



平面图 3 色可染的一个充分条件

亢莹利, 王应前*

浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004

E-mail: xiaokangyouxiang@163.com, yqwang@zjnu.cn

收稿日期: 2012-05-03; 接受日期: 2013-01-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271335) 资助项目

摘要 Steinberg 猜想既没有 4-圈又没有 5-圈的平面图是 3 色可染的. Xu, Borodin 等人各自独立地证明了既没有相邻三角形又没有 5-和 7-圈的平面图是 3 色可染的. 作为这一结果的推论, 没有 4-, 5-和 7-圈的平面图是 3 色可染的. 本文证明一个比此推论更接近 Steinberg 猜想的结果, 设 G 是一个既没有 4-圈又没有 5-圈的平面图, 若对每一个 $k \in \{3, 6, 7\}$, G 都不含 $(k, 7)$ -弦, 则 G 是 3 色可染的, 这里的 $(k, 7)$ -弦是指长度为 $7+k-2$ 的圈的一条弦, 它的两个端点将圈分成两条路, 一条路的长度为 6, 另一条路的长度为 $k-1$.

关键词 Steinberg 猜想 平面图 圈 弦 染色

MSC (2010) 主题分类 05C15, 68R10

1 引言

本文所研究的图是有限简单无向图, 文中未加定义的术语和记号参见文献 [1].

用 V 和 E 分别表示图 $G = (V, E)$ 的顶点集和边集. 若映射 $\phi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ 满足 $uv \in E$ 时, $\phi(u) \neq \phi(v)$, 则称 ϕ 是 G 的一个 k -染色. 若 G 有 k -染色, 则 G 是 k -可染的. 设 H 是 G 的一个点导出子图, ϕ 是 H 的一个 k -染色. 若 G 有一个 k -染色 φ 使得 φ 在 H 上的限制等于 ϕ , 则 ϕ 可延拓到 G .

用 $G = (V, E, F)$ 表示一个以 F 为面集的平面图. 著名的四色定理告诉我们, 每个平面图都是 4-可染的. 长度为 k 的圈简称为 k -圈. 早在 1959 年, Grötzsch [2] 证明了第一个三色定理: 不含 3-圈的平面图是 3-可染的. 1976 年, Steinberg [3] 猜想: 既不含 4-圈又不含 5-圈的平面图是 3-可染的. 鉴于该猜想的研究长期无进展, Erdős [4] 提出了这样一个问题: 是否存在一个正整数 k 使得不包含 4-至 k -圈的平面图都是 3-可染的? Abbott 和 Zhou [5] 证明了这样的 k 确实存在, 且 $k \leq 11$. 之后 Borodin [6], Sanders 和 Zhao [7] 分别独立地改进 k 值到 9. 接着 Borodin 等人 [8] 再一次将 k 值降到了 7. 更确切地说, Borodin 等人 [8] 证明了如下结果.

定理 A 不含 4-至 7-圈的平面图是 3-可染的.

事实上, 为了证明定理 A, 他们证明了一个更强的色延拓定理.

定理 B 不含 4-至 7-圈的连通平面图的任意 8-至 11-面的 3-染色可以延拓成整个图的 3-染色.

在从定理 A 到 Steinberg 猜想的探索过程中, Xu^[9,10] 和 Borodin 等人^[11] 利用定理 B 证明了不含相邻三角形和 5- 和 7- 圈的平面图是 3- 可染的. 这一结果蕴涵着如下结果.

定理 C 不含 4-, 5- 和 7- 圈的平面图是 3- 可染的.

关于平面图 3- 可染的其他充分条件可参见文献 [12–22]. 本文继续研究平面图 3- 可染的新充分条件, 在方法和技巧方面从不同角度做了些许新的尝试, 利用定理 B 证明了一个比定理 C 更强的结果.

表述本文结果之前先引进一个概念. 弦是指圈或路上不相继的两个顶点间的一条边. 设 $e = xy$ 是圈 C 的一条弦, P_1, P_2 是 C 上位于 x 和 y 之间的两条路. 如果 $C_i = P_i \cup \{e\}$ 的长度是 $k_i, i = 1, 2$, 那么 e 叫做 C 的一条 (k_1, k_2) - 弦. 用 $\mathcal{G}$ 表示所有不含 4- 和 5- 圈的连通平面图形成的图类. 本文将证明如下结果.

定理 1 设 $G \in \mathcal{G}$. 若对每一个 $k \in \{3, 6, 7\}$, G 都不含 $(k, 7)$ - 弦, 则 G 是 3- 可染的.

后面将会用到如下的术语和记号. 设 $G = (V, E, F)$ 是一个平面图. 对于 $v \in V$, 用 $d(v)$ 和 $N(v)$ 分别表示 v 在 G 中的度数和邻域. 若 $d(v) = k$, 则称 v 是一个 k - 点. 类似地, 若 $d(v) \geq k$ ($d(v) \leq k$), 则称 v 为一个 k^+ - 点 (k^- - 点). 对于 $f \in F$, 用 $V(f)$ 和 $b(f)$ 分别表示 f 的顶点集和边界. 边界 $b(f)$ 的长度记作 $d(f)$, 叫做 f 在 G 中的度数. 可像顶点那样定义 k - 面、 k^+ - 面和 k^- - 面的概念. 用 f_0 表示 F 中含有无穷远点的那个面, 叫做 G 的无界面或外面, F 中其余的面叫做 G 的内面. f_0 上的顶点叫做 G 的外点, 其余的顶点叫做 G 的内点. 若面 f 的边界点依某个时针方向依次为 $u_1, u_2, \dots, u_n$, 则记 $f = [u_1 u_2 \cdots u_n]$. 若两个面 (或圈) f 和 f' 至少有一条公共边, 则称它们是相邻的. 若它们恰有一条公共边, 则称它们是正常相邻的. 用 $|C|$ 表示圈 C 的长度, 即 C 的边数. 长度为 k 的圈简称为 k - 圈. 常将 3- 圈叫做三角形. 关联三角形的顶点和边分别叫做三角点和三角边. 用 $\text{int}(C)$ 和 $\text{ext}(C)$ 分别表示严格落在 C 内部和外部的点所形成的集合. 由此,

$$\text{Int}(C) = G - \text{ext}(C), \quad \text{Ext}(C) = G - \text{int}(C)$$

是 G 的两个点导出子图. 若圈 C 满足 $\text{int}(C) \neq \emptyset$ 和 $\text{ext}(C) \neq \emptyset$, 则称 C 为分离圈. 为简洁起见, 今后用 C 既表示圈 C 的顶点集 $V(C)$ 又表示它的边集 $E(C)$. 由于本文所研究的图不含有 4- 和 5- 圈, 把 $(k, 7)$ - 弦, $k \in \{3, 6, 7\}$ 统称为 $(7^-, 7)$ - 弦.

最后, 引进坏圈和好圈的概念. 设 $G = (V, E, F)$ 是一个不含 4-, 5- 圈和 $(7^-, 7)$ - 弦的连通平面图, C 是 G 中长度至多为 10 的一个圈. 若 $\text{Int}(C)$ 有子图 H 以 C 为外面边界且与图 1 中的某个图同构, 则称 C 是坏圈 (这时 H 叫做坏圈 C 的一个坏分割), 否则称 C 为好圈. 根据坏圈的定义, 若 C 是坏圈, 则 $|C| = 9$. 因此, 8⁻- 和 10- 圈都是好圈.

因为 G 不含 4-, 5- 圈和 $(7^-, 7)$ - 弦, 下面的注是显而易见的.

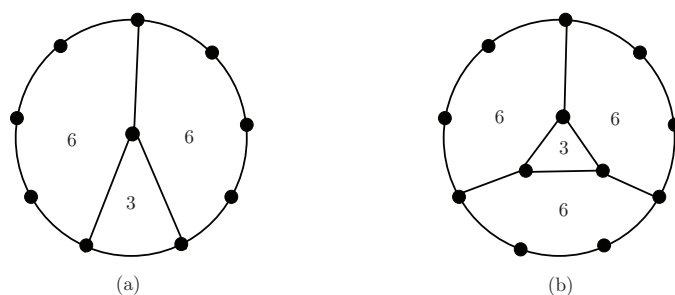


图 1 G 中的坏圈

注 1 设 C 是 G 中的一个好圈.

(1) 若 $|C| \leq 6$ 或 $|C| = 8$, 则 C 无弦.

(2) 若 $|C| = 7, 9$, 则 C 至多有一条弦, 且有一条弦时, 这条弦为三角弦.

