x:|f(x)|>t\}|;$$

(4) 重排是保序的, 即如果非负函数 f 和 g 满足对所有 $x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\leqslant g(x)$, 那么对所有 $x\in\mathbb{R}^n$, $f^*(x)\leqslant g^*(x)$ 成立;

(5) 重排是保范的, 对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 有

$$\|f\|_p=\|f^*\|_p.$$

本文的结构如下: 第 2 节介绍经典的分数次积分不等式, 主要围绕 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及其多线性情形, 并介绍利用球极投影和竞争对称性找到分数次积分不等式的最优化函数; 第 3 节主要介绍各类重排不等式, 并利用对称递减重排不等式研究经典几何极值问题; 第 4 节介绍混合范数空间的性质并研究混合范数空间上的分数次积分不等式.

2　经典分数次积分不等式

Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式首次是由 Hardy 和 Littlewood [7,8] 给出的, Lieb [9] 及 Carlen 和 Loss [10,11] 分别证明了当 $p=q$ 时的最优化解和最佳常数. 然而, 当 $p\neq q$ 时, 最佳常数和最优化解还是未知的.

定理 2.1 设 $1 < p, q < \infty$, $0 < \gamma < n$ 且 $\gamma/n = 2 - 1/p - 1/q$, 则存在常数 $C_{p,\gamma,n} > 0$, 使得对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)|x-y|^{-\gamma} dxdy \right| \leqslant C_{p,\gamma,n} \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.1}$$

最佳常数满足

$$C_{p,\gamma,n} \leqslant \frac{n}{n-\gamma} \left(\frac{|S^{n-1}|}{n} \right)^{\gamma/n} \frac{1}{pq} \left(\left(\frac{\gamma/n}{1-1/p} \right)^{\gamma/n} + \left(\frac{\gamma/n}{1-1/q} \right)^{\gamma/n} \right).$$

如果 $p = q = 2n/(2n-\gamma)$, 那么最佳常数为

$$C_{p,\gamma,n} = \pi^{\gamma/2} \frac{\Gamma(n/2-\gamma/2)}{\Gamma(n-\gamma/2)} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right)^{\gamma/n-1}.$$

此时, (2.1) 等号成立当且仅当 $g = cf$, c 为常数, $f(x) = A(a^2 + |x-b|^2)^{-(2n-\gamma)/2}$, 其中 $A \in \mathbb{C}$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

重排不等式是处理最优化问题的常用分析工具. Riesz 重排不等式在研究 (2.1) 的最优化函数中起了关键作用, 最先由 Riesz [12] 给出. 此外, Lieb [13] 和 Burchard [14, 15] 分别研究了 Riesz 不等式等号成立的条件.

定理 2.2 (参见文献 [3, 定理 3.7]) 设 f、g 和 h 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 记

$$I(f,g,h) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y) dxdy,$$

那么,

$$I(f,g,h) \leqslant I(f^*, g^*, h^*). \tag{2.2}$$

如果 h 严格对称递减, 那么 (2.2) 中等号成立当且仅当存在某个 $z \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$f(x) = f^*(x-z), \quad g(y) = g^*(x-z). \tag{2.3}$$

由 Riesz 不等式 (2.2) 可以得出 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最小元是球对称的. Riesz 不等式还可以推导出 Brunn-Minkowski 不等式 [14]: 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集, 那么,

$$|A+B|^{1/n} \geqslant |A|^{1/n} + |B|^{1/n}. \tag{2.4}$$

现在介绍 $\mathbb{R}^n$ 到单位球面 $\mathbb{S}^n$ 的球极投影和竞争对称性. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到单位球面 $\mathbb{S}^n$ 的球极投影,

$$\mathcal{S}(x) = \left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right), \quad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

$\mathcal{S}$ 的逆映射为

$$\mathcal{S}^{-1}(s) = \left(\frac{s_1}{1+s_{n+1}}, \ldots, \frac{s_n}{1+s_{n+1}} \right), \quad \forall\, s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{S}^n. \tag{2.6}$$

我们将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数提升到单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上, 定义

$$F(s) = (\mathcal{S}^* f)(s) := |J_{\mathcal{S}^{-1}}(s)|^{1/p} f(\mathcal{S}^{-1}(s)), \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

其中 $J_{\mathcal{S}^{-1}}$ 是 $\mathcal{S}^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵. 计算得出, $ds=(\frac{2}{1+|x|^2})^2dx$,

$$|J_{\mathcal{S}}(x)|=\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2,\quad |J_{\mathcal{S}^{-1}}(s)|=\left(\frac{1}{1+s_{n+1}}\right)^n. \tag{2.8}$$

于是得到 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的共形不变特性.

引理 2.3　设 $f,g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p=2n/(2n-\gamma)$, 定义

$$F(s)=|J_{\mathcal{S}^{-1}}(s)|^{1/p}f(\mathcal{S}^{-1}(s)),\quad G(t)=|J_{\mathcal{S}^{-1}}(s)|^{1/p}g(\mathcal{S}^{-1}(s)),$$

那么,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y)|x-y|^{-\gamma}dxdy=\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}F(s)G(t)|s-t|^{-\gamma}dsdt,$$

并且

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{S}^n)}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad \|G\|_{L^p(\mathbb{S}^n)}=\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

因为 $H(f,g):=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y)|x-y|^{-\gamma}dxdy$ 是正定的, 为找其最佳常数, 只需考虑 $f=g$ 即可, 故最佳常数为

$$C_{n,\gamma}=\sup\left\{\frac{H(f,f)}{\|f\|_p^2}:f\in L^p,f\geqslant 0,f\not\equiv 0\right\}.$$

设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 按照定义 (2.7) 提升该函数到球面

$$F(s)=\left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{n/p}f(x).$$

考虑保持前 $n-1$ 个分量不变的 90° 旋转变换, 具体为 $D:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$,

$$D(s)=(s_1,\dots,s_{n-1},s_{n+1},-s_n),\quad \forall\ s=(s_1,\dots,s_n),$$

旋转变换 D 把 $\mathbb{S}^n$ 的北极点 $e_{n+1}=(0,\dots,0,1)$ 旋转至点 $e_n=(0,\dots,0,1,0)$. 定义

$$(D^*F)(s):=|J_{D^{-1}}(s)|^{\frac{1}{p}}F(D^{-1}(s))=F(D^{-1}(s)),$$

与 $\mathcal{S}^*$ 一样, D^* 也是保范的, $\|D^*F\|_p=\|F\|_p$.

最后再把球面上的函数 D^*F 按照定义 (2.7) 的逆过程回到 $\mathbb{R}^n$ 上得到 $(\mathcal{S}^*)^{-1}D^*F$, 它们具体的表达式为

$$(D^*F)(s)=F(D^{-1}(s))=\left(\frac{1+|x|^2}{|x+a|}\right)^{\frac{n}{p}}f\left(\frac{2x_1}{|x+a|^2},\dots,\frac{2x_{n-1}}{|x+a|^2},\frac{|x|^2-1}{|x+a|^2}\right),$$

其中 $a=(0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^n$. 于是,

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}^*)^{-1}D^*F&=\left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{-\frac{n}{p}}F(D^{-1}(s))\\&=\left(\frac{2}{|x+a|}\right)^{\frac{n}{p}}f\left(\frac{2x_1}{|x+a|^2},\dots,\frac{2x_{n-1}}{|x+a|^2},\frac{|x|^2-1}{|x+a|^2}\right).\end{aligned}$$

为方便起见, 将上述过程最终得到的函数 $(\mathcal{S}^{*-1}D^*\mathcal{S}^*f)(x)$ 简记为 $(\mathcal{D}f)(x)$.

