



论 文

多站无源定位最佳配置分析

王本才^{①②*}, 何友^①, 王国宏^①, 修建娟^①

① 海军航空工程学院信息融合技术研究所, 烟台 264001

② 中国人民解放军 93286 部队, 沈阳 110141

* 通信作者. E-mail: springbook7559@126.com

收稿日期: 2010-03-01; 接受日期: 2010-08-17

国家自然科学基金 (批准号: 60801049)、全国优秀博士学位论文作者专项基金 (批准号: 200443) 和“泰山学者”建设工程专项经费资助项目

摘要 为了提高多站无源定位精度, 以 LS 算法的 GDOP 为基础对多站测向交叉定位的最佳配置形式进行了分析. 指出当目标位于多传感器形成的闭合区域内、外侧时, 其最佳配置形式是各相邻传感器间夹角相同, 且传感器位于以目标位置 (同时为坐标系原点) 为圆心的外接圆上; 如果在该最佳形式中没有对相邻夹角的限制, 则 LS 算法可以达到方差最小意义下的最优估计; 文中同时对最优估计及最佳配置条件下 LS 算法的一致性进行了分析. 仿真结果验证了最佳配置形式的分析, 并指出该形式可以应用到基于传感器管理的多站无源定位算法中.

关键词 多站无源定位 最佳配置 GDOP 夹角 一致性 最优估计

1 引言

多站无源定位中, 由于定位系统获得的目标特征信息增多, 有利于提高目标的定位精度^[1-3]; 加之无源定位本身具有众多优点^[4-6], 因此多站无源定位一直备受关注和研究. 但是现有研究大多侧重于多站定位方法和相应的定位算法^[7-9], 从多站优化配置的角度研究如何提高目标定位精度的则相对较少.

在多站测向交叉定位中, 传感器与目标间的相对位置能够对定位精度产生较大影响. 多传感器的最佳配置一般是指目标位置一定时, 系统如何配置传感器才能获得最佳的定位精度^[10]. 文献 [11] 在圆概率误差及模糊定位区域最小条件下研究了双站最优交会角问题, 得出只有当交会角满足一定数值 (110° 或 120°) 时定位精度才能达到最佳的结论; 文献 [12] 在最小误差椭圆条件下同样研究了该问题, 得出最优交会角仅决定于目标到双站基线的距离与基线长度的比值; 文献 [13] 表明多站的最佳配置形式是多站呈以目标位置为中心的凸多边形. 上述文献对研究多传感器的合理配置及管理算法均具有一定的指导意义. 需指出的是, 文献 [11, 12] 均是以双站基线为坐标系横轴所建立的局部坐标系下进行讨论的, 其结论是否适用于多站无源定位必须应用的全局坐标系还有待研究; 文献 [13] 是在作者直觉基础上由数值仿真方法得到的结论, 因此缺乏相应的理论依据.

本文在上述文献的分析基础上, 在全局坐标系下借助 LS (least square) 定位算法的 GDOP (geometry dilution of precision) 对双站及多站无源测向交叉定位的最佳配置问题展开研究. 本文假设目标位于所

由此可得 S_1, S_2 在全局坐标系下的 GDOP 为^[14]

$$G_2 = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \frac{1}{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)} \sqrt{\begin{matrix} (y_2 - y_1)^2(\cos^2 \theta_2 \sigma_{\theta_1}^2 + \cos^2 \theta_1 \sigma_{\theta_2}^2) \\ + (x_2 - x_1)^2(\sin^2 \theta_2 \sigma_{\theta_1}^2 + \sin^2 \theta_1 \sigma_{\theta_2}^2) \\ - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)(\sin 2\theta_2 \sigma_{\theta_1}^2 + \sin 2\theta_1 \sigma_{\theta_2}^2) \end{matrix}}. \quad (5)$$

记 S_1, S_2 方位线间关于 $\mathbf{X}$ 的夹角 (简称 S_1, S_2 间的夹角) $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$. 对 (5) 式求 θ_1, θ_2 的全微分并令结果为零, 同时假设 $\sin \Delta\theta \neq 0$ 且 $\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2}$, 经整理有

$$\frac{\sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1}{\cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_1} = \frac{2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}. \quad (6)$$

将 (2) 式代入 (6) 式, 可得

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi + 2\alpha. \quad (7)$$

此即全局坐标系下, 测量精度相同的两传感器在最小 GDOP 意义下获得最佳定位精度时的方位角约束关系. 该约束关系同两传感器间的相对位置 α 有关. 作为特例, 当 $\alpha = 0$ 时有

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi. \quad (8)$$

此即文献 [11] 的结果.