(3) 若 $|C| = 10$, 则 C 至多有多条弦. 准确地说, 若 C 恰有一条弦, 则这条弦是 $(3, 9)$ - 或 $(6, 6)$ - 弦; 若 C 恰有两条弦, 则这两条弦全是 $(3, 9)$ - 弦.

2 引理

为了证明定理 1, 需证明一个比定理 1 更强的结论.

定理 2 设 $G \in \mathcal{G}$ 且不含 $(7^-, 7)$ - 弦. 若 G 的外面 f_0 的边界 $b(f_0) = D$ 是一个好圈, 则 $G[V(D)]$ 的任意一个 3- 染色都可延拓成 G 的一个 3- 染色.

设 G 是定理 2 关于 $\sigma(G) = |V(G)| + |E(G)|$ 最小的一个反例, 其中 f_0 是 G 的外面, 且 f_0 的边界 $D = b(f_0)$ 是一个好圈. 根据 G 的选取, $G[V(D)]$ 有一个 3- 染色, 记作 ϕ , 它不可以延拓成 G 的一个 3- 染色. 由此出发, 可得到 G 的一系列结构性质.

引理 1 若 $v \in \text{int}(D)$, 则 D 在 $G - v$ 中未变坏.

证明 若 D 在 $G - v$ 中变坏了, 则 $G - v$ 有一个坏剖分 H . 将 v 重新插入到 $G - v$ 中, H 仍是 $G = \text{Int}(D)$ 的一个坏剖分, 说明 D 在 G 中是坏的, 矛盾. $\square$

引理 2 若 $v \in \text{int}(D)$, 则 $d(v) \geq 3$.

证明 假设 $d(v) \leq 2$. 根据引理 1 和 G 的极小性, ϕ 可以延拓至 $G - v$. 然后可给 v 染不同于其邻点的颜色, 说明 ϕ 可以延拓至 G , 矛盾. $\square$

引理 3 G 是 2- 连通的, 因此 G 的每个面的边界都是圈.

证明 否则, G 有一个悬挂块 B 含有割点 v . 首先根据引理 1 和 G 的极小性, ϕ 可以延拓至 $G - (B - v)$. 其次, B 是 3- 可染的. 若 B 不含三角形, 根据 Grötzsch 定理, B 是 3- 可染的; 否则, B 含有一个三角形 T , 给 T 一个 3- 染色, 根据 G 的极小性, 这个 3- 染色可以延拓到 B . 这样, 至多对 B 进行一个色置换, ϕ 可以延拓成 G 的一个 3- 染色, 矛盾. $\square$

引理 4 G 不含分离好圈.

证明 假设 G 有一个分离好圈 S . 根据引理 1 和 G 的极小性, ϕ 首先可以延拓至 $G - \text{int}(S)$, 然后根据 S 是好圈及 G 的极小性, S 上的 3- 染色又可延拓至 $\text{Int}(S)$. 因此, ϕ 可以延拓至整个图 G , 矛盾. $\square$

图 1 中严格落在坏圈内部的顶点叫做该坏圈的核. 图 1 中的一个内面叫做相应坏圈的胞腔. 设 C 是 G 中的一个坏圈, u 是 C 的一个核, e 是出现在图 1 中与 u 相关联的边. 若 e 的另一端点属于 C , 则称 e 为 u 或 C 的一条腿. e 的位于 C 上的那个端点叫做 u 或 e 的脚.

注 2 若 C 是 G 中的一个坏圈, 则下列事实成立:

(1) C 只有两类胞腔. 一类称为 3- 胞腔, 另一类称为 6- 胞腔, 这是因为它们在 $\text{Int}(C)$ 的一个坏剖分 H 中分别对应于 H 的内 3- 面和内 6- 面. 依定义, 坏圈 C 的一个胞腔是 G 的一个点导出子图. 但是根据引理 4 和注 1, 每个胞腔在 G 中是一个面. 因此, 若 C 是 G 的一个坏圈, 则 $\text{Int}(C)$ 同构于图 1 中的两个图之一.

(2) 设 $u_i v_i$ 是坏圈 C 的以 v_i 为脚的腿, $i = 1, 2$. 若 v_1 和 v_2 在 C 上是相邻的, 则 $u_1 = u_2$.

(3) 若 e 是坏圈 C 的一条边, 则 e 关联一个带有 $(3, 6)$ - 弦的 7- 圈.

(4) 坏圈 C 要么只有一个核, 要么有三个核. 有三个核时, 这三个核两两相邻.

引理 5 D 无弦.

证明 若 D 有一条弦 e , 则 e 将 G 分成两个子图 G_1 和 G_2 . 设 D_i 是 G_i 的外面边界, $i = 1, 2$. 显然 G_1 和 G_2 均不含 4-, 5- 圈及 $(7^-, 7)$ - 弦. 用 ϕ_i 表示 ϕ 在 D_i 上的限制, $i = 1, 2$. 若 D_1 和 D_2 都是好圈, 根据 G 的极小性, ϕ_1, ϕ_2 可分别延拓到 G_1, G_2 , 说明 ϕ 可以延拓到 G , 矛盾. 因此 D_1 和 D_2 中至少有一个是坏圈. 不妨设 $|D_1| \leq |D_2|$. 由 $|D_1| + |D_2| = |D| + 2 \leq 12$, 坏圈的长度为 9, 可得 $|D_1| = 3, |D_2| = 9$. 于是 D_2 是坏圈. 根据注 2(1), $\text{Int}(D_2)$ 同构于图 1(a) 或者图 1(b). 由注 2(3), e 是 $\text{Int}(D_2)$ 的某个 7- 圈 C 的一条边. 这表明 e 是 G 中的一条 $(3, 7)$ - 弦 (准确地说, 是 $C \cup D_1$ 的 $(3, 7)$ - 弦), 与题设相矛盾. $\square$

引理 6 设 $P = xyz$ 是 G 的一条长度为 2 的路. 若 x 和 z 是 G 的外点, 而 y 是 G 的内点, 则 xz 是 D 的一条边.

证明 反设 $xz \notin E(D)$. 令 P_1 和 P_2 是 D 上位于 x 和 z 之间的两条路. 设

$$D_i = P_i \cup P, \quad i = 1, 2.$$

不妨设 $|D_1| \leq |D_2|$. 因为 $xz \notin E(D)$, 所以 $|D_1| \geq 4$. 又因为

$$|D_1| + |D_2| = |D| + 4 \leq 14,$$

所以 $|D_1| \leq 7$. 根据 G 不含 4- 和 5- 圈, 有两种情况需要考虑.

(1) $|D_1| = 6$.

此时 $|D_2| \in \{6, 7, 8\}$. 由引理 4 和注 1, D_1 是一个 6- 面. 显然 D_2 是好圈. 如果 $|D_2| = 6$ 或 8, 根据引理 4 和注 1, D_2 也是一个面, 于是 $d(y) = 2$, 这与引理 2 相矛盾. 如果 $|D_2| = 7$, 则 $|D| = 9$. 令 y' 是 y 的异于 x 和 z 的一个邻点. 由引理 4 和注 1 知, yy' 是 D_2 的一条 $(3, 6)$ - 弦, 因此 $\text{Int}(D)$ 有一个坏剖分, 见图 1(a), 此说明 D 是一个坏圈, 矛盾.

(2) $|D_1| = 7$.

这时 $|D_2| = 7$, 且 D_1 和 D_2 都是好圈. 由引理 4 和注 1 知, yy' 是 D_1 或 D_2 的一条 $(3, 6)$ - 弦, 这说明 G 有一条 $(3, 7)$ - 弦, 矛盾. $\square$

设 P 是 G 的一条长度为 k 的路. 若 P 的两个端点是 G 的外点, 其余点是 G 的内点, 则说 P 是 G 的一条内 k - 路.

引理 7 G 没有内 3- 路.

证明 反设 G 有内 3- 路 $P = wxyz$, 其中 $w, z \in D$, $x, y \in \text{int}(D)$. 令 x' 和 y' 分别是 x 和 y 的不在 P 上的邻点. 如同引理 6, 设 P_1 和 P_2 分别是 D 上位于 w 和 z 之间的两条路, 且 $D_i = P_i \cup P$, $i = 1, 2$. 不妨设 $|D_1| \leq |D_2|$. 显然 $|D_1| \geq 4$. 因为

$$|D_1| + |D_2| = |D| + 6 \leq 16,$$

所以 $|D_1| \leq 8$. 又 G 不含 4- 和 5- 圈, 故 $6 \leq |D_1| \leq 8$.

若 $|D_1| = 8$, 则 $|D_2| = 8$. 由注 1 和引理 4, D_1 和 D_2 都是 8- 面. 于是 $d(x) = d(y) = 2$. 这与引理 2 相矛盾.