记 $\mathcal{R}f=f^*$, 反复迭代 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{R}$ 构造序列 $\{f_k\}$,

$$f_k=(\mathcal{R}\mathcal{D})^kf,\quad f_0=f.$$

这个过程叫作 "竞争对称性". 利用对称递减重排和共形对称性相抗争, 并且得到了强收敛的序列.

定理 2.4 (参见文献 [3, 定理 4.6]) 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 非负, $1 < p < \infty$, 则当 $k \to \infty$ 时,

$$f_k \xrightarrow{L^p} \|f\|_p g,$$

其中

$$g(x) = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{n/p}.$$

利用定理 2.4 和 Riesz 不等式 (2.2) 可得, 对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\left\{ \frac{H(f^k, f^k)}{\|f^k\|_p^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

单调递增收敛于 $H(g,g)/(\|g\|_p^2)$. 由此可见 g 是最优化函数. 此外, 由严格重排不等式 (2.3) 和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的共形不变特性可以得出所有最优化函数的表达式具有如下形式:

$$f(x) = A(a^2 + |x-b|^2)^{-(2n-\gamma)/2},$$

其中 $A \in \mathbb{C}$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$. 上述详细工作可参见文献 [3, 第 4 章].

然而, 对称递减重排不是研究 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式最佳常数的唯一方法. Frank 和 Lieb [16, 17] 用了不依赖于对称递减重排思想的两种方法证明得出最优化解. 文献 [16] 采用的是球面反演方法, 在文献 [17] 中, 他们继续沿用处理 Heisenberg 群上最佳形式的 Hardy-Littlewood-Sobolev 方法 [18]. 球面反演方法最先由 Li 和 Zhu 给出, 可参见文献 [19–21].

不难看出 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式与反向 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (2.9) 是等价的. 2015 年, Dou 和 Zhu [22] 利用球面反演方法找出当 $p = q$ 时的最优化解和最佳常数. 同样, 当 $p \neq q$ 时, 反向 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最佳常数和最优化解仍是未知的.

定理 2.5 (参见文献 [22, 定理 1.2]) 设 $0 < p, q < 1$, $\gamma > 0$, $\gamma/n = 1/p + 1/q - 2$, 则存在常数 $C_{p,\gamma,n} > 0$, 使得对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|f\|_p \|g\|_q \leqslant C_{p,\gamma,n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(y)||x-y|^{\gamma} dxdy. \tag{2.9}$$

如果 $p = q = 2n/(2n+\gamma)$, 那么最佳常数为

$$C_{p,\gamma,n} = \pi^{-\gamma/2} \frac{\Gamma(n/2+\gamma/2)}{\Gamma(n+\gamma/2)} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right)^{-\gamma/n-1}.$$

此时, (2.9) 等号成立当且仅当 $g = cf$, c 为常数, $f(x) = A(a^2+|x-b|^2)^{-(2n+\gamma)/2}$, 其中 $A \in \mathbb{C}$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

2012 年, 在 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的基础上, Drury [23] 和 Gressman [24] 研究了其行列式型多线性不等式. 此外, Valdimarsson [25] 证明了当 $p_j = p$ 时最优化解的存在性.

设 $y_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n+1$. 记

$$\det(y_1, \ldots, y_{n+1}) = n! \mathrm{Vol}(\mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}),$$

其中 $\mathrm{Vol}(\mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\})$ 是由 $n+1$ 个点 $y_1, \ldots, y_{n+1}$ 构成的凸包的体积.

引理 2.6 (参见文献 [24, 定理 2]) 设 $n \geqslant 1$, 则存在有限常数 $C_n > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$ 和可测集 $E_1, \ldots, E_n \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$|\{(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n : \det(0, y_1, \ldots, y_n) < \delta\}| \leqslant C_n \delta \prod_{j=1}^{n} |E_j|^{1-1/n}. \tag{2.10}$$

借助于 (2.10) 测度性质和 Marcinkiewicz 插值定理, Gressman [24] 得到了行列式型多线性分数次积分算子的有界性. Valdimarsson [25] 利用对称递减重排思想和共形不变特性, 给出了行列式型多线性分数次积分的最优化函数.

定理 2.7 (参见文献 [24, 定理 1] 和 [25, 定理 2]) 设 $0 < \gamma < 1$, $1 < p_j < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, 则存在常数 $C_{p_j,\gamma,n} > 0$, 使得对任意 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n+1} f_j(y_j) \det(y_1, \ldots, y_{n+1})^{-\gamma} dy_1 \cdots dy_{n+1} \leqslant C_{p_j,\gamma,n} \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{p_j} \tag{2.11}$$

成立当且仅当 p_j 和 γ 满足

$$n + 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{p_j} = \gamma, \quad \frac{1}{p_j} > 1 - \frac{\gamma}{n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1.$$

如果 $1/p_j = 1/p = 1 - \gamma/(n+1)$, $j = 1, \ldots, n+1$, 那么,

$$f_1(x) = \cdots = f_{n+1}(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2p}}}$$

是 (2.11) 的最优化解. 若 $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ 也是 (2.11) 的最优化解, 则存在矩阵 $A \in \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$, 使得

$$f_j(x) = c_j \left\| A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^{-\frac{n+1}{p}}, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Beckner [26] 利用 Selberg 公式和球极投影共形不变性得出另一种乘积型多线性不等式.

定理 2.8 (参见文献 [26, 定理 6]) 设 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, N$, $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j} > 1$. 又设 $0 \leqslant r_{ij} = r_{ji} < n$ 并满足条件

$$\sum_{i \neq j} \frac{r_{ij}}{n} = 2 - \frac{2}{p_j}, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{r_{ij}}{n} = N - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j}. \tag{2.12}$$

那么,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{N} f_j(y_j) \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{-r_{ij}} dy_1 \cdots dy_N \leqslant C \prod_{j=1}^{N} \|f_j\|_{p_j}. \tag{2.13}$$

此外, (2.13) 的最优化解为

$$f_j(x) = A(a^2 + |x-b|^2)^{-n/p_j}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

其中 $A \in \mathbb{C}$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

这里的条件 (2.12) 是为了保证不等式 (2.13) 的共性不变特性. 利用 $\mathbb{R}^n$ 到单位球面 $\mathbb{S}^n$ 的球极投影, 可得 (2.13) 等价于 (2.14). 故只需研究 (2.14) 的有界性和最佳常数.

定理 2.9 (参见文献 [26, 定理 7]) 设 $F_j \in L^{p_j}(\mathbb{S}^n)$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j} > 1$, $d\xi_j$ 是球面测度. 又设 $0 \leqslant r_{ij} = r_{ji} < n$, 并满足条件

$$\sum_{i \neq j} \frac{r_{ij}}{n} = 2 - \frac{2}{p_j}, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{r_{ij}}{n} = N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j}.$$

那么,

$$\int_{\mathbb{S}^n} \cdots \int_{\mathbb{S}^n} \prod_{j=1}^N F_j(\xi_j) \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{-r_{ij}} d\xi_1 \cdots d\xi_N \leqslant C \prod_{j=1}^N \|F_j\|_{p_j}. \tag{2.14}$$

而且, (2.14) 的最优化解为

$$F_j(\xi) = A(1 - \xi \cdot \eta)^{-n/p_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

其中 $A \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\eta| < 1$.