由 (7) 式可得 S_1, S_2 间的最优夹角为

$$\Delta\hat{\theta} = \pi + 2(\alpha - \theta_1). \quad (9)$$

假设图 1 中 $\angle S_1 \mathbf{X} S_2 = \Delta\hat{\theta}$. 做 $\angle S_1 \mathbf{X} S_2$ 的平分线 $\mathbf{X}V_3$, 则有

$$\angle S_1 \mathbf{X} V_3 = \pi/2 + \alpha - \theta_1. \quad (10)$$

则在 $\triangle S_1 V_3 \mathbf{X}$ 中, 有

$$\angle S_1 V_3 \mathbf{X} = \pi - (\theta_1 - \alpha) - (\pi/2 + \alpha - \theta_1) = \pi/2. \quad (11)$$

即 $\mathbf{X}V_3$ 为 $S_1 S_2$ 的中垂线, 此时 $\mathbf{X}$ 与 $\hat{\mathbf{X}}$ 重合、 V_3 与 V_2 重合. 这表明双站获得基线一侧的全局最佳定位精度时, 目标一定位于基线的中垂线上.

在 (7), (9) 式条件下对 (5) 式的求导方程进一步分析, 可得

$$\begin{cases} \theta_1 \approx 7\pi/36 + \alpha, \\ \theta_2 \approx 29\pi/36 + \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

则 (9) 式的最优夹角近似为 $\Delta\hat{\theta} = 11\pi/18$. 由此可知对于基线距离一定的两传感器, 其最佳配置形式是: 两传感器与目标间呈以双站基线为底边、夹角约为 $11\pi/18$ 的等腰三角形. 该配置形式如图 1 中 $\triangle S_1 S_2 \hat{\mathbf{X}}$ 所示, 此时目标与两传感器间的距离相等.

同文献 [11] 相比, 可知双站测向交叉定位在局部坐标系及全局坐标系下具有相同的最优夹角; 同文献 [12] 相比, 可知用不同的指标衡量定位精度时其最优夹角是不同的.

3 多站最佳配置

结合多站 LS 无源定位算法说明该问题. 对于传感器 $S_i (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3)$, 有非线性测量方程

$$\tan \theta_i = \frac{y_T - y_i}{x_T - x_i}. \quad (13)$$

由于测量误差的存在, (13) 式只是近似成立. 对该式线性化, 有

$$x_T \sin \theta_i - y_T \cos \theta_i = x_i \sin \theta_i - y_i \cos \theta_i. \quad (14)$$

对于所有传感器, 将 (14) 式写成如下矩阵形式:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_T = \mathbf{B}, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别为系数矩阵和数据向量, 且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin \theta_n & -\cos \theta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 \sin \theta_1 - y_1 \cos \theta_1 \\ x_2 \sin \theta_2 - y_2 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ x_n \sin \theta_n - y_n \cos \theta_n \end{bmatrix}.$$

该式的 LS 解为^[15]:

$$\mathbf{X}_{LS} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (16)$$

由 (16) 式可知, 若 $\mathbf{X}_{LS}$ 存在, 需

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (17)$$

可逆, 解得

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 $\det \mathbf{F}$ 表示 $\mathbf{F}$ 的行列式, 且

$$f_{11} = \sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i, \quad f_{22} = \sum_{i=1}^n \sin^2 \theta_i, \\ f_{12} = f_{21} = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i, \quad \det \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin^2 \Delta \theta_{ij},$$

其中 $\Delta \theta_{ij}$ 表示 S_i 与 S_j 间的夹角. (18) 式表明若所有传感器间的夹角均为 0 或 π , 将导致 $\mathbf{F}$ 奇异进而使得 (16) 式的 LS 解不存在. 此时 n 个传感器呈直线分布, 且目标位于传感器基线或其延长线上. 因此只要所有传感器不呈直线布站, 即可使得 LS 解存在. 不失一般性, 在工程实践中该条件均能够得到满足.

由于测量误差的存在, (15) 式可进一步描述为

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_T = \mathbf{B} + \mathbf{e}, \quad (19)$$

其中 $\mathbf{e}$ 为 $\mathbf{B}$ 的误差. 令 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$, 求 (19) 式中 $\mathbf{B}$ 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏导, 有

$$\frac{d\mathbf{B}}{d\boldsymbol{\theta}} = \text{diag}\left(\frac{db_1}{d\theta_1}, \frac{db_2}{d\theta_2}, \dots, \frac{db_n}{d\theta_n}\right), \quad (20)$$

其中 b_i 为 $\mathbf{B}$ 中的第 i 行向量, 且

$$\frac{db_i}{d\theta_i} = x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i. \quad (21)$$