假设 $|D_1| = 7$. 显然 $|D_2| \in \{7, 8, 9\}$. 若 $|D_2| = 7$, 则 D_2 是好圈且至多带有一条 $(3, 6)$ - 弦 (见注 1). 注意到 D 无弦, 根据引理 4, xx' 是 D_1 或 D_2 的一条 $(3, 6)$ - 弦, 因此 G 有一条 $(3, 7)$ - 弦, 矛盾. 若 $|D_2| = 8$, 由引理 4 和注 1, D_2 是一个 8- 面. 说明 xx' 和 yy' 都是 D_1 的弦, 这与 7- 圈至多有一条

弦相矛盾. 最后设 $|D_2| = 9$. 注意到 D_1 是一个至多带有一条三角弦的好圈, 且若带有弦, 则这条弦是 xx' 或 yy' , 不妨设是 xx' . 于是 $y' \in \text{Int}(D_2)$. 若 D_2 是好圈, 根据引理 4, yy' 是 D_2 的一条弦. 根据引理 6, $y'z \in D$, 即 yy' 是 D_2 的一条三角弦, 说明 G 有一条 $(3, 7)$ - 弦, 矛盾. 因此 $y' \in \text{int}(D_2)$. 由引理 4, D_2 是坏圈, 即 y' 和 yy' 分别是 D_2 的核和腿. 由注 2(3), yz 是 G 的一条 $(7, 7)$ - 弦, 矛盾.

最后考虑 $|D_1| = 6$. 首先, 由引理 4 和注 1, D_1 是一个 6- 面. 若 D_2 是好圈, 由引理 4, xx' 和 yy' 都是 D_2 的弦. 根据引理 6, $x'w, y'z \in E(D)$, 即 $x'w$ 和 $y'z$ 都是三角弦, 说明 G 有 $(3, 7)$ - 弦, 矛盾. 若 D_2 是坏圈, 由注 2(1), D_2 同构图 1 中的两个图之一. 此时 xx' 和 yy' 是 D_2 的两条腿. 因为 x (作为 xx' 的脚) 和 y (作为 yy' 的脚) 是相邻的, 根据注 2(2), $x' = y'$. 因此 $\text{Int}(D_2)$ 同构图 1(a). 这说明 $\text{Int}(D)$ 同构图 1(b), 从而 D 是坏圈, 矛盾. $\square$

引理 8 设 $f = [v_1v_2 \cdots v_k]$ 是 G 的一个内面. 若 $k = 6$ 或 7 , 则 f 至少有 3 个相继内点.

证明 用 n 表示 f 上相继内点的最大个数. 反设 $n \leq 2$. 若 $n = 0$, 即 f 上的每个点都在 D 上, 由引理 5, $b(f) = b(f_0)$, 说明 f 是 G 的唯一内面. 因此, $G = b(f_0)$, 从而 ϕ 是 G 的一个 3- 染色, 这与 ϕ 不能延拓成 G 的一个 3- 染色相矛盾. 若 $n = 2$, 不妨假设 v_2, v_3 是 f 的两个相继内点, 即 v_1 和 v_4 是 D 上的点, 表明 G 有一条内 3- 路, 与引理 7 矛盾. 最后考虑 $n = 1$. 不妨假设 v_2 是 f 上的内点, 即 v_1 和 v_3 是 D 上的点, 根据引理 6, v_1v_3 是 D 上的一条边. 若 f 是一个 6- 面, 则 G 有一个 5- 圈 $v_1v_3v_4v_5v_6v_1$, 矛盾. 若 f 是一个 7- 面, 根据引理 4 和注 1, $C = v_1v_2v_3v_1$ 围出一个与 f 相邻的 3- 面, 因此 v_2 是内点且 $d(v_2) = 2$, 与引理 2 相矛盾. $\square$

引理 9 设 $f = [v_1v_2 \cdots v_6]$ 是一个内 6- 面, g 是与 f 相邻的一个面或圈.

(1) 若 g 是一个内 k - 面, $k \in \{3, 6, 7\}$, 则 f 和 g 正常相邻.

(2) 若 g 是一个带有一条 $(3, 6)$ - 弦 e 的 7- 圈, 则 f 和 g 或者正常相邻, 或者相交成一条长度为 2 的路 $P = xyz$, 其中 y 为 e 的一个端点.

证明 不妨设 v_1v_2 是 f 和 g 的一条公共边. 先来证明 (1), 根据 g 的大小, 有三种情形需要考虑.

(a) $g = [v_1v_2w]$ 是一个 3- 面.

为证 f 和 g 正常相邻, 依定义, 需证明 $w \notin \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 若 $w = v_3$, 则 G 会有 5- 圈 $wv_1v_6v_5v_4w$, 矛盾. 若 $w = v_4$, 则 G 会有 4- 圈 $wv_1v_6v_5w$, 矛盾. 这样, $w \neq v_3, v_4$. 由对称性, $w \neq v_6, v_5$.

(b) $g = [v_1v_2u_3u_4u_5u_6]$ 是一个 6- 面.

欲证 f 和 g 正常相邻, 只需证明

$$\{u_3, u_4, u_5, u_6\} \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} = \emptyset.$$

若 $u_3 = v_3$, 则 v_2 是内点且 $d(v_2) = 2$, 与引理 2 矛盾. 若 $u_3 = v_4, v_5, v_6$, 则 G 相应地会有 5-, 4-, 5- 圈, 矛盾. 故 $u_3 \notin \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 由对称性, $u_6 \notin \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 若 $u_4 = v_3$, 则 G 会有 5- 圈 $v_2u_4u_5u_6v_1v_2$. 若 $u_4 = v_4$, 则 G 会有 4- 圈 $u_4u_3v_2v_3u_4$. 若 $u_4 = v_5$, 则 G 会有 5- 圈 $u_4u_3v_2v_3v_4u_4$. 若 $u_4 = v_6$, 则 G 会有 4- 圈 $u_4u_3v_2v_1u_4$. 所以 $u_4 \notin \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 由对称性, $u_5 \notin \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 这样

$$\{u_3, u_4, u_5, u_6\} \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} = \emptyset.$$

(c) $g = [v_1v_2w_3w_4w_5w_6w_7]$ 是一个 7- 面.

需证明 $\{w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\} \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} = \emptyset$. 因证明过程与 (b) 相似, 此处略去细节.

再来证明 (2). 设 $g = v_1v_2t_3t_4t_5t_6t_7v_1$. 可分两种情形讨论如下.

情形 1 $v_3 = t_3$ 或 $v_6 = t_7$.

由对称性, 不妨设 $v_3 = t_3$. 这时, g 的唯一的一条弦 e 必与 v_2 相关联 (否则 $d(v_2) = 2$ 且 v_2 为内点, 矛盾), 结论已明.

情形 2 $v_3 \neq t_3$ 且 $v_6 \neq t_7$.

若 $v_3 = t_7$, 则 G 会有 5-圈 $v_1v_3v_4v_5v_6v_1$; 若 $v_3 = t_6$, 则 G 会有 4-圈 $v_1v_2t_6t_7v_1$; 若 $v_3 = t_5$, 则 G 会有 5-圈 $v_1v_2t_5t_6t_7v_1$, 因此, $v_3 \notin \{t_5, t_6, t_7\}$. 同理 $v_6 \notin \{t_3, t_4, t_5\}$. 注意到 $v_3 = t_4$ 和 $v_6 = t_6$ 不能同时成立, 否则 G 会有 5-圈 $v_1v_2t_4t_5t_6v_1$. 可以断言 $v_3 \neq t_4$ 且 $v_6 \neq t_6$. 否则, 不妨设 $v_3 = t_4$, $v_6 \neq t_6$, 但这时 G 有 6-圈 $v_1v_2t_4t_5t_6t_7v_1$ 分离 t_3 和 v_6 , 矛盾于引理 4. 至此表明了 $v_3, v_6 \notin \{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$. 下证 $v_4, v_5 \notin \{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$. 若 $v_4 = t_3$, 则 G 会有 5-圈 $v_1v_2v_4v_5v_6v_1$; 若 $v_4 = t_4$, 则 G 会有 4-圈 $v_4v_3v_2t_3v_4$; 若 $v_4 = t_5$, 则 G 会有 5-圈 $v_4v_3v_2t_3t_4v_4$; 若 $v_4 = t_6$, 则 G 会有 5-圈 $v_4v_3v_2v_1t_7v_4$; 若 $v_4 = t_7$, 则 G 会有 4-圈 $v_4v_3v_2v_1v_4$, 因此, $v_4 \notin \{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$. 同理, $v_5 \notin \{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$. 这样, $\{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\} \cap \{v_3, v_4, v_5, v_6\} = \emptyset$, 即 f 和 g 正常相邻. $\square$

注 3 为了利用 G 的极小性, 将引进变换把 G 变成一个更小的图. 但在变换过程中要保证题设未改变, 这要求所做的变换需保证:

- (1) 未产生环和重边;
- (2) 未产生新的 4-和 5-圈;
- (3) 未产生 $(7^-, 7^-)$ -弦;
- (4) 未使 D 变坏 (只需要保证没有新的 3-和 6-圈产生);
- (5) 未产生边连接 D 上同色点;
- (6) 未粘合 D 上两个 (异色) 点.