因此, 不等式 (2.13) 的最佳常数为

$$C = |\mathbb{S}^n|^{-N + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} r_{ij}/n} \int_{\mathbb{S}^n} \cdots \int_{\mathbb{S}^n} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} |\xi_i - \xi_j|^{-r_{ij}} d\xi_1 \cdots d\xi_N.$$

关于乘积型多线性不等式, Christ [27] 研究了幂指数 r_{ij} 都相等的一维乘积型多线性不等式.

定理 2.10 (参见文献 [27, 命题 2.2]) 设 $r \geqslant 0$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^N f(y_j) \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{-r} dy_1 \cdots dy_N \leqslant C \|f\|_p^N \tag{2.15}$$

成立当且仅当 p 和 r 满足条件

$$r < \frac{2}{N}, \quad 1 \leqslant p < N, \quad \frac{1}{p} + \frac{r(N-1)}{2} = 1.$$

最近, Shi 等 [28] 研究了一般情形的乘积型多线性不等式.

定理 2.11 (参见文献 [28, 定理 1]) 设 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, N$, $0 \leqslant r_{ij} = r_{ji} < n$, 那么,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^N f_j(y_j) \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{-r_{ij}} dy_1 \cdots dy_N \leqslant C \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{p_j} \tag{2.16}$$

成立当且仅当 p_j 和 r_{ij} 满足下列三个条件.

(1) $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{r_{ij}}{n} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j} = N$;

(2) 对于任意的 $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 并且 $|I| \geqslant 2$, 有 $\sum_{i,j \in I; i<j} \frac{r_{ij}}{n} < |I| - 1$;

(3) 对于任意的 $I \subsetneqq \{1, 2, \dots, N\}$, 满足下列 (i) 和 (ii) 两条件之一:

(i) $\sum_{i,j \in I; i<j} \frac{r_{ij}}{n} + \sum_{j \in I} \frac{1}{p_j} < |I|$,

(ii) $\sum_{i,j \in I; i<j} \frac{r_{ij}}{n} + \sum_{j \in I} \frac{1}{p_j} = |I|$, $\sum_{j \in I^c} \frac{1}{p_j} \geqslant 1$, $\sum_{i,j \in J; i<j} \frac{r_{ij}}{n} + \sum_{j \in J} (\frac{1}{p_j} + \sum_{i \in I} \frac{r_{ij}}{n}) \leqslant |J|$, $J \subset I^c$.

这里若 $|I| = 1$, 记 $\sum_{i,j \in I; i<j} r_{ij}/n = 0$.

与分数次积分不等式密切相关的还有 Sobolev 不等式 [29,30]、加权 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [3,9,31–33]、k 平面变换 [34,35]、X 射线变换 [36,37]、广义 Radon 变换 [38–42] 以及 Fourier 限制性定理 [43–45] 等.

3　几何极值不等式和重排不等式

在 Riesz 不等式的基础上, Brascamp 等[46] 推广研究 Riesz 不等式的更一般情形, 称为 Brascamp-Lieb-Luttinger 不等式.

定理 3.1 (参见文献 [46, 定理 1.2])　设 $f_1,\dots,f_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 在无穷原点趋于 0. 令 $k\leqslant m$, $B=\{b_{ij}\}$ 为 $k\times m$ 矩阵 ($1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant m$). 定义

$$I(f_1,\dots,f_m):=\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j\bigg(\sum_{i=1}^k b_{ij}x_i\bigg)dx_1\cdots dx_k,$$

那么,

$$I(f_1,\dots,f_m)\leqslant I(f_1^*,\dots,f_m^*). \tag{3.1}$$

运用 Brascamp-Lieb-Luttinger 不等式和 Steiner 对称化思想, Chen[47] 得到了行列式型分数次积分重排不等式.

定理 3.2 (参见文献 [47, 定理 2.7])　设 $f_1,f_2,\dots,f_{n+2}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上非负函数, 在无穷原点趋于 0, 定义

$$J(f_1,\dots,f_{n+1})=\int_{(\mathbb{R}^n)^n}\prod_{j=1}^n f_j(y_j)f_{n+1}(\det(0,y_1,\dots,y_n))dy_1\cdots dy_n,$$

$$G(f_1,\dots,f_{n+2})=\int_{(\mathbb{R}^n)^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1} f_j(y_j)f_{n+2}(\det(y_1,\dots,y_{n+1}))dy_1\cdots dy_{n+1},$$

那么,

$$J(f_1,\dots,f_{n+1})\leqslant J(f_1^*,\dots,f_{n+1}^*),\quad G(f_1,\dots,f_{n+2})\leqslant G(f_1^*,\dots,f_{n+2}^*). \tag{3.2}$$

例 3.3　(1) 设 $f_j=\chi_{E_j}$, $1\leqslant j\leqslant n$, 其中 $E_j\subset\mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集. 令 $f_{n+1}=\chi_{(|\cdot|<\delta)}$, 则由定理 3.2 得

$$\begin{aligned}&|\{(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\cdots\times E_n:\det(0,y_1,\dots,y_n)<\delta\}|\\&\quad\leqslant|\{(y_1,\dots,y_n)\in E_1^*\times\cdots\times E_n^*:\det(0,y_1,\dots,y_n)<\delta\}|.\end{aligned}$$

这表明 (2.10) 的最优化集是以原点为中心的球.

(2) 令 $f_{n+2}=|\cdot|^{-\gamma}$, $\gamma>0$, 则由定理 3.2 得

$$\begin{aligned}&\int_{(\mathbb{R}^n)^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}f_j(y_j)\det(y_1,\dots,y_{n+1})^{-\gamma}dy_1\cdots dy_{n+1}\\&\quad\leqslant\int_{(\mathbb{R}^n)^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}f_j^*(y_j)\det(y_1,\dots,y_{n+1})^{-\gamma}dy_1\cdots dy_{n+1}.\end{aligned}$$

由例 3.3 的重排不等式 (2) 可知, 行列式型多线性不等式 (2.11) 在对称递减重排之后是递增的, 结合 $\mathbb{R}^n$ 到单位球面 $\mathbb{S}^n$ 球极投影, 并利用第 2 节介绍的竞争对称性构造强收敛的最优化序列, 可以得到 (2.11) 的最优化函数.