假设 (20) 式中 $d\mathbf{B} \approx \mathbf{e}$, 则

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} (x_1 \cos \theta_1 + y_1 \sin \theta_1)d\theta_1 \\ (x_2 \cos \theta_2 + y_2 \sin \theta_2)d\theta_2 \\ \vdots \\ (x_n \cos \theta_n + y_n \sin \theta_n)d\theta_n \end{bmatrix}. \quad (22)$$

假设所有传感器的均方根误差均为 σ_θ , 则 $\mathbf{e}$ 的协方差为

$$\mathbf{P}_\mathbf{e} = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T] = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)\sigma_\theta^2, \quad (23)$$

其中 $g_i = (x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i)^2$, 且 $g_i\sigma_\theta^2$ 为 (22) 式中 $e_i (i = 1, \dots, n)$ 的方差. 显然, $E[\mathbf{e}] = 0$ 且 $\mathbf{e}$ 中各误差分量间相互统计不相关, 但由 (23) 式可知各分量的方差并不相同. 由 Gauss-Markov 定理可知, (16) 式的 $\mathbf{X}_{\text{LS}}$ 并不是多站无源定位中方差最小意义下的最优估计 [16].

结合 (19) 式, 可得 (16) 式 LS 解的定位误差为

$$\Delta\mathbf{X}_{\text{LS}} = \mathbf{X}_{\text{LS}} - \mathbf{X}_T = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{X}_T = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}^T(-\mathbf{e}). \quad (24)$$

则定位误差协方差为

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{\text{LS}}} = E[\Delta\mathbf{X}_{\text{LS}}\Delta\mathbf{X}_{\text{LS}}^T] = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}_\mathbf{e}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}^T)^T = \frac{\sigma_\theta^2}{(\det \mathbf{F})^2} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\sigma_\theta^2 \mathbf{L}}{(\det \mathbf{F})^2}, \quad (25)$$

其中

$$l_{11} = \sum_{i=1}^n (f_{11} \sin \theta_i - f_{12} \cos \theta_i)^2 g_i, \quad (26)$$

$$l_{22} = \sum_{i=1}^n (f_{21} \sin \theta_i - f_{22} \cos \theta_i)^2 g_i, \quad (27)$$

$$l_{12} = l_{21} = \sum_{i=1}^n [(f_{11} \sin \theta_i - f_{12} \cos \theta_i)(f_{21} \sin \theta_i - f_{22} \cos \theta_i)g_i]. \quad (28)$$

因此多站 LS 无源定位算法的 GDOP 为

$$G_n = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{\text{LS}}})} = \frac{\sigma_\theta}{\det \mathbf{F}} \sqrt{l_{11} + l_{22}} = \frac{\sqrt{(f_{11}^2 + f_{21}^2)w_1 + (f_{12}^2 + f_{22}^2)w_2 - 2nf_{12}w_3}}{\det \mathbf{F}\sigma_\theta^{-1}}, \quad (29)$$

其中

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \sin^2 \theta_i g_i, \quad w_2 = \sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i g_i, \quad w_3 = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i g_i.$$

(29) 式表明 LS 算法的定位精度与 3 个因素有关: 传感器测量精度、传感器数量及传感器布站位置.

众所周知, 提高传感器测量精度可以提高目标的定位精度. 对于传感器数量对 (29) 式的影响, 实质上是讨论 LS 算法的一致性问题. 由于 (24) 式中各误差向量的均值为零, 因此 (25) 式同时为 $\Delta \mathbf{X}_{LS}$ 的均方误差协方差; 但由于 (16) 式中 $\mathbf{F}$ 对 $\mathbf{X}_{LS}$ 的影响, 使得多站 LS 定位算法是一种非一致性估计^[16](详见附录 A). 这表明增加传感器数量时, 该算法的定位精度是否提高具有不确定性. 对于传感器布站位置这一因素主要包含两方面: 传感器自身位置, 体现在 (29) 式中的 g_i 项上; 传感器与目标间的相对位置, 体现在 $\det \mathbf{F}$, f_{11} 及 f_{22} 等项中的 $\Delta \theta_{ij}$ 上. 本文着重讨论该因素. 显然, 由于直接对 (29) 式中的传感器方位角求导比较繁琐, 因此考虑将 $\Delta \theta_{ij}$ 作为变量进行分析.

由于 n 个传感器在二维平面内会形成一个凸多边形的闭合区域, 不失一般性, 其配置形式有两种: 目标位于传感器形成的闭合区域内侧; 目标位于闭合区域外侧. 分别讨论如下.