引理 10 除 D 外 G 不含 6-圈.

证明 假定除 D 外, G 有一个 6-圈 C . 根据引理 4 和注 1, C 是一个 6-面 f 的边界, 设 $C = b(f) = v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$. 因为 G 不含 $(3, 7^-)$ -弦, 所以 f 至多相邻一个 3-面. 有两种情形要讨论.

情形 1 f 不与任何 3-面相邻.

由引理 8 知, f 至少关联 3 个相继内点, 不妨设为 v_1, v_2, v_3 . 因为 v_3 为内点, 所以 $d(v_4) \geq 3$. 对于 $i = 1, 2, 3, 4$, 令 v'_i 是 v_i 不在 f 上的一个邻点. 对 G 作变换 $\mathbb{T}_\nu$: 将点 v_2 和 v_6 , v_3 和 v_5 分别粘成新点 v_{26} , v_{35} ; 相应地, 边 v_1v_2 和 v_1v_6 , v_4v_3 和 v_4v_5 , 以及 v_2v_3 和 v_6v_5 分别粘成新边 v_1v_{26} , v_4v_{35} , 以及 $v_{26}v_{35}$, 得到一个比原图 G 更小的图, 记为 G_1 .

若 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(1)–3(6), 则根据 G 的极小性, ϕ 可延拓到 G_1 . 再根据 G 中的 6-圈无弦可知, v_2 与 v_6 以及 v_3 与 v_5 在 G 中不相邻. 令

$$\phi(v_2) = \phi(v_6) = \phi(v_{26}), \quad \phi(v_3) = \phi(v_5) = \phi(v_{35}),$$

则 ϕ 可延拓到 G , 矛盾.

下面证明变换 $\mathbb{T}_\nu$ 的确满足注 3(1)–3(6).

因为 v_2 和 v_3 都是内点, 所以 $\mathbb{T}_\nu$ 没有粘合 D 上两个点, 即 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(6).

若 $\mathbb{T}_\nu$ 产生了环或重边, 则原图 G 中相应地有 5-圈或 4-圈, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(1).

若 $\mathbb{T}_\nu$ 产生了边连接了 D 上的同色点, 则原图 G 会有内 3-路, 与引理 7 矛盾. 或者根据引理 6, f 相邻一个 3-面, 与情形 1 的假设相矛盾. 所以 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(5).

为证明 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(2)–3(4), 先来证明 $\mathbb{T}_\nu$ 未产生新的 7-圈 (其中, 证明 $\mathbb{T}_\nu$ 满足注 3(2) 和 3(4), 只需证明 $\mathbb{T}_\nu$ 未产生新的 6-圈). 假设 $\mathbb{T}_\nu$ 产生了新的 7-圈 C_1 . 显然 C_1 至少含有 v_{26} 和 v_{35} 之一. 有两种子情形要讨论.

(1.1) C_1 恰含有 v_{26} 和 v_{35} 中一个点.

不失一般性, 设 C_1 恰含有 v_{26} . 那么在原图 G 中, v_2 和 v_6 间有一条长度至多为 7 的路, 记作 $P = v_2 z_1 \cdots z_k v_6$, $2 \leq k \leq 6$. 注意到 $v_3, v_5 \notin P$.

断言 1 $v_1 \notin P$.

显然 $v_1 \neq v_2, v_6$. 若 $v_1 = z_1$, 则

$$C_1 = v_{26} z_1 \cdots z_k v_{26} = v_6 v_1 \cdots z_k v_6$$

是原图 G 中的圈, 不是新产生的. 若 $v_1 = z_2$, 则在原图 G 中 $v_1 v_2$ 是三角边, 即 f 相邻 3-面 $[v_2 z_1 z_2]$. 若 $v_1 = z_3$, 则在原图 G 中有 4-圈 $v_2 z_1 z_2 z_3 v_2$. 以上说明 $v_1 \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. 由对称性, $v_1 \notin \{z_k, z_{k-1}, z_{k-2}\}$. 因此 $v_1 \notin P$.

断言 2 $v'_1 \notin P$.

根据 v'_1 的定义, $v'_1 \neq v_2, v_6$. 若 $v'_1 = z_1$, 则在原图 G 中 $v_1 v_2$ 是三角边, 即 f 相邻 3-面 $[v_1 v_2 z_1]$. 若 $v'_1 = z_2$, 则在原图 G 中有 4-圈 $v_1 v_2 z_1 z_2 v_1$. 若 $v'_1 = z_3$, 则在原图 G 中有 5-圈 $v_1 v_2 z_1 z_2 z_3 v_1$. 以上说明 $v'_1 \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. 由对称性, $v'_1 \notin \{z_k, z_{k-1}, z_{k-2}\}$. 因此 $v'_1 \notin P$.

根据断言 1 和 2, $C = P \cup v_6 v_1 v_2$ 是 G 中的一个 9-圈, 它分离了 v'_1 和 $\{v_3, v_5\}$. 由引理 4, C 是坏 9-圈, 根据注 2(1), v'_1 是 C 的核, 或者 v_3, v_5 是 C 的核. 根据注 2(4), 只能是 v'_1 是 C 的核. 根据注 2(3), $v_1 v_2$ 关联一个 7-圈, 说明 $v_1 v_2$ 是原图 G 的一个 (6, 7)-弦, 矛盾.

(1.2) C_1 含有 v_{26} 和 v_{35} 两个点. 又有两种子情形要讨论.

(1.2a) $v_{26} v_{35}$ 是 C_1 的一条边.

这时 G_1 中 v_{26} 和 v_{35} 之间有一条长度至多为 6 的路 $P_1 \neq v_{26} v_{35}$. 回到原图 G 中考察路 P_1 , 它是从 v_2 或 v_6 到 v_3 或 v_5 的一条路. 不失一般性, 可设 v_2 是 P_1 的一个端点. 若 v_3 是 P_1 的另一个端点, 则 C_1 是原图 G 中的圈, 不是新产生的. 因此 v_5 是 P_1 的另一个端点, 即 $P_1 = v_2 z_1 \cdots z_k v_5$, $1 \leq k \leq 5$.

断言 3 $v_4, v_1 \notin P_1$.

显然, $v_4 \neq v_2, v_5$. 若 $v_4 = z_1$, 则在原图 G 中 $v_2 v_3$ 是三角边, 即 f 相邻 3-面 $[v_2 v_3 z_1]$. 若 $v_4 = z_2$, 则在原图 G 中会有 4-圈 $v_2 v_3 z_2 z_1 v_2$. 若 $v_4 = z_3$, 则在原图 G 中会有 5-圈 $v_2 v_3 z_3 z_2 z_1 v_2$. 以上说明 $v_4 \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. 若 $v_4 = z_k$, 则 C_1 是原图 G 中的圈, 不是新产生的. 若 $v_4 = z_{k-1}$, 则在原图 G 中 $v_4 v_5$ 是三角边, 即 f 相邻 3-面 $[v_4 v_5 z_k]$. 以上说明 $v_4 \notin \{z_k, z_{k-1}\}$. 因此 $v_4 \notin P_1$. 同理, $v_1 \notin P_1$.

断言 4 $v'_4, v'_1 \notin P_1$.

依定义, $v'_4 \neq v_5$. 因 6-圈无弦, $v'_4 \neq v_2$. 若 $v'_4 = z_1$, 则在原图 G 中有 4-圈 $v_2 v_3 v_4 z_1 v_2$; 若 $v'_4 = z_2$, 则在原图 G 中有 5-圈 $v_2 v_3 v_4 z_2 z_1 v_2$. 以上说明 $v'_4 \notin \{z_1, z_2\}$. 若 $v'_4 = z_k$, 原图 G 中 $v_4 v_5$ 是三角边, 即 f 相邻 3-面 $[v_4 v_5 z_k]$; 若 $v'_4 = z_{k-1}$, 则在原图 G 中有 4-圈 $v_4 v_5 z_k z_{k-1} v_4$; 若 $v'_4 = z_{k-2}$, 则在原图 G 中有 5-圈 $v_4 v_5 z_k z_{k-1} z_{k-2} v_4$. 以上说明 $v'_4 \notin \{z_k, z_{k-1}, z_{k-2}\}$. 因此 $v'_4 \notin P_1$. 同理, $v'_1 \notin P_1$.