这里的球极投影不同于第 2 节研究 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式最优化函数时介绍的球极投影. 定义 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到北半球面 $\mathbb{S}^n_+$ 的球极投影,

$$\mathcal{T}(x)=\bigg(\frac{x_1}{\sqrt{1+|x|^2}},\dots,\frac{x_n}{\sqrt{1+|x|^2}},\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\bigg),\quad\forall\,x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

则 $\mathcal{T}$ 的逆是

$$\mathcal{T}^{-1}(s)=\left(\frac{s_1}{s_{n+1}},\dots,\frac{s_n}{s_{n+1}}\right),\quad \forall\, s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{S}^n_+. \tag{3.4}$$

通过映射 $F(s):=|J_{\mathcal{T}^{-1}}(s)|^{1/p}f(\mathcal{T}^{-1}(s))$, 可以将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数提升到单位球面 $\mathbb{S}^n_+$ 上, 其中 $J_{\mathcal{T}^{-1}}$ 是球极投影 $\mathcal{T}$ 逆的 Jacobi 矩阵,

$$|J_{\mathcal{T}^{-1}}(s)|=\left(\frac{1}{s_{n+1}}\right)^{-n-1}.$$

同样得到行列式型多线性不等式 (2.11) 具有共形不变性, 即当 $1/p_j=1-\gamma/(n+1)$ $(j=1,\dots,n+1)$ 时, (2.11) 等价于

$$\int_{\mathbb{S}^n_+}\cdots\int_{\mathbb{S}^n_+}\prod_{j=1}^{n+1}F_j(s_j)\det(s_1,\dots,s_{n+1})^{-\gamma}ds_1\cdots ds_{n+1}\leqslant C_{p_j,\gamma,n}\prod_{j=1}^{n+1}\|F_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{S}^n_+)}.$$

经典的对称递减重排不等式除了 Riesz 不等式和 Brascamp-Lieb-Luttinger 不等式, 还有等周不等式、Brunn-Minkowski 不等式和 Pólya-Szegö 不等式等, 参见文献 [48–55].

(1) 等周不等式: 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的表面积有限, 则

$$\mathrm{Per}(A^*)\leqslant\mathrm{Per}(A), \tag{3.5}$$

其中 $\mathrm{Per}(A)$ 是 A 的表面积. 等周不等式表明, 在体积一定的条件下, 球具有最小的表面积. 由等周不等式 (3.5) 得到不等式 (3.6) 的最佳常数和最优化解:

$$|A|\leqslant\frac{1}{(v_nn^n)^{1/(n-1)}}\mathrm{Per}(A)^{n/(n-1)}. \tag{3.6}$$

(2) Brunn-Minkowski 不等式: 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集, 则

$$|A^*+B^*|\leqslant|A+B|, \tag{3.7}$$

其中 $A+B:=\{a+b:a\in A,b\in B\}$ 表示集合 A 与 B 的 Minkowski 直和.

(3) Sobolev 不等式: 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<n$, $p^*=np/(n-p)$, 则

$$\|f\|_{p^*}\leqslant C_{p,n}\|\nabla f^*\|_p. \tag{3.8}$$

(4) Pólya-Szegö 不等式: 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则

$$\|\nabla f^*\|_p\leqslant\|\nabla f\|_p. \tag{3.9}$$

由 Pólya-Szegö 不等式可知 Sobolev 不等式的最优化函数也是球对称的.

引理 3.4 (参见文献 [47, 引理 2.2]) 设 $E_j\subset\mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集, $a_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,l$, $l\in\mathbb{N}$, 则

$$\sup_{x_j\in E_j^*}\left|\sum_{j=1}^{l}a_jx_j\right|\leqslant\sup_{x_j\in E_j}\left|\sum_{j=1}^{l}a_jx_j\right|.$$

在引理 3.4 基础上, 我们得到两个经典几何极值问题的答案. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是测度有限的 Lebesgue 可测集, 则

$$\mathrm{d}(E^*) \leqslant \mathrm{d}(E), \tag{3.10}$$

其中 $\mathrm{d}(E)$ 是集合 E 的直径. 这是著名的等直径不等式, 其几何意义表明, 在体积一定的条件下, 球的直径最小.

利用等直径不等式 (3.10) 可以得到不等式 (3.11) 的最佳常数和最优化集,

$$|E| \leqslant \frac{v_n}{2^n}\mathrm{d}(E)^n \equiv \frac{v_n}{2^n}\sup_{x,y\in E}|x-y|^n. \tag{3.11}$$

除了集合体积与表面积 (3.6), 以及集合体积与直径的关系 (3.11), Macbeath [56] 首次研究了集合体积与其包含的最大星型集之间的关系, 即对于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意测度有限集 E, 有

$$|E| \leqslant C_n \sup_{\substack{y_j\in E\\ j=1,\ldots,n+1}} \det(y_1,\ldots,y_{n+1}), \tag{3.12}$$

其研究方法借助于重排不等式

$$\sup_{\substack{y_j\in E^*\\ j=1,\ldots,n+1}} \det(y_1,\ldots,y_{n+1}) \leqslant \sup_{\substack{y_j\in E\\ j=1,\ldots,n+1}} \det(y_1,\ldots,y_{n+1}). \tag{3.13}$$

Kanazawa [57] 用几何方法论也找出了对任意的凸集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 存在星型集 $T, c>0$, 使得

$$T \subset E \subset n(T-c)+c,$$

其中 c 是星型集 T 的重心. 这再一次验证了几何不等式 (3.12) 成立. 这个思想类似于 John 椭球的概念: 对任意的凸集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 一定存在椭球 $J, c>0$, 使得

$$J \subset E \subset cJ,$$

其中 cJ 是椭球 J 的同心 c 倍扩张. 如此找到的椭球称为 John 椭球.

Chen 利用引理 3.4 研究得出 (3.10) 和 (3.13) 更一般的泛函重排不等式.

定理 3.5 (参见文献 [58, 引理 4.3] 和 [47, 定理 2.5]) 设 f_j 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 在无穷原点趋于 0, 又设 $\gamma>0$, $l\in\mathbb{N}$, 则

$$\sup_{y_j}\prod_{j=1}^{l} f_j^*(y_j)\bigg|\sum_{j=1}^{l}a_jy_j\bigg|^{\gamma} \leqslant \sup_{y_j}\prod_{j=1}^{l} f_j(y_j)\bigg|\sum_{j=1}^{l}a_jy_j\bigg|^{\gamma}, \tag{3.14}$$

$$\sup_{y_j}\prod_{j=1}^{n+1} f_j^*(y_j)\det(y_1,\ldots,y_{n+1})^{\gamma} \leqslant \sup_{y_j}\prod_{j=1}^{n+1} f_j(y_j)\det(y_1,\ldots,y_{n+1})^{\gamma}. \tag{3.15}$$

对任意 n^2 维向量, 我们可以视之为 n 阶方阵. Christ [59] 首次研究了 $\mathbb{R}^{n^2}$ 空间中的集合体积与行列式之间的关系.

定理 3.6 (参见文献 [59, 引理 13.2]) 设 E 是 $n\times n$ 阶实矩阵空间 $\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子集, 并且在 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的 Lebesgue 测度意义下可测, 则

$$|E|^{\frac{1}{n}} \leqslant C_n \sup_{\substack{A_j\in E\\ s_j\in\{0,1\}}} |\det(s_1A_1+\cdots+s_nA_n)|. \tag{3.16}$$

特别地, 如果 E 是凸集, 那么,

$$|E|^{\frac{1}{n}} \leqslant C_n \sup_{A\in E} |\det(A)|.$$

这里 det 表示通常的方阵行列式. Chen [47] 利用对称重排思想把定理 3.6 结果推广至更一般的集合 E_j 上.

定理 3.7 (参见文献 [47, 定理 3.1]) 设 E_j 是实矩阵空间 $\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ 的可测集, $j=1,\dots,n$, 则

$$\prod_{j=1}^{n} |E_j|^{\frac{1}{n^2}} \leqslant C_n \sup_{\substack{A_j\in E_j\\ j=1,\dots,n}} |\det(A_1+\cdots+A_n)|. \tag{3.17}$$

因此, 当 $E_j = E$ 时,

$$|E|^{\frac{1}{n}} \leqslant C_n \sup_{y_j\in E} |\det(A_1+\cdots+A_n)|.$$

在上述几何极值问题基础上, Chen [58] 研究了 (3.11) 和 (3.12) 的泛函形式.