3.1 目标位于闭合区域内侧

以 3 个传感器为例, 此时 $\mathbf{X}_T$ 与各 S_i 的位置关系如图 2 所示. 图 2 中, 虚线 $\triangle S_1 S_2 S_3$ 为传感器形成的闭合区域; 十字星为 $\mathbf{X}_T$ 位置. 此时对夹角间的关系研究可得

$$\Delta \theta_{12} + \Delta \theta_{23} + \Delta \theta_{13} = 2\pi. \quad (30)$$

该结论对于 n 个传感器的情况同样成立, 即所有相邻传感器间的夹角之和为 2π . 因此有

$$\Delta \theta_{12} + \Delta \theta_{23} + \cdots + \Delta \theta_{(n-1)n} + \Delta \theta_{n1} = 2\pi. \quad (31)$$

在 (29) 式中, 令 $J = l_{11} + l_{22}$. 则

$$\begin{aligned} J = & w_1 f_{11}^2 + w_2 f_{22}^2 + \sum_{i=1}^n \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \left(\sum_{i=1}^n g_i - 2n g_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [\cos^2 (\theta_i + \theta_j) - \cos^2 \Delta \theta_{ij}] \cdot \left[\frac{n}{2} (g_i + g_j) - \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{2} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

则 (29) 式中与 $\Delta \theta_{ij}$ 有关项可记为

$$W = \det^{-2} \mathbf{F} \left\{ w_1 f_{11}^2 + w_2 f_{22}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \cos^2 \Delta \theta_{ij} \left[\frac{n}{2} (g_i + g_j) - \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{2} \right] \right\} \triangleq W_0 \det^{-2} \mathbf{F}. \quad (33)$$

因此求 (29) 式的最小值相当于在 (31) 式条件下求 (33) 式的最小值. 构造如下辅助函数:

$$R = W + \lambda (\Delta \theta_{12} + \Delta \theta_{23} + \cdots + \Delta \theta_{n1} - 2\pi). \quad (34)$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子. 同时将 f_{11} , f_{22} 变形如下:

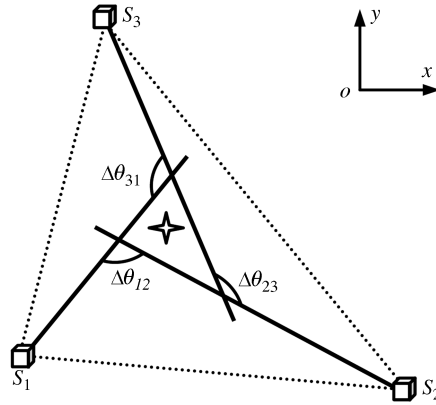


图 2 目标位于 3 站内侧示意图

Figure 2 Target is located inside the closed region formed by three sensors

$$f_{11} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \cos(\theta_i + \theta_j) \cos \Delta\theta_{ij} + C_n^2 \right], \quad (35)$$

$$f_{22} = \frac{-1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \cos(\theta_i + \theta_j) \cos \Delta\theta_{ij} - C_n^2 \right]. \quad (36)$$

该变形使得 f_{11} , f_{22} 包含了所有夹角, 因此能够与 W_0 的第 3 项相对应. 对 (34) 式求各夹角的偏导并令结果为零, 经整理有

$$\begin{cases} t_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \Delta\theta_{12} + t_2 \sin 2\Delta\theta_{12} = t_0, \\ t_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \Delta\theta_{23} + t_3 \sin 2\Delta\theta_{23} = t_0, \\ \vdots \\ t_1 \cos(\theta_n + \theta_1) \sin \Delta\theta_{n1} + t_n \sin 2\Delta\theta_{n1} = t_0, \end{cases} \quad (37)$$

其中

$$t_i = \frac{2}{n-1} (w_2 f_{22} - w_1 f_{11}), \quad t_0 = -\lambda \det^2 \mathbf{F},$$

$$t_i = \frac{n}{2} (g_{i-1} + g_i) - t_*(i = 2, \dots, n), \quad t_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i + 2W_0 \det^{-1} \mathbf{F},$$

且有

$$t_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_j - \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_j) (g_i - g_j). \quad (38)$$

因此当且仅当

$$g_1 = g_2 = \dots = g_n, \quad (39)$$

即 $t_1 = 0$ 时, (37) 式有唯一解:

$$\Delta\theta_{12} = \Delta\theta_{23} = \dots = \Delta\theta_{n1} = 2\pi/n. \quad (40)$$

该式表明当目标位于传感器形成的闭合区域内侧时, 只有所有相邻传感器间的夹角均相等时系统才能获得最佳的定位精度.