根据断言 3 和 4, $C = P_1 \cup v_2 v_3 v_4 v_5$ 是原图 G 中的一个 9-圈, 它分离了 v'_4 和 v'_1 (若 $v_3, v_6 \in P_1$, 则可以归结为 (1.1)). 由引理 4 知, C 是坏 9-圈, 且 v'_4 是 C 的核或者 v'_1 是 C 的核. 根据注 2(3), 原图 G 有 (6, 7)-弦, 矛盾.

(1.2b) $v_{26} v_{35}$ 是 C_1 的一条弦.

这时 v_{26} 和 v_{35} 将 C_1 分成两条路分别记作 P' 和 P'' , 令

$$C' = P' \cup v_{26} v_{35}, \quad C'' = P'' \cup v_{26} v_{35}.$$

由 (1.2a), C' 和 C'' 均不是新产生的圈. 又

$$|C'| + |C''| = |C| + 2 \leq 9,$$

不妨设 $|C'| \leq |C''|$. 因此 $3 \leq |C'| \leq 4$. 若 $|C'| = 3$, 则 $|C''| \leq 6$. 若 $|C'| = 4$, 则 $|C''| \leq 5$. 说明原图 G 中要么有 4-, 5- 圈, 要么有 (6, 7)- 或 (3, 7)- 弦, 矛盾.

以上证明了 $\mathbb{T}_\kappa$ 满足注 3(2) 和 3(4).

最后, 若 $\mathbb{T}_\kappa$ 不满足注 3(3), 即 $\mathbb{T}_\kappa$ 产生了一个新的 (7⁻, 7)- 弦 e , 也即 e 关联了一个 7⁻- 圈 C'_1 和一个 7- 圈 C'_2 . 根据上面的证明, $\mathbb{T}_\kappa$ 没有产生新的 7⁻- 圈, 这说明弦 e 是新产生的, 即 e 是 G_1 中的三条边 v_1v_{26} , $v_{26}v_{35}$ 和 $v_{35}v_4$ 之一. 这说明在 G 中 f 与 C'_2 相邻. 因为 f 不与任何 3- 面相邻, 所以根据引理 9 知, f 和 C'_2 正常相邻, 说明 G 有 (6, 7)- 弦, 矛盾. 因此 $\mathbb{T}_\kappa$ 满足注 3(3).

以上完成了对情形 1 的证明.

情形 2 f 恰相邻一个 3- 面, 不妨设这个 3- 面是 $g = [xv_5v_6]$.

注意这时 f 仍至少有 3 个相继内点, 但未必是 v_1 , v_2 和 v_3 . 仍像情形 1 中那样, 对 G 作变换 $\mathbb{T}$: 将点 v_2 和 v_6 , v_3 和 v_5 分别粘成新点 v_{26} , v_{35} ; 相应地, 边 v_1v_2 和 v_1v_6 , v_4v_3 和 v_4v_5 , 以及 v_2v_3 和 v_6v_5 分别粘成新边 v_1v_{26} , v_4v_{35} , 以及 $v_{26}v_{35}$, 得到一个比原图 G 更小的图, 记为 G_1 .

若 $\mathbb{T}$ 仍然满足注 3(1)–3(6), 则根据 G 的极小性, ϕ 可延拓到 G_1 . 再根据 G 中的 6- 圈无弦可知, v_2 与 v_6 以及 v_3 与 v_5 在 G 中不相邻. 令

$$\phi(v_2) = \phi(v_6) = \phi(v_{26}), \quad \phi(v_3) = \phi(v_5) = \phi(v_{35}),$$

则 ϕ 可延拓到 G , 矛盾. 因此, 注 3(1)–3(6) 中至少有一条在变换 $\mathbb{T}$ 下是不满足的.

下面将证明变换 $\mathbb{T}$ 不满足注 3(6), 即 $\mathbb{T}$ 粘合了 D 上的两个点.

假设 $\mathbb{T}$ 满足注 3(6), 将证明 $\mathbb{T}$ 也满足注 3(1)–3(5), 矛盾.

首先注意到 $\mathbb{T}$ 未粘合 D 上的两个点蕴涵着 $d(v_1), d(v_4) \geq 3$. 其次来逐一证明 $\mathbb{T}$ 的确满足注 3(1)–3(5).

若 $\mathbb{T}$ 产生了环或重边, 则原图 G 中就相应地有 5- 圈或 4- 圈, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}$ 满足注 3(1).

若 $\mathbb{T}$ 产生了边连接 D 上的两个同色点, 则原图 G 会有内 3- 路, 与引理 7 矛盾. 或者根据引理 6, f 相邻一个除 g 外的 3- 面, G 有 (3, 7)- 弦, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}$ 满足注 3(5).

若 $\mathbb{T}$ 产生了新的 7⁻- 圈, 设为 C_1 . 显然 C_1 至少含有 v_{26} 和 v_{35} 中的某一个点. 下面有两种子情形要讨论.

(2.1) C_1 恰含有 v_{26} 和 v_{35} 中的一个点.

不失一般性, 设 C_1 恰含有 v_{26} . 那么在原图 G 中, v_2 和 v_6 间有一条长度至多为 7 的路, 记作

$$P = v_2z_1z_2 \cdots z_kv_6, \quad 2 \leq k \leq 6.$$

显然 $v_3, v_5 \notin P$. 注意到上面的断言 1 和 2 在这里仍然成立. 故 $C = P \cup v_6v_1v_2$ 是 G 中的一个 9⁻- 圈, 它分离了 v'_1 和 v_3, v_5 . 由引理 4, C 是坏 9- 圈, 根据注 2(1), v'_1 是 C 的核, 或者 v_3, v_5 是 C 的核. 根据注 2(4), 只能是 v'_1 是 C 的核. 根据注 2(3), v_1v_2 关联一个 7- 圈, 说明 v_1v_2 是原图 G 的 (6, 7)- 弦, 矛盾.

(2.2) C_1 同时含有 v_{26} 和 v_{35} 两个点. 有两种子情形要讨论.

(2.2a) 如果 $v_{26}v_{35}$ 是 C_1 的一条边.

这时 v_{26} 和 v_{35} 之间有一条长度至多为 6 的路 P_1 . 回到原图 G 中考察路 P_1 , 它是从 v_2 或 v_6 到 v_3 或 v_5 的一条路. 不失一般性, 可设 v_2 是 P_1 的一个端点. 若 v_3 是 P_1 的另一个端点, 则 C_1 是原图 G 中的圈, 不是新产生的. 因此 v_5 是 P_1 的另一个端点, 即 $P_1 = v_2 z_1 \cdots z_k v_5$, $1 \leq k \leq 5$. 注意到上面的断言 3 和 4 在这里仍然成立. 故 $C = P_1 \cup v_2 v_3 v_4 v_5$ 是原图 G 中的一个 9- 圈, 它分离了 v'_4 和 v'_1 (若 $v_3, v_6 \in P_1$, 则可以归结为 (2.1)). 由引理 4 知, C 是坏 9- 圈, 且 v'_4 是 C 的核或者 v'_1 是 C 的核. 根据注 2(3), 原图 G 有 (6, 7)- 弦 $v_4 v_5$ 或者 $v_1 v_2$, 矛盾.

(2.2b) 如果 $v_{26} v_{35}$ 是 C_1 的一条弦, 则说明 v_{26} 和 v_{35} 将 C_1 分成两条路, 分别记作 P' 和 P'' . 令

$$C' = P' \cup v_{26} v_{35}, \quad C'' = P'' \cup v_{26} v_{35}.$$

由 (2.2a), C' 和 C'' 均不是新产生的圈. 又

$$|C'| + |C''| = |C| + 2 \leq 9,$$

不妨设 $|C'| \leq |C''|$. 因此 $3 \leq |C'| \leq 4$. 若 $|C'| = 3$, 则 $|C''| \leq 6$. 若 $|C'| = 4$, 则 $|C''| \leq 5$. 说明原图 G 中要么有 4-, 5- 圈, 要么有 (6, 7)- 或 (3, 7)- 弦, 矛盾.

因此 $\mathbb{T}$ 未产生新的 7- 圈, 即保证了 $\mathbb{T}$ 满足注 3(2) 和 3(4).