定理 3.8 (参见文献 [58, 推论 2.3 和定理 4.1]) 设 $0<p,q<\infty$, $\gamma>0$ 满足 $\gamma/n = 1/p+1/q$, 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f\|_p\|g\|_q \leqslant C_{p,\gamma,n} \sup_{x,y} |f(x)g(y)||x-y|^{\gamma}. \tag{3.18}$$

如果 $p=q=2n/\gamma$, 那么 (3.18) 的最佳常数

$$C_{p,\gamma,n} = 2^{-\frac{2n}{p}}|\mathbb{S}^n|^{\frac{2}{p}},$$

并且最佳常数在 $f=ch$ 和 $g=ch$ 时达到, 其中 c 为常数, $h(x)=(1+|x|^2)^{-n/p}$.

定理 3.9 (参见文献 [58, 推论 3.3 和定理 4.7]) 设 $0<p_j<\infty$, $\gamma>0$, $f_j\in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,n+1$, 则

$$\prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{p_j} \leqslant C_{p_j,\gamma,n} \sup_{y_j} \prod_{j=1}^{n+1} |f_j(y_j)| \det(y_1,\dots,y_{n+1})^{\gamma} \tag{3.19}$$

成立当且仅当 p_j 和 γ 满足 $\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{p_j}=\gamma$, $\frac{1}{p_j}<\frac{\gamma}{n}$, $j=1,\dots,n+1$. 如果 $1/p_j = 1/p = \gamma/(n+1)$, 则 (3.19) 的最佳常数为 $C_{p_j,\gamma,n} = (|\mathbb{S}^n|/2)^{\frac{n+1}{p}}$, 并且最佳常数在 $f_j = ch$ 时达到, $1\leqslant j\leqslant n+1$, 其中 c 为常数, $h(x)=(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2p}}$.

4 混合范数空间的分数次积分不等式

1961 年, Benedek 和 Panzone [60] 首次提出了混合范数的概念.

定义 4.1 给定自然数 n, 令 (X_i,S_i,μ_i) 为 σ 有限测度空间, $1\leqslant i\leqslant n$, 并且给出一个 n 维向量 $\vec{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$. 考虑乘积空间 $(X,S,\mu)=(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n S_i, \prod_{i=1}^n \mu_i)$ 中的可测函数 f, 若对 f 先关于变量 x_1 取 L^{p_1} 范数, 这样我们得到一个变量为 $(x_2,\dots,x_n)$ 的函数, 再对这个函数关于变量 x_2 取 L^{p_2} 范数, …, 最后关于 x_n 取 L^{p_n} 范数. 这样最终得到的结果记为 $\|f\|_{\vec{p}}$ 或者 $\|f\|_{p_1,\dots,p_n}$. 如果其是有限的, 则称 f 属于 $L^{\vec{p}}(X)$. 特别地, 当 $p_i<\infty$ 时,

$$\|f\|_{\vec{p}} = \left(\int\cdots\left(\int\left(\int |f(x_1,\dots,x_n)|^{p_1}d\mu_1\right)^{p_2/p_1} d\mu_2\right)^{p_3/p_2}\cdots d\mu_n\right)^{1/p_n}.$$

此外, f 的混合弱范数定义为

$$\|f\|_{L^{\vec{p},\infty}} := \sup_{\lambda>0} \lambda \|\chi_{\{|f|>\lambda\}}\|_{L^{\vec{p}}}. \tag{4.1}$$

如果 $\|f\|_{L^{\vec{p},\infty}} < \infty$, 则称 f 属于 $L^{\vec{p},\infty}(X)$.

另一方面, 若对 f 先关于变量 x_1 取弱 L^{p_1} 范数, 再对 x_2 取弱 L^{p_2} 范数, $\dots$, 最后关于 x_n 取弱 L^{p_n} 范数, 则得到累次弱范数

$$\|f\|_{L^{\vec{p}_I,\infty}} := \|f\|_{L^{p_n,\infty}(\cdots(L^{p_1,\infty}))}. \tag{4.2}$$

1961 年, Benedek 和 Panzone [60] 首次研究了混合范数空间的基本性质, 类似于经典 Lebesgue 空间, 其中包含混合强范数的收敛性、完备性、自反性、Hölder 不等式、Minkowski 不等式、Young 不等式和插值定理等. 其他相关工作可参见文献 [61–63]. 近年来, Lebesgue 混合范数空间理论得到了一些发展. 例如, Kurtz [64] 研究了各种经典算子, 包括强极大算子、双 Hilbert 变换和奇异积分算子在加权 Lebesgue 混合范数空间上的有界性; Torres 和 Ward [65] 得出了 Lebesgue 混合范数空间的 Calderón 再生公式和小波分析; Chen 和 Sun [66] 系统研究了 Lebesgue 混合范数空间中混合弱范和累次弱范的性质, 包含收敛性、完备性、插值定理和 Hölder 不等式等. Cleanthous 等 [67] 和 Huang 等 [68] 在最近的论文中进一步研究了各向异性混合范数 Hardy 空间的性质. 本节将介绍混合范数空间中的一些基本不等式.

我们将条件 n 维向量 $\vec{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $1\leqslant i\leqslant n$, 简记为 $1\leqslant\vec{p}\leqslant\infty$. 如果 $1<p_i<\infty$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则简记为 $1<\vec{p}<\infty$. 将记号 $1/\vec{p}$ 定义为 $1/\vec{p}:=(1/p_1,1/p_2,\dots,1/p_n)$.

Minkowski 不等式 [60]　设 $1\leqslant\vec{p}\leqslant\infty$, $f,g\in L^{\vec{p}}(X)$, 则 $f+g\in L^{\vec{p}}(X)$ 并且

$$\|f+g\|_{\vec{p}} \leqslant \|f\|_{\vec{p}} + \|g\|_{\vec{p}}. \tag{4.3}$$

由此可见 $L^{\vec{p}}(X)$ 是赋范线性空间.

定理 4.2 (参见文献 [60, 第 2 节定理 2])　设 $1\leqslant\vec{p}\leqslant\infty$, f 是 X 上的可测函数, 则

$$\|f\|_{\vec{p}} = \sup_{g\in U_{\vec{p}'}} \left|\int fg d\mu\right| = \sup_{g\in U_{\vec{p}'}} \int |fg| d\mu,$$

其中 $U_{\vec{p}'}$ 表示空间 $L^{p'}$ 中的单位球. 因此, 可测函数 $f\in L^{\vec{p}}(X)$ 当且仅当

$$\sup_{g\in U_{\vec{p}'}} \left|\int fg d\mu\right| = \sup_{g\in U_{\vec{p}'}} \int |fg| d\mu < \infty.$$

定理 4.3 (参见文献 [60, 第 3 节定理 1])　设 $1<\vec{p}<\infty$, 则 $L^{\vec{p}}(X)$ 是自反 Banach 空间当且仅当对每一个 i, $L^{p_i}(X_i)$ 是自反 Banach 空间.

Chen 和 Sun [66] 研究了混合弱范与累次弱范两者之间的关系, 得到以下结果.