现在讨论 (39) 式成立的条件. 由 (23) 式可知, 若定位系统以目标位置为原点建立坐标系且所有传感器与目标距离相同时, 有

$$g_i = r^2, \quad (41)$$

即 (39) 式成立. 式中 r 为传感器与目标的距离. 这一方面表明对于测量精度相同的传感器且各传感器间夹角固定时, 只有以目标位置为原点建立坐标系且传感器与目标距离均相等时, LS 算法可以达到方差最小意义下的最优估计; 另一方面, 该配置形式符合第 2 节关于双站最佳配置的分析, 即所有传感器与目标的距离均相同时才有可能达到最佳配置形式, 此时目标位于所有传感器形成的外接圆的圆心. 将 (41) 式带入 (29) 式中, 可得此时的定位精度为

$$G_n = r\sigma_\theta \sqrt{\frac{n}{\det \mathbf{F}}} (n \geq 3). \quad (42)$$

此即多站 LS 算法达到最优估计时的定位精度. 由该式可知, 传感器与目标间的距离及传感器间夹角是影响定位精度的两个重要因素. 分析可知, 此时 LS 算法仍然不具有 consistency, 但可以达到强 consistency (详见附录 B).

在 LS 算法达到最优估计的基础上, 在 (31) 式条件下对 (42) 式进一步分析可知, 当且仅当 (40) 式成立时该式恰好取得最小值. 这表明 (40) 式对各传感器间夹角分析的正确性. 因此当目标位于所有传感器形成的闭合区域内侧时, 其最佳配置形式是: 以目标位置为原点建立坐标系, 且该原点同时为 n 个传感器形成的正 n 边形的外接圆圆心. 该结论与文献 [13] 的结论相同.

分析可知, 当 n 个传感器呈最佳配置时其 GDOP 为

$$G_n = 2r\sigma_\theta / \sqrt{n} (n \geq 3). \quad (43)$$

显然, 此时 LS 算法具有估计的一致性 (详见附录 C).

在文献 [13] 中, 当目标位于传感器闭合区域内侧时的最佳 GDOP 为 $2/\sqrt{n}$. 相比较而言, (43) 式的结果更加合理. 这是由于对于雷达或其他传感器而言, 通常情况下传感器与目标间的距离越小或传感器测量精度越高, 其所获得的定位精度会越好. 但是这并不能在文献 [13] 的结果中得到体现.

以 $n = 4$ 为例, 其最佳配置形式如图 3 所示. 图中 $S_1S_2S_3S_4$ 为正方形, 虚线圆为该正方形的外接圆. 此时各传感器方位角为

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha, \\ \theta_2 = \pi/2 + \alpha, \\ \theta_3 = \pi + \alpha, \\ \theta_4 = 3\pi/2 + \alpha. \end{cases} \quad (44)$$

由 (43) 式可得图 3 最佳配置时的定位精度为

$$G_4 = r\sigma_\theta. \quad (45)$$

可知该最佳精度仅与传感器与目标的距离及测量精度有关, 且距离越小定位精度越高.

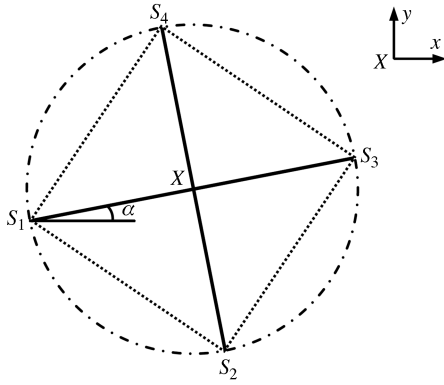


图 3 目标位于 4 站内侧时的最佳配置形式

Figure 3 Optimal allocation form when the target is located inside the closed region formed by four sensors

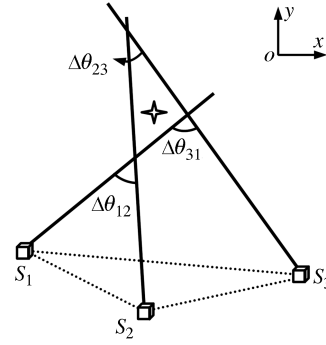


图 4 目标位于 3 站外侧示意图

Figure 4 Target is located outside the closed region formed by three sensors

3.2 目标位于闭合区域外侧

同样以 3 传感器为例, 此时 $\mathbf{X}_T$ 与各 S_i 的位置关系如图 4 所示. 对此时的夹角关系进行研究可得

$$\Delta\theta_{13} = \Delta\theta_{12} + \Delta\theta_{23}. \quad (46)$$

即存在一个最大夹角, 且该夹角为其他所有相邻夹角之和. 该结论对于 n 个传感器同样成立, 即当 $\mathbf{X}_T$ 位于闭合区域外侧且假设 $\Delta\theta_{n1}$ 最大时, 有

$$\Delta\theta_{n1} = \Delta\theta_{12} + \Delta\theta_{23} + \cdots + \Delta\theta_{(n-1)n}. \quad (47)$$