若 $\mathbb{T}$ 不满足注 3(3), 即 $\mathbb{T}$ 产生了一个新的 (7-, 7)- 弦 e , 也即 e 关联了一个 7- 圈 C'_1 和一个 7- 圈 C'_2 . 根据上面的证明, $\mathbb{T}$ 没有产生新的 7- 圈, 这说明 e 是新产生的, 即 e 是 G_1 中的三条边 $v_1 v_{26}$, $v_{26} v_{35}$ 和 $v_{35} v_4$ 之一. 这说明在 G 中 f 与 C'_1 , C'_2 相邻. 因为 f 不与除 g 外任何 3- 面相邻, 所以根据引理 9 知, f 与 C'_2 和 C'_1 中至少一个是正常相邻, 说明 G 有 (6, 7)- 弦, 矛盾. 因此 $\mathbb{T}$ 满足注 3(3).

至此证明了 $\mathbb{T}$ 不满足注 3(6), 即 $\mathbb{T}$ 粘合了 D 上的两个点. 不失一般性, 设这两个点是 v_2 和 v_6 . 若 $v_1 \notin D$, 由引理 6, $v_2 v_6 \in D$, 因此 G 有 5- 圈, 矛盾. 所以 $v_1 \in D$. 根据引理 8, v_3, v_4, v_5 全为 G 的内点. 令 v'_3, v'_4, v'_5 分别是 v_3, v_4, v_5 不在 f 上的一个邻点. 现在, $v_1, v_2, v_6 \in D$, $v_3, v_4, v_5 \notin D$. 对 G 作变换 $\mathbb{T}'$: 将点 v_1 和 v_5 , v_2 和 v_4 分别粘成新点 v_{15}, v_{24} ; 边 $v_1 v_6$ 和 $v_5 v_6$, $v_1 v_2$ 和 $v_5 v_4$, $v_2 v_3$ 和 $v_4 v_3$ 分别粘成新边 $v_6 v_{15}$, $v_{15} v_{24}$ 以及 $v_3 v_{24}$, 得到一个比原图 G 更小的图, 记为 G_2 . 若 $\mathbb{T}'$ 仍然满足注 3(1)–3(6), 则根据 G 的极小性, ϕ 可延拓到 G_1 . 再根据 G 中的 6- 圈无弦可知, v_2 与 v_6 以及 v_3 与 v_5 在 G 中不相邻. 令

$$\phi(v_2) = \phi(v_6) = \phi(v_{26}), \quad \phi(v_3) = \phi(v_5) = \phi(v_{35}),$$

则 ϕ 可延拓到 G , 矛盾. 因此, 注 3(1)–3(6) 中至少有一条在变换 $\mathbb{T}'$ 下是不满足的.

下面证明 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(1)–3(4) 及 3(6).

显然, $\mathbb{T}'$ 没有粘合 D 上两个点, 即 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(6).

若 $\mathbb{T}'$ 产生了环或重边, 则原图 G 中相应地有 5- 圈或 4- 圈, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(1).

为证明 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(2) 和 3(4), 只需证明 $\mathbb{T}'$ 未产生新的 7- 圈. 假设 $\mathbb{T}'$ 产生了新的 7- 圈 C_2 . 显然 C_2 至少含有 v_{15} 和 v_{24} 之一. 下面有两种情形要讨论.

(3.1) C_2 恰含有 v_{15} 和 v_{24} 中一个点.

如果 C_2 恰含有 v_{24} , 那么在原图 G 中, v_2 和 v_4 间有一条长度至多为 7 的路, 记作 $P = v_2 z_1 z_2 \cdots z_k v_4$, $2 \leq k \leq 6$. 显然 $v_1, v_5 \notin P$. 类似上面断言 1 和 2 的证明过程, 易证 $v_3, v'_3 \notin P$. 故 $C = P \cup v_2 v_3 v_4$ 是 G 中的一个 9- 圈, 它分离了 v'_3 和 v_1, v_5 . 由引理 4 知, C 是坏 9- 圈, 且 v'_3 是 C 的核. 根据注 2(3), $v_3 v_4$ 关联一个 7- 圈, 说明 $v_3 v_4$ 是原图 G 的 (6, 7)- 弦, 矛盾. 如果 C_2 恰含有 v_{15} . 那么在原图 G 中, v_1 和 v_5 间有一条长度至多为 7 的路, 记作 $P = v_1 z_1 z_2 \cdots z_k v_5$, $2 \leq k \leq 6$. 显然 $v_2, v_4 \notin P$. 因为 $v_1 v_6 \in D$, 所以 $v_6 = z_1$. 此时 C_2 是原图 G 中的, 不是新产生的.

(3.2) C_2 同时含有 v_{24} 和 v_{15} 两个点.

因为 $v_2, v_1, v_6 \in D$, 所以 $v_{24}v_{15}$ 恰是 C_2 的一条边. 这时 v_{24} 和 v_{15} 之间有一条长度至多为 6 的路 P_1 . 回到原图 G 中考察路 P_1 , 它是从 v_2 或 v_4 到 v_1 或 v_5 的一条路. 不失一般性, 可设 v_2 是 P_1 的一个端点. 若 v_1 是 P_1 的另一个端点, 则 C_2 是原图 G 中的圈, 不是新产生的. 因此 v_5 是 P_1 的另一个端点, 类似上面断言 3 和 4 的证明过程, 易证 $v_3, v'_3 \notin P_1$. 因此 $C = P_1 \cup v_2v_3v_4v_5$ 是原图 G 中的一个 9-圈, 它分离了 v'_3 和 v_1 (若 $v_4, v_1 \in P_1$, 则可以归结为 (3.1)). 由引理 4 得, C 是坏 9-圈, 且 v'_3 是 C 的核. 根据注 2(3), 原图 G 有 (6,7)-弦 v_3v_2 , 矛盾.

以上证明了 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(2) 和 3(4).

若 $\mathbb{T}'$ 不满足注 3(3), 即 $\mathbb{T}'$ 产生了一个新的 (7-,7)-弦 e , 也即 e 关联了一个 7-圈 C'_1 和一个 7-圈 C'_2 . 根据上面的证明, $\mathbb{T}'$ 没有产生新的 7-圈, 这说明 e 是新产生的, 即 e 是 G_2 中的三条边 $v_6v_{15}, v_{24}v_{15}$ 和 $v_{24}v_3$ 之一. 又因为 $v_1v_6, v_1v_2 \in D$, 所以新边 v_6v_{15} 和 $v_{15}v_{24}$ 不是弦. 因此 $e = v_3v_{24}$. 说明在 G 中 f 与 C'_1, C'_2 相邻. 因为 f 不与除 g 外任何 3-面相邻, 根据引理 9, f 与 C'_2 和 C'_1 中至少一个是正常相邻, 说明 G 有 (6,7)-弦, 矛盾. 因此 $\mathbb{T}'$ 满足注 3(3).

综上, $\mathbb{T}'$ 满足注 3(1)–3(4) 及 3(6). 因此, $\mathbb{T}'$ 不满足注 3(5), 即 $\mathbb{T}'$ 产生了一条边 e , 它连接着 D 上两个 (同色) 点. 显然, $e = v_4v'_4$ 或 $e = v_5v'_5$. 若 $e = v_4v'_4$, 则 D 会有一条内 3-路 $v_2v_3v_4v'_4$, 与引理 7 矛盾. 故 $e = v_5v'_5$. 注意到 $v_1, v'_5 \in D$, 且 $\phi(v'_5) = \phi(v_1)$. 设 $\phi(v'_5) = \phi(v_1) = \alpha$. 由引理 6, $v'_5v_6 \in D$, 说明 $v'_5 = x$, 即 $v_6x \in D$.

若 $\phi(v_6) = \phi(v_2) = \beta$, 则可先将 v_1 改染成 γ . 此时 $\mathbb{T}'$ 仍满足注 3(1)–3(4) 及 3(6), 且 $\mathbb{T}'$ 还满足注 3(5), 这时 D 上的新染色 ϕ' 可以延拓到 G_2 , 进而到 G . 之后将 v_1 重新染回 α , 说明 D 上的染色 ϕ 可以延拓到 G , 矛盾. 因此 $\phi(v_6) \neq \phi(v_2)$, 不妨设 $\phi(v_6) = \beta, \phi(v_2) = \gamma$.

若 $|D| \leq 9$, 则 D 上 x 和 v_2 间的最长路并上 $xv_5v_4v_3v_2$ 形成了一个 10-圈 C^* . 由上面知 $v'_4 \in \text{int}(C^*)$, 即 C^* 分离了 v'_4 和 v_1 . 由引理 4 知, C^* 是原图 G 的一个坏 9-圈. 根据注 2(3), G 有 (6,7)-弦, 矛盾. 因此, $|D| = 10$.