定理 4.4 (参见文献 [66, 定理 2.2])　设 $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $0<\vec{p}<\infty$, $m,n\in\mathbb{N}$, 则有

(1) $L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m) \not\subset L^{\vec{p},\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ 且 $L^{\vec{p},\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m) \not\subset L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$;

(2) $L_x^{p_1,\infty}(L_y^{p_2,\infty}) \not\subset L_y^{p_2,\infty}(L_x^{p_1,\infty})$ 且 $L_y^{p_2,\infty}(L_x^{p_1,\infty}) \not\subset L_x^{p_1,\infty}(L_y^{p_2,\infty})$;

(3) $L^{\vec{p}} \subsetneq L^{\vec{p},\infty}\cap L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})$.

特别地, 设 $\vec{p}=(p_1,p_2)$, 非零函数 $f\otimes g(x,y):=f(x)g(y)\in L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})$ 当且仅当 $f\in L^{p_1,\infty}$, $g\in L^{p_2,\infty}$. 现考虑 $f\otimes g\in L^{\vec{p},\infty}$ 与 $f\in L^{p_1,\infty}$ 和 $g\in L^{p_2,\infty}$ 之间的关系.

定理 4.5 (参见文献 [66, 定理 2.3]) 设 $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $0<\vec{p}<\infty$, $m,n\in\mathbb{N}$, 则有

(1) 如果 $f\in L^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p_2}(\mathbb{R}^m)$, 那么 $f\otimes g\in L^{\vec{p},\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$;

(2) 如果 $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^m)$, $p_1\leqslant p_2$, 那么 $f\otimes g\in L^{\vec{p},\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$;

(3) 如果 $f\otimes g\in L^{\vec{p},\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$, $f,g\neq 0$, 那么 $f\in L^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p_2,\infty}(\mathbb{R}^m)$.

对于一般的 $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $L^{p_2,\infty}(L^{p_1})$、$L^{p_2}(L^{p_1,\infty})$ 和 $L^{\vec{p},\infty}$ 三者之间的关系有如下定理.

定理 4.6 (参见文献 [66, 定理 2.4]) 记 $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $0<\vec{p}<\infty$.

(1) 设 F 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上的可测函数, 则 $\|F\|_{L^{\vec{p},\infty}}\leqslant\|F\|_{L^{p_2}(L^{p_1,\infty})}$, 因此, $L^{p_2}(L^{p_1,\infty})\subset L^{\vec{p},\infty}$.

(2) $L^{p_2,\infty}(L^{p_1})\not\subset L^{\vec{p},\infty}$ 且 $L^{\vec{p},\infty}\not\subset L^{p_2,\infty}(L^{p_1})$.

设 $\vec{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $1\leqslant\vec{p}\leqslant\infty$, 定义 $\vec{p}$ 的共轭 $\vec{p'}$ 为 $\vec{p'}=(p_1',p_2',\dots,p_n')$, 则有以下 Hölder 不等式:

$$\left|\int\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)g(x_1,\dots,x_n)d\mu_1\cdots d\mu_n\right|\leqslant\|f\|_{\vec{p}}\|g\|_{\vec{p'}}. \tag{4.4}$$

由 Hölder 不等式 (4.4) 易得

$$\|f\|_{L^{\vec{r}}}\leqslant\|f\|_{L^{\vec{p}}}^{\theta}\|f\|_{L^{\vec{q}}}^{1-\theta},$$

其中 $1/\vec{r}=\theta/\vec{p}+(1-\theta)/\vec{q}$, $0<\theta<1$.

利用弱范数的相关结果容易证明 Hölder 不等式对于累次弱范数也成立.

定理 4.7 (参见文献 [66, 定理 2.13]) 设 $0<\vec{p},\vec{q},\vec{r}\leqslant\infty$, $1/\vec{r}=1/\vec{p}+1/\vec{q}$, 则

$$\|f\|_{L^{\vec{r}_I,\infty}}\leqslant C_{\vec{p},\vec{q}}\|f\|_{L^{\vec{p}_I,\infty}}\|f\|_{L^{\vec{q}_I,\infty}}, \tag{4.5}$$

其中 $C_{\vec{p},\vec{q}}=\prod_{i=1}^n(p_i/r_i)^{1/p_i}(q_i/r_i)^{1/q_i}$.

对于混合弱范数, Hölder 不等式有时不成立.

定理 4.8 (参见文献 [66, 定理 2.14]) 设 $0<p_1,p_2,q_1,q_2\leqslant\infty$ 且 $1/r_i=1/p_i+1/q_i$, $i=1,2$, 则

$$\|fg\|_{L^{\vec{r},\infty}}\leqslant C_{\vec{p},\vec{q}}\|f\|_{L^{\vec{p},\infty}}\|g\|_{L^{\vec{q},\infty}},\quad\forall f,g,$$

当且仅当 $p_1q_2=p_2q_1$, 此时常数为

$$C_{\vec{p},\vec{q}}=\begin{cases}\max\{1,2^{1/r_1-1/r_2}\}\dfrac{p_2^{1/p_2}q_2^{1/q_2}}{r_2^{1/r_2}}, & 0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty,\\ \max\{1,2^{1/r_1-1}\}\dfrac{p_1^{r_1/p_1}q_1^{r_1/q_1}}{r_1}, & p_2=q_2=\infty,\quad 0<p_1,p_2<\infty,\\ \dfrac{p_2^{1/p_2}q_2^{1/q_2}}{r_2^{1/r_2}}, & p_1=q_1=\infty,\quad 0<p_2,q_2<\infty,\\ 1, & \vec{p}=(\infty,\infty)\quad\text{或}\quad\vec{q}=(\infty,\infty).\end{cases}$$

由 Hölder 不等式 (4.4) 可得下面的定理:

定理 4.9 (参见文献 [66, 定理 2.18]) 设 $0<\vec{p},\vec{q},\vec{r}\leqslant\infty$ 且 $1/\vec{r}=\theta/\vec{p}+(1-\theta)/\vec{q}$, 其中 $0<\theta<1$, 那么,

$$\|f\|_{L^{\vec{r},\infty}}\leqslant\|f\|_{L^{\vec{p},\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{\vec{q},\infty}}^{1-\theta},\quad\|f\|_{L^{\vec{r}_I,\infty}}\leqslant\|f\|_{L^{\vec{p}_I,\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{\vec{q}_I,\infty}}^{1-\theta}.$$

Chen 和 Sun[66] 同样得到了混合范数空间中弱范插值公式.