同样, 可构造如下辅助函数:

$$R = W + \lambda(\Delta\theta_{12} + \cdots + \Delta\theta_{(n-1)n} - \Delta\theta_{n1}). \quad (48)$$

对其分析的过程同 3.1 小节. 经整理可得此时的最优夹角为

$$\begin{cases} \Delta\theta_{12} = \cdots = \Delta\theta_{(n-1)n} = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ \Delta\theta_{n1} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (49)$$

其中 $\Delta\theta_{n1}$ 为 n 的减函数, 这表明当传感器数量增加时, 最大夹角反而变小. 其极限值为

$$\begin{cases} \max(\Delta\theta_{n1})|_{n=3} = \pi, \\ \min(\Delta\theta_{n1})|_{n=\infty} = \pi/2, \end{cases} \quad (50)$$

后者表明当 n 无穷大时, 所有传感器将完全排列在某一象限的圆周上.

对 (42) 式在 (47) 式条件下分析, 同样可知当且仅当 (49) 式成立时该式取得最小值. 因此当目标位于所有传感器形成的闭合区域外侧时, 其最佳配置形式是: 各相邻传感器间夹角相同, 且传感器位于以目标位置 (同时为坐标系原点) 为圆心的外接圆上. 该表述同样适用于 3.1 小节的情况.

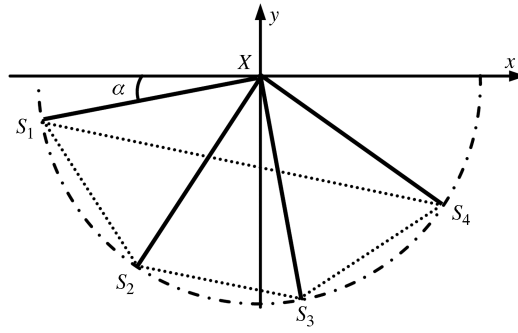


图 5 目标位于 4 站外侧时的最佳配置形式

Figure 5 Optimal allocation form when the target is located outside the closed region formed by four sensors

分析可知, 此时 $\det \mathbf{F}$ 的表达式为:

$$\det \mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \sin^2 \frac{k}{n-2} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (51)$$

用数学归纳法容易证明该式满足 (B6) 式的第 3 种结果, 因此当目标位于传感器闭合区域外侧且传感器呈最佳配置时, LS 算法仍然是一种一致估计.

同样以 $n=4$ 为例, 其最佳配置形式如图 5 所示. 此时各传感器方位角为

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha, \\ \theta_2 = \pi/4 + \alpha, \\ \theta_3 = \pi/2 + \alpha, \\ \theta_4 = 3\pi/4 + \alpha. \end{cases} \quad (52)$$

将 (49), (51) 式代入 (42) 式中, 同样可得图 5 最佳配置时的定位精度为 (45) 式¹⁾.

4 仿真分析

限于篇幅, 本节主要验证图 3 的最佳配置形式、LS 算法达到最优估计的条件及多站最佳配置时的 GDOP. 由于参考文献 [11, 12] 等已经对双站的最佳配置形式进行了详细仿真, 在此不再另行给出. 同时, 文献 [6, 13] 等已经给出目标遍历情况下的 GDOP 等值线图, 因此本文主要对单静止目标在不同条件下进行 GDOP 仿真.

4.1 关于图 3 的仿真

目标位于原点, 传感器的配置分 3 种形式, 如表 1 所示 (方便起见, 省略掉坐标中的 “T” 符号, 以下同). 其中, 形式 1 为 $\alpha=0$ 时的最佳配置形式; 形式 2 中各相邻传感器间夹角发生变化, 但满足 LS 算法达到最优估计的条件; 形式 3 的夹角及传感器与目标的距离均发生变化, 属于一般配置. 设传感器测角精度均为 $\sigma_\theta = 0.5^\circ$; 对 (29) 式进行 300 次 Monte Carlo 仿真, 结果如图 6 所示. 由图 6 可知:

1) 目标位于传感器闭合区域内、外侧时最佳定位精度相同的情况仅限于 $n=4$ 的情况, 详见图 8

表 1 传感器布站位置 (km)

Table 1 Cases of sensor allocation (km)

Case	S_1	S_2	S_3	S_4
1	(-20, 0)	(0, -20)	(20, 0)	(0, 20)
2	(-20, 0)	(0, -20)	(20, 0)	(14, 14)
3	(-20, 0)	(0, -20)	(20, 0)	(20, 20)