综上, G 和 ϕ 满足

$$|D| = 10, \quad v_2v_1v_6x \in D, \quad \phi(v_6) = \beta, \quad \phi(v_2) = \gamma, \quad \phi(v_1) = \phi(x) = \alpha.$$

这时, 对 G 作变换 $\mathbb{T}''$: 删掉 v_1, v_6 , 将点 v_2 和 v_5 粘成新点 v_{25} 得到一个比原图 G 更小的图 G_3 和一个新的外面边界 D' . 注意到

(i) G_3 的外面边界 D' 上的 3-染色 ϕ' 仍然是正常的.

(ii) 因为 $|D'| = 8$, 所以 D' 是一个好圈.

(iii) $\mathbb{T}''$ 没有产生环, 重边, 否则, 原图 G 中就相应地有 4-, 5-圈.

(iv) $\mathbb{T}''$ 没有产生新的 4-, 5-圈. 这是因为除了一个新的 3-面 $g' = [v_{25}v_3v_4v_{25}]$ 外, 没有新的 7-圈产生: 假设 $\mathbb{T}''$ 产生了一个不同于 g' 的新的 7-圈 $C_3 = v_{25}Pv_{25}$. 那么 $C = v_5v_6v_1v_2Pv_5$ 是 G 中的一个 10-圈. 如果 $v_3, v_4 \in P$, 那么 G 会有 4-, 5-圈或者 (3,7)-, (6,7)-弦, 矛盾. 因此 v_3, v_4 至少有一个点是不属于 P , 不妨设 $v_3 \notin P$. 显然 C_3 分离了 v_3 和 D 上一个点 (因为 $|D| = 10$). 由引理 4, C 是坏 9-圈, 并且 v_3 是核. 根据注 2(3), v_5v_6 是原图 G 的 (3,7)-弦, 矛盾.

(v) $\mathbb{T}''$ 没有产生新的 (7-,7)-弦 e . 假设 $\mathbb{T}''$ 产生了新的 (7-,7)-弦 e , 即 e 关联一个 7-圈 C'_1 和一个 7-圈 C'_2 . 显然 $\mathbb{T}''$ 没有产生新边. 由 (iv) 知, $\mathbb{T}''$ 也没有产生除 3-面 g' 外新的 7-圈. 说明 $\mathbb{T}''$ 新产生的 3-面 g' 使得 G_3 含有 (3,7)-弦. 因此 $C'_1 = g'$. 这时 f 与 C'_2 相邻, 根据引理 9, G 有 (6,7)-弦, 矛盾.

这样, 由 G 的极小性, D' 上的 3 染色 ϕ' 可以延拓到 G_3 . 由于 $\phi(v_1) = \alpha$ 和 $\phi(v_6) = \beta$, ϕ' 到 G_3 的延拓可修正为 D 上的 3-染色 ϕ 到 G 上的一个延拓, 矛盾. 这个最终矛盾完成了对情形 2 的证明, 从而证明了引理 10. $\square$

推论 1 G 没有坏圈.

推论 2 G 中 7-圈无弦.

引理 11 除 D 外, G 不含 7-圈.

证明 假定除 D 外, G 有一个 7-圈 C . 根据引理 4 和推论 2, C 是一个 7-面 f 的边界. 设 $C = b(f) = v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_1$. 因为 G 不含 (3, 7)-弦, 所以 f 不与任何 3-面相邻. 由引理 8 知, f 至少关联 3 个相继的内点, 不妨设为 v_2, v_3, v_4 . 因为 v_2, v_4 为内点, 所以 $d(v_1), d(v_5) \geq 3$. 对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 令 v'_i 是 v_i 不在 f 上的一个邻点. 对 G 作变换 $\mathbb{T}$: 将 v_2 和 v_7 , v_4 和 v_6 分别粘成新点 v_{27}, v_{46} , 相应地, 边 v_1v_2 和 v_1v_7 , 边 v_5v_4 和 v_5v_6 分别粘成新边 v_1v_{27}, v_5v_{46} , 得到了一个比原图 G 更小的图, 记为 G' . 如果 $\mathbb{T}$ 满足注 3(1)–3(6), 则据 G 的极小性, ϕ 可延拓到 G' . 再根据 G 中 7-圈无弦可知, v_2 与 v_7 以及 v_4 与 v_6 在 G 中不相邻. 令

$$\phi(v_2) = \phi(v_7) = \phi(v_{27}), \quad \phi(v_4) = \phi(v_6) = \phi(v_{46}),$$

则 ϕ 可延拓到 G , 矛盾.

下面证明变换 $\mathbb{T}$ 的确满足注 3(1)–3(6).

因为 v_2 和 v_4 是内点, 所以 $\mathbb{T}$ 没有粘合 D 上两个点, 即 $\mathbb{T}$ 满足注 3(6).

若 $\mathbb{T}$ 产生了环或重边, 则原图 G 中相应地有 6-或 4-圈, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}$ 满足注 3(1).

若 $\mathbb{T}$ 产生了边连接 D 上同色点, 则原图 G 会有内 3-路, 与引理 7 矛盾; 或者根据引理 6, f 相邻一个 3-面, 从而 G 有 (3, 7)-弦, 矛盾. 所以 $\mathbb{T}$ 满足注 3(5).

注意到 $\mathbb{T}$ 产生了一个新的 3-面 $g = [v_{27}v_3v_{46}]$. 若因 g 的产生, D 在 G' 中变坏了, 则 g 相邻一个 6-胞腔, 即原图 G 有 (6, 7)-弦, 矛盾. 若因 g 的产生, G' 有 (3, 7)-弦, 则原图 G 有 (7, 7)-弦, 矛盾. 为证明 $\mathbb{T}$ 满足注 3 中的 (2)–(4), 需证明除 $b(g)$ 外, $\mathbb{T}$ 未产生其他新的 7-圈. 假设 $\mathbb{T}$ 产生了这样一个新的 7-圈 C_1 . 显然 C_1 至少含有 v_{27} 和 v_{46} 之一. 有两种子情况要讨论.

(1) C_1 恰含有 v_{27} 和 v_{46} 中一个点.

不失一般性, 设 C_1 恰含有 v_{27} . 那么在原图 G 中, v_2 和 v_7 间有一条长度至多为 7 的路, 记作 $P = v_2z_1z_2 \dots z_kv_7$, $2 \leq k \leq 6$. 显然 $v_4, v_6 \notin P$. 类似断言 1 和 2 的证明过程, 易证 $v_1, v'_1 \notin P$. 则 $C = P \cup v_7v_1v_2$ 是 G 中的 9-圈, 它分离了 v'_1 和 $\{v_4, v_6\}$. 由引理 4 得, C_1 是坏 9-圈, 与推论 1 矛盾.

(2) C_1 含有 v_{27} 和 v_{46} 两个点. 分两种子情形讨论.

(2a) $v_{27}v_{46}$ 恰是 C_1 的一条边.

这时 v_{27} 和 v_{46} 之间有一条长度至多为 6 的路 P_1 . 回到原图 G 中考察路 P_1 , 它是从 v_2 或 v_7 到 v_4 或 v_6 的一条路. 若 P_1 以 v_6 和 v_7 为两 endpoint, 则 $v_2, v_4 \notin P_1$. 于是 C_1 是原图 G 中的圈, 不是新产生的; 若 P_1 以 v_2 和 v_4 为两 endpoint, 则 $v_6, v_7 \notin P_1$. 考虑到 $C_1 \neq b(g)$, 即 $P_1 \neq v_2v_3v_4$, 类似断言 1 和 2 的证明过程, 易证 $v_3, v'_3 \notin P_1$. 故 $C = P_1 \cup v_2v_3v_4$ 是原图 G 中的一个 8-圈, 它分离了 v'_3 和 $\{v_6, v_7\}$, 与引理 4 矛盾. 若 P_1 以 v_2 和 v_6 为两 endpoint (由对称性, P_1 以 v_4 和 v_7 为两 endpoint 的情况可作类似讨论), 则 $v_4, v_7 \notin P_1$. 类似断言 3 和 4 的证明过程, 易证 $v_1, v'_1 \notin P_1$. 故 $C = P_1 \cup v_2v_1v_6v_7$ 是原图 G 中的一个 9-圈, 它分离了 v'_1 和 v_4 . 与推论 1 矛盾.

(2b) $v_{27}v_{46}$ 是 C_1 的一条弦.

这时 v_{27} 和 v_{46} 将 C_1 分成两条路, 分别记作 P' 和 P'' . 令 $C' = P' \cup v_{27}v_{46}$, $C'' = P'' \cup v_{27}v_{46}$. 又 $|C'| + |C''| = |C| + 2 \leq 9$, 不妨设 $|C'| \leq |C''|$. 因此 $3 \leq |C'| \leq 4$.