定理 4.10 (参见文献 [66, 定理 2.19]) 设 $0<\vec{p},\vec{q},\vec{r}\leqslant\infty$, $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $\vec{q}=(q_1,q_2)$, $\vec{r}=(r_1,r_2)$,

(1) 如果 $1/\vec{r}=\theta/\vec{p}+(1-\theta)/\vec{q}$, 其中 $0<\theta<1$, 那么,

$$\|f\|_{L^{\vec{r}}}\leqslant\left(\frac{r_1}{r_1-p_1}+\frac{r_1}{q_1-r_1}\right)^{1/r_1}\|f\|^{\theta}_{L^{p_2}(L^{p_1,\infty})}\|f\|^{1-\theta}_{L^{q_2}(L^{q_1,\infty})};$$

(2) 如果

$$\frac{1}{r_1}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{q_1},\quad \frac{1}{r_2}=\frac{\theta\xi}{p_{21}}+\frac{(1-\theta)\xi}{p_{22}}+\frac{\theta(1-\xi)}{q_{21}}+\frac{(1-\theta)(1-\xi)}{q_{22}},$$

其中 $0<\theta,\xi<1$, 那么,

$$\|f\|_{L^{\vec{r}}}\leqslant C\|f\|^{\theta\xi}_{L^{p_{21},\infty}(L^{p_1,\infty})}\|f\|^{(1-\theta)\xi}_{L^{p_{22},\infty}(L^{q_1,\infty})}\|f\|^{\theta(1-\xi)}_{L^{q_{21},\infty}(L^{p_1,\infty})}\|f\|^{(1-\theta)(1-\xi)}_{L^{q_{22},\infty}(L^{q_1,\infty})}.$$

Young 不等式[60] 令 n 维向量 $1\leqslant\vec{p},\vec{q},\vec{r}\leqslant\infty$, $f,g\in L^{\vec{p}}(X)$ 满足 $1/\vec{p}+1/\vec{q}=1+1/\vec{r}$, $f\in L^{\vec{p}}(X)$, $g\in L^{\vec{q}}(X)$, 则 $f*g\in L^{\vec{r}}(X)$ 并且

$$\|f*g\|_{\vec{r}}\leqslant\|f\|_{\vec{p}}\|g\|_{\vec{q}}.$$

Benedek 和 Panzone[60] 还研究了位势算子在混合范数空间上的有界性.

定理 4.11 令 $X=\mathbb{R}^n$, $\vec{\Lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $0<\lambda_i<1$, 设 $\vec{p}>1$ 且满足 $1+1/\vec{q}=1/\vec{p}+\Lambda$, 则对任意的 $f\in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|f*|\cdot|^{-\lambda}\|_{\vec{q}}\leqslant C_{\vec{p},\Lambda}\|f\|_{\vec{p}},\tag{4.6}$$

其中 $\lambda=\sum_{j=1}^n\lambda_j$.

由位势算子的有界性 (4.6) 可以得到混合范数空间上的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式. 令 $X=\mathbb{R}^n$, $\vec{\Lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $0<\lambda_i<1$. 设 $\vec{p}>1$, $\vec{q}>1$ 且满足 $2-1/\vec{p}-1/\vec{q}=\Lambda$, 则对任意的 $f\in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda=\sum_{j=1}^n\lambda_j$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y)|x-y|^{-\lambda}dxdy\leqslant C_{\vec{p},\Lambda}\|f\|_{\vec{p}}\|g\|_{\vec{q}}.\tag{4.7}$$

Chen 和 Sun[66] 研究了混合范数空间上更一般形式的分数次积分不等式. 定义

$$L_\gamma f(x,y)=\frac{f(x,y)}{|x-y|^\gamma},\quad T_\gamma f(x,y)=\frac{f(x,y)}{(|x+y|+|x-y|)^\gamma},\qquad \gamma>0,$$

不难发现

$$\|L_\gamma f\|_{L^{\vec{q}}}\lesssim_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{\vec{p}}},\quad \|T_\gamma f\|_{L^{\vec{q}}}\lesssim_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{\vec{p}}}$$

在一般情况下并不成立. 当我们考虑累次弱范时, 可以得到一些关于这两个算子有界性的结果.

定理 4.12 (参见文献 [66, 定理 3.7]) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的非负可测函数, $0<r<p_1\leqslant\infty$, $0<p_2\leqslant\infty$ 且 $1/r=1/p_1+\gamma/n$, 则

$$\|L_\gamma f\|_{L^{p_2}(L^{r,\infty})}\leqslant C_{\vec{p},r,n}\|f\|_{L^{p_2}(L^{p_1,\infty})},\tag{4.8}$$

$$\|L_\gamma f\|_{L^{p_2,\infty}(L^{r,\infty})}\leqslant C_{\vec{p},r,n}\|f\|_{L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})},\tag{4.9}$$

关于其他情形的 $\vec{p}$ 和 $\vec{q}$, 有

$$\|L_\gamma f\|_{L^{q_2,\infty}(L^{q_1})}\nleqslant C_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{p_2,\infty}(L^{p_1})}.$$

如果 $p_2 \neq q_2$, 那么,

$$\|L_\gamma f\|_{L^{q_2}(L^{q_1,\infty})} \nleqslant C_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{p_2}(L^{p_1,\infty})};$$

如果 $p_2 \neq q_2$, 那么,

$$\|L_\gamma f\|_{L^{q_2,\infty}(L^{q_1,\infty})} \nleqslant C_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})}.$$

定理 4.13 (参见文献 [66, 定理 3.4]) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的非负可测函数, $0 < q_1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $0 < q_2 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ 满足齐次条件 $1/q_1 + 1/q_2 = 1/p_1 + 1/p_2 + \gamma/n$, 则

$$\|T_\gamma f\|_{L^{q_2,\infty}(L^{q_1,\infty})} \leqslant C_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{p_2,\infty}(L^{p_1,\infty})}. \tag{4.10}$$

特别地, 如果 $p_1q_2 = p_2q_1$, 那么,

$$\|T_\gamma f\|_{L^{\vec{q},\infty}} \leqslant C_{\vec{p},\vec{q},n}\|f\|_{L^{\vec{p},\infty}}. \tag{4.11}$$

在文献 [66] 中, 作者证明了上述结果可以推出 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

参考文献

1 Beckner W. Inequalities in Fourier analysis. Ann of Math (2), 1975, 102: 159–182

2 Brascamp H J, Lieb E H. Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions. Adv Math, 1976, 20: 151–173

3 Lieb E H, Loss M. Analysis. Providence: Amer Math Soc, 2001

4 Lieb E H. Gaussian kernels have only Gaussian maximizers. Invent Math, 1990, 102: 179–208

5 Grafakos L. Classical Fourier Analysis, 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249. New York: Springer-Verlag, 2014

6 Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970

7 Hardy G H, Littlewood J E. Some properties of fractional integrals, I. Math Z, 1928, 27: 565–606

8 Hardy G H, Littlewood J E. On certain inequalities connected with the calculus of variations. J Lond Math Soc (2), 1930, 5: 34–39

9 Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. Ann of Math (2), 1983, 118: 349–374

10 Carlen E, Loss M. Extremals of functionals with competing symmetries. J Funct Anal, 1990, 88: 437–456

11 Carlen E, Loss M. Competing symmetries, the logarithmic HLS inequality and Onofri's inequality on S^n. Geom Funct Anal, 1990, 2: 90–104

12 Riesz F. Sur une inégalité intégrale. J Lond Math Soc (2), 1930, 5: 162–168

13 Lieb E H. Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation. Stud Appl Math, 1977, 57: 93–105

14 Burchard A. A cases of equality in the Riesz rearrangement inequality. PhD Thesis. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 1994

15 Burchard A. Cases of equality in the Riesz rearrangement inequality. Ann of Math (2), 1996, 143: 499–527

16 Frank R L, Lieb E H. Inversion positivity and the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. Calc Var Partial Differential Equations, 2010, 39: 85–99

17 Frank R L, Lieb E H. A new, rearrangement-free proof of the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. In: Spectral Theory, Function Spaces and Inequalities. Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhäuser, 2012: 55–67

18 Frank R L, Lieb E H. Sharp constants in several inequalities on the Heisenberg group. Ann of Math (2), 2012, 176: 349–381