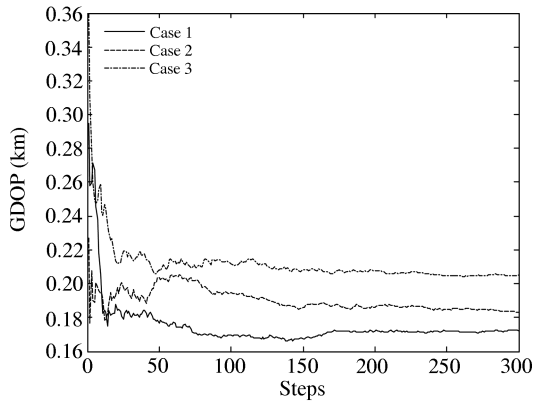


图 6 目标位于 4 站内侧时的 GDOP

Figure 6 GDOP when the target is located in the closed region formed by four sensors

(1) 在所有配置形式中, 形式 1 的定位精度最佳. 对 (45) 式计算可得此时 GDOP 为 174.5 m, 与图中吻合. 该结果验证了 3.1 小节关于目标位于 4 站内侧时最佳配置形式的分析.

(2) 形式 2 的 GDOP 高于形式 1, 在当前仿真条件下高出约 10 m. 由 (42) 式计算可得此时 GDOP 为 186.6 m, 与图中吻合. 该结果表明虽然形式 2 可以达到方差最小意义下的最优估计, 但仍然达不到最佳配置时的估计精度; 同时表明当各传感器与目标距离相同的情况下, 传感器间夹角是影响定位精度的关键因素.

(3) 形式 3 的定位精度最差. 同形式 2 相比, 该结果表明当各传感器间夹角相同的情况下, 传感器与目标的距离是影响定位精度的关键因素.

4.2 关于 LS 算法最优估计条件的仿真

仅以图 3 为例. 传感器的配置及 $\mathbf{X}_T$ 位置分 4 种形式, 如表 2 所示. 其中, 形式 1,2 为 $\alpha = 0$ 时的最佳配置形式, 但形式 2 的坐标原点并不位于 $\mathbf{X}_T$ 处; 形式 3,4 分别相对于形式 1,2 而言, S_4 与 $\mathbf{X}_T$ 的距离发生变化. 其他仿真条件不变, 结果如图 7 所示. 由图 7 可知: 形式 1-4 的定位精度依次降低, 因此该结果验证了 (42) 式条件的分析. 其中, 形式 1 较形式 2 提高约 20 m, 较形式 3 提高约 40 m. 该结果表明对于 $\mathbf{X}_T$ 位于坐标原点及传感器与 $\mathbf{X}_T$ 距离相等这两个因素, 后者是影响 LS 算法达到最优估计精度的主要因素.

需指出的是, 在图 6, 7 中用 RMS(root-mean square) 衡量定位精度时可以得到相同的结果, 仅是数值上有差别.

4.3 关于最佳配置时 GDOP 的仿真

假设 $r = 30$ km 且 $\sigma_\theta = 0.5^\circ$. 将 (51) 式代入 (42) 式从而得到 3.2 小节最优配置时的 GDOP, 并

表 2 传感器及目标布站位置 (km)

Table 2 Cases of sensor allocation (unit: km)

Case	S_1	S_2	S_3	S_4	$\mathbf{X}_T$
1	(-20, 0)	(0, -20)	(20, 0)	(0, 20)	(0, 0)
2	(-20, 20)	(0, 0)	(20, 20)	(0, 40)	(0, 20)
3	(-20, 0)	(0, -20)	(20, 0)	(0, 40)	(0, 0)
4	(-20, 20)	(0, 0)	(20, 20)	(0, 60)	(0, 20)