先考虑 $C' \neq b(g)$. 由 (2a), C' 不是新产生的圈. 若 $|C'| = 3$, 则原图 G 有 (3, 7)- 弦, 矛盾. 若 $|C'| = 4$, 则原图 G 中有 4- 圈, 矛盾. 再考虑 $C' = b(g)$. 由 (2a), C'' 不是新产生的圈且 $|C''| \leq 6$. 这样, 原图 G 有 4-, 5- 和 6- 圈, 或者 (3, 7)- 弦, 矛盾.

以上证明了 $\mathbb{T}$ 满足注 3(2) 和 3(4).

最后, 若 $\mathbb{T}$ 不满足注 3(3), 即 $\mathbb{T}$ 产生了一个新的 (7-, 7)- 弦 e , 也即 e 关联了一个 7- 圈 C'_1 和一个 7- 圈 C'_2 . 根据上面的证明, $\mathbb{T}$ 没有产生新的异于 $b(g)$ 的 7- 圈, 这说明 e 是新产生的, 即 e 是 G_1 中的 v_1v_{27} 和 $v_{46}v_5$ 之一. 这说明 f 与 C'_1 或 C'_2 相邻, 即原图 G 有 (7-, 7)- 弦, 矛盾. 因此 $\mathbb{T}$ 满足注 3(3).

以上完成了引理 11 的证明. □

3 主要定理的证明

先来完成定理 2 的证明.

首先, 由第 2 节的引理知, 除 D 外 G 不含 6- 和 7- 圈. 其次, 根据题设, $|D| \in \{3, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

若 $|D| \in \{8, 9, 10\}$, 则 G 没有 4- 至 7- 圈, 根据定理 B, 定理 2 成立.

若 $|D| = 3$, 设 ϕ 是 D 的一个 3- 染色. 因为 G 没有 4- 至 7- 圈, 据定理 A, G 有一个 3- 染色 φ . 不妨设 φ 在 D 上的限制就是 ϕ , 否则, 对 φ 的色类作一个色置换, 得到 G 的另一个 3- 染色 φ' 使得 φ' 在 D 上的限制就是 ϕ . 因此, $|D| = 3$ 时定理 2 也成立.

若 $|D| = 6$, 则任取一条边 $e \in D$, 在边 e 上插入两个 2- 点得到新图 G' , 并将 ϕ 延拓到新的 2- 点上. 根据定理 B, 可以将 G' 的外面边界的染色 ϕ' 延拓到整个图 G' , 由此可得 ϕ 到 G 的一个延拓 (显然 e 不可能是三角边, 否则 G 中有除 D 外的 7- 圈, 与引理 11 矛盾).

最后, 若 $|D| = 7$, 任取一条边 $e \in D$. 若 $e = uv$ 不是三角边, 则在 e 上插入两个 2- 点得到新图 G' . 先将 ϕ 延拓给新的点, 然后根据定理 B, 可以将 G' 的外面边界的染色 ϕ' 延拓到整个图 G' . 由此可得 ϕ 到 G 的延拓. 若 $e = uv$ 是三角边, 则删掉边 e 得到新图 G' . 设 D' 是 G' 的外面边界, 则 $|D'| = 8$. 设 w 是 u, v 的公共邻点. 根据引理 6 和 G 无 4- 圈, 除了 u 和 v 之外, w 不与 D' 上的任何其他点相邻, 因此, w 可以正常染好, 得到 D' 的一个 3- 染色 ϕ' . 根据定理 B, ϕ' 可延拓到整个图 G' . 由此可得到 ϕ 到 G 的延拓.

综上所述, 总可将 D 的 3- 染色 ϕ 延拓到 G , 这与 ϕ 不可延拓到 G 相矛盾, 此矛盾表明定理 2 没有反例, 从而定理 2 得证.

有了定理 2, 定理 1 的证明很容易, 如下:

若 G 没有三角形, 根据 Grötzsch 定理, G 是 3 可染的. 设 G 含有三角形 T , 给 T 一个 3 染色. 根据定理 2, T 的这个 3 染色可以分别延拓成 $\text{Int}(T)$ 和 $\text{Ext}(T)$ 的 3 染色, 也得到 G 是 3 可染的.

致谢 感谢审稿人改进文章的宝贵意见.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. Berlin: Springer, 2008

- 2 Grötzsch H. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss Z Martin-Luther-Univ Halle-Wittenberg Math-Nat Reihe*, 1959, 8: 109–120
- 3 Jensen T R, Toft B. *Graph Coloring Problems*. New York: Wiley, 1995
- 4 Steinberg R. The state of the three color problem. In: Gimbel J, Kenndy J W, Quintas L V, eds. *Graph Theory Notes of NYAS*, vol. 55. New York: Academy of Science, 1993, 211–248
- 5 Abbott H L, Zhou B. On small faces in 4-critical graphs. *Ars Combin*, 1991, 32: 203–207
- 6 Borodin O V. Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings. *J Graph Theory*, 1996, 21: 183–186
- 7 Sanders D P, Zhao Y. A note on the three coloring problem. *Graphs Combin*, 1995, 11: 91–94
- 8 Borodin O V, Glebov A N, Raspaud A, et al. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. *J Combin Theory Ser B*, 2005, 93: 303–311
- 9 Xu B G. On 3-colorable plane graphs without 5- and 7-cycles. *J Combin Theory Ser B*, 2006, 96: 958–963
- 10 Xu B G. On 3-colorable plane graphs without 5- and 7-cycles. *Discrete Math*, 2009, 1: 347–353
- 11 Borodin O V, Glebov A N, Montassier M, et al. Planar graphs without 5- and 7-cycles without adjacent triangles are 3-colorable. *J Combin Theory Ser B*, 2009, 99: 668–673
- 12 Lu H J, Wang Y Q, Wang W F, et al. On the 3-colorability of planar graphs without 4-, 7- and 9-cycles. *Discrete Math*, 2009, 309: 4596–4607
- 13 王维凡, 陈敏. 不含 4, 6, 8- 圈的平面图是 3- 可染的. *中国科学 A 辑*, 2007, 37: 982–992
- 14 Xu B G. A 3-color theorem on plane graph without 5-circuits. *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2007, 23: 1059–1062
- 15 Wang Y Q, Mao X H, Lu H J, et al. On 3-colorability of planar graphs without adjacent short cycles. *Sci China Math*, 2010, 53: 1129–1132
- 16 Wang Y Q, Zhang Q J. On 3-choosibility of triangle-free plane graphs. *Sci China Math*, 2011, 54: 1287–1298
- 17 Chen M, Wang W F. On 3-colorable planar graphs without short cycles. *Appl Math Lett*, 2008, 21: 961–965
- 18 Wang W F, Chen M. On 3-colorable planar graphs without prescribed cycles. *Discrete Math*, 2007, 307: 2820–2825
- 19 Luo X F, Chen M, Wang W F. On 3-colorable planar graphs without cycles of four lengths. *Inform Process Lett*, 2007, 103: 150–156
- 20 Chen M, Raspaud A, Wang W F. Three-coloring planar graphs without short cycles. *Inform Process Lett*, 2007, 101: 134–138
- 21 Borodin O V, Glebov A N. Planar graphs with neither 5-cycle nor close 3-cycle are 3-colorable. *J Graph Theory*, 2010, 66: 1–31
- 22 Borodin O V, Glebov A N, Raspaud A. Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. *Discrete Math*, 2010, 310: 2584–2594

A sufficient condition for a planar graph to be 3-colorable

KANG YingLi & WANG YingQian

Abstract Steinberg conjectured that every planar graph with neither cycle of length 4 nor cycle of length 5 is 3-colorable. Xu, independently, Borodin et al. proved that planar graphs without adjacent triangles and without 5- and 7-cycles are 3-colorable. As a corollary of this result, planar graphs without 4-, 5- and 7-cycles are 3-colorable. In this paper, we prove a result which is closer to the Steinberg’s conjecture than the corollary mentioned above. Let G be a planar graph without 4- and 5-cycles. G is 3-colorable if it has no $(k, 7)$ -chords for each $k \in \{3, 6, 7\}$, where a $(k, 7)$ -chord is a chord of a cycle of length $7 + k - 2$ whose two ends divide the cycle into two paths, one of which is of length 6 and the other of length $k - 1$.

Keywords Steinberg’s conjecture, planar graphs, cycles, chords, coloring

MSC(2010) 05C15, 68R10

doi: 10.1360/012012-253