19 Li Y, Zhu M. Uniqueness theorems through the method of moving spheres. Duke Math J, 1995, 80: 383–417

20 Li Y, Zhang L. Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities for semilinear elliptic equations. J Anal Math, 2003, 90: 27–87
21 Li Y. Remark on some conformally invariant integral equations: The method of moving spheres. J Eur Math Soc (JEMS), 2004, 123: 153–180
22 Dou J, Zhu M. Reversed Hardy-Littewood-Sobolev inequality. Int Math Res Not IMRN, 2015, 2015: 9696–9726
23 Drury S W. Estimates for a multilinear form on the sphere. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1988, 104: 533–537
24 Gressman P T. On multilinear determinant functionals. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 2473–2484
25 Valdimarsson S I. A multilinear generalisation of the Hilbert transform and fractional integration. Rev Mat Iberoam, 2012, 28: 25–55
26 Beckner W. Geometric inequalities in Fourier analysis. In: Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein. Princeton: Princeton University Press, 1995: 36–68
27 Christ M. On the restriction of the Fourier transform to curves: Endpoint results and the degenerate case. Trans Amer Math Soc, 1985, 287: 223–238
28 Shi Z, Wu D, Yan D. On the multilinear fractional integral operators with correlation kernels. J Fourier Anal Appl, 2017, in press
29 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. Ann of Math (2), 1993, 138: 213–242
30 Beckner W. Logarithmic Sobolev inequalities and the existence of singular integrals. Forum Math, 1997, 9: 303–323
31 Shi Z, Wu D, Yan D. Necessary and sufficient conditions of doubly weighted Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. Anal Theory Appl, 2014, 30: 193–204
32 Wu D, Shi Z, Yan D. Sharp constants in the doubly weighted Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. Sci China Math, 2014, 57: 963–970
33 Wu D, Yan D. Sharp constants for a class of multilinear integral operators and some applications. Sci China Math, 2016, 59: 907–920
34 Christ M. Estimates for the k-plane transform. Indiana Univ Math J, 1984, 33: 891–910
35 Gressman P T. Sharp L^p-L^q estimates for generalized k-plane transforms. Adv Math, 2007, 214: 344–365
36 Christ M, Erdǒgan M B. Mixed norm estimates for a restricted X-ray transform. J Anal Math, 2002, 87: 187–198
37 Drury S W. L^p estimates for the X-ray transform. Illinois J Math, 1983, 27: 125–129
38 Christ M. Convolution, curvature and combinatorics: A case study. Internat Math Res Not, 1998, 1998: 1033–1048
39 Oberlin D M. Convolution with measures on hypersurfaces. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2000, 129: 517–526
40 Oberlin D M. Convolution with measures on polynomial curves. Math Scand, 2002, 90: 126–138
41 Oberlin D M. Affine dimension: Measuring the vestiges of curvature. Michgan Math J, 2003, 51: 13–26
42 Tao T, Wright J. L^p improving bounds for averages along curves. J Amer Math Soc, 2003, 16: 605–638
43 Drury S W. Restriction of Fourier transforms to curves. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1985, 35: 117–123
44 Drury S W, Marshall B P. Fourier restriction theorems for curves with affine and Euclidean arclengths. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1985, 97: 111–125
45 Drury S W, Marshall B P. Fourier restriction theorems for degenerate curves. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1987, 101: 541–553
46 Brascamp H J, Lieb E H, Luttinger J M. A general rearrangement inequality for multiple integrals. J Funct Anal, 1974, 17: 227–237
47 Chen T. On some determinant and matrix inequalities with a geometrical flavour. Trans Amer Math Soc, 2018, 370: 5179–5208
48 Bandle C. Isoperimetric Inequalities and Applications. Monographs and Studies in Mathematics, vol. 7. Boston: Pitman Publishing (Advanced Publishing Program), 1980
49 Burchard A. A short course on rearrangement inequalities. Http://www.math.toronto.edu/almut/rearrange.pdf, 2009
50 Eggleston H. Convexity. New York: Cambridge University Press, 1958
51 Gardner R. The Brunn-Minkowski inequality. Bull Amer Math Soc (NS), 2002, 39: 355–406
52 Gruber P. Convex and Discrete Geometry. New York: Springer-Verlag, 2007
53 Klain D. Steiner symmetrization using a finite set of directions. Adv in Appl Math, 2012, 48: 340–353
54 Pólya G, Szegö G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Annals of Mathematics Studies, Vol. 27.

Princeton: Princeton University Press, 1951
55 Webster R. Convexity. Oxford: Oxford University Press, 1994
56 Macbeath A M. An extremal property of the hypersphere. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1951, 47: 245–247
57 Kanazawa A. On the minimal volume of simplices enclosing a convex body. Arch Math, 2014, 102: 489–492
58 Chen T. On a geometric inequality related to fractional integration. J Fourier Anal Appl, 2018, 24: 321–370
59 Christ M. A sharpened Hausdorff-Young inequality. ArXiv:1406.1210, 2014
60 Benedek A, Panzone R. The space L^P, with mixed norm. Duke Math J, 1961, 28: 301–324
61 Benedek A, Calderón A P, Panzone R. Convolution operators on Banach space valued functions. Proc Natl Acad Sci USA, 1962, 48: 356–365
62 Fernandez D L. Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications. Pacific J Math, 1987, 129: 257–275
63 Rubio de Francia J L, Ruiz F J, Torrea J L. Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels. Adv Math, 1986, 62: 7–48
64 Kurtz D S. Classical operators on mixed-normed spaces with product weights. Rocky Mountain J Math, 2007, 37: 269–283
65 Torres R H, Ward E L. Leibniz's rule, sampling and wavelets on mixed Lebesgue spaces. J Fourier Anal Appl, 2015, 21: 1053–1076
66 Chen T, Sun W. Iterated and mixed weak norms with applications to geometric inequalities. ArXiv:1712.01064, 2018
67 Cleanthous G, Georgiadis A G, Nielsen M. Anisotropic mixed-norm hardy spaces. J Geom Anal, 2017, 27: 2758–2787
68 Huang L, Liu J, Yang D, et al. Atomic and Littlewood-Paley characterizations of anisotropic mixed-norm hardy spaces and their applications. ArXiv:1801.06251, 2018

Geometric inequalities in harmonic analysis

Ting Chen & Wenchang Sun

Abstract Geometric inequalities have been hot topics in analysis, geometry, PDE, probability and combinatorial theory. Among so many geometric inequalities, fractional integral inequalities exceptionally attract attention of analysts, which play an important role in Analysis. The reason is due to their diverse connections to questions regarding the restriction of the Fourier transform, Radon transform and the k-plane transform. In this paper, we simply review a series of fractional integral inequalities, some geometric extremal inequalities and symmetric decreasing rearrangement inequalities which are extremely useful analytic tools to deal with many classic extremal problems. Together with competing symmetries, we focus on presenting rearrangement method to determine the optimisers of some fractional integral inequalities. We also introduce some properties of Lebesgue spaces with mixed norms and consider some fractional integral inequalities in mixed norm spaces as well.

Keywords fractional integral operators, geometric extremal inequalities, optimisers, Lebesgue spaces with mixed norms, mixed weak norms, iterated weak norms

MSC(2010) 26D15, 42B20

doi: 10.1360/N012018-00081