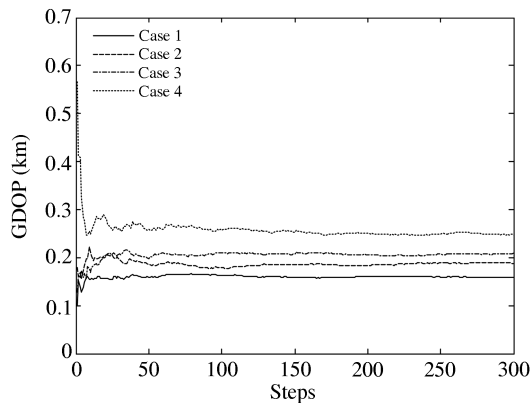


图 7 不同配置形式的 GDOP

Figure 7 GDOP for different sensor allocation forms

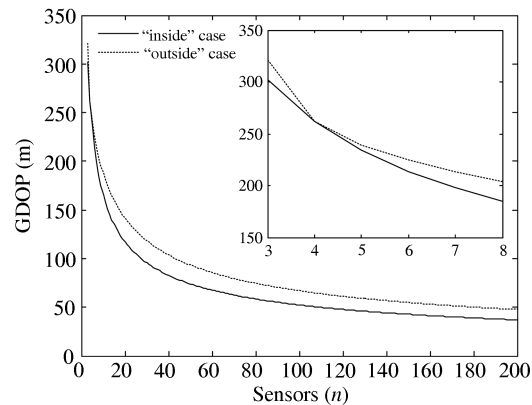


图 8 最佳配置时 GDOP 与传感器数量的关系

Figure 8 Optimal GDOP versus the number of sensors

在不同传感器数量条件下与 (43) 式进行比较, 结果如图 8 所示. 为了直观起见, 将 GDOP 画成连续曲线的形式, 而实际上只有当 n 为整数时才有意义. 由图 8 可知:

(1) 随着传感器数量的增加, GDOP 呈减小趋势. 该结果验证了附录 C 及 3.2 小节的分析, 即当传感器呈最佳配置时, LS 算法具有估计的一致性.

(2) 当 $n = 4$ 时目标位于传感器闭合区域内、外侧的最佳精度相同; 除此之外, 目标位于内侧的最佳精度均要优于外侧. 因此不失一般性, 传感器最佳配置形式应该是 3.1 小节分析的结果, 即传感器位于以原点 (即目标位置) 为中心的止多边形的顶点.

(3) 当传感器数量增加至一定程度时, GDOP 的提高趋势并不明显甚至达到饱和状态. 该结果同文献 [17] 的分析.

5 结论

以双站分析为基础并结合 LS 算法的 GDOP, 提出多站无源测向交叉定位的最佳配置形式. 该结论可以应用到多机动传感器、固定或慢速运动目标的定位或跟踪中, 此即对传感器进行空间管理; 更重要的是, 对于多固定传感器、机动目标而言, 该结论可以应用到基于传感器选择的定位跟踪算法中. 因此, 上述最佳配置形式的分析对于研究基于传感器管理的多站无源定位跟踪算法具有一定的指导意义. 通过本文分析还可知:

(1) 传感器与目标的距离及传感器间夹角是影响测向交叉定位精度的两个重要因素;

(2) 目标位于传感器的外接圆圆心且该圆心同时为坐标系原点是多站 LS 定位算法达到最优估计的条件, 且前者是主要因素;

(3) 当传感器按最佳方式配置时, LS 算法具有一致性; 但此时增加传感器时需要对原所有传感器进行重新配置才能获得新的最佳配置形式, 这在实际当中并不可行; 幸运的是, 该算法在达到最优估计时具有强一致性, 因此只要增加的传感器位于以目标为中心的外接圆上, 原传感器无需重新配置仍可达到估计的一致性。

致谢 作者衷心感谢深圳大学刘宗香副研究员、杭州电子科技大学信息与控制研究所林岳松教授及浙江理工大学信息与电子学院金学波副教授对本文的有益指导! 衷心感谢审稿专家及编辑同志对本文建设性的指导!

参考文献

- 1 Smith D, Singh S. Approaches to multisensor data fusion in target tracking: a survey. *IEEE Trans Knowl Data Eng*, 2006, 18: 1696–1710
- 2 Chong C Y, Mori S, Chang K C, et al. Architectures algorithms for track association and fusion. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2000, 15: 5–13
- 3 Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm research for passive location based on angle information. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 1043–1054 [王鼎, 张莉, 吴瑛. 基于角度信息的结构总体最小二乘无源定位算法. *中国科学 F 辑: 信息科学*, 2009, 39: 663–672]
- 4 Sun Z K, Zhou Y Y, He L X. *Active/Passive Location Technology Based on Monostatic/Multistatic*. Beijing: National Defense Industry Press, 1996. 181–195 [孙仲康, 周一宇, 何黎星. 单多基地有源无源定位技术. 北京: 国防工业出版社, 1996. 181–195]
- 5 He Y, Xiu J J, Zhang J W, et al. *Radar Data Processing with Applications*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2009. 209–225 [何友, 修建娟, 张晶炜, 等. 雷达数据处理及应用. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2009. 209–225]
- 6 Li W C, Wei P, Xiao X C. A robust TDOA passive location method and its performance analysis. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 876–882 [李万春, 魏平, 肖先赐. 一种稳健的 TDOA 无源定位方法及其性能分析. *中国科学 F 辑: 信息科学*, 2009, 39: 476–482]
- 7 Wang J G, Luo J Q. Passive tracking based on data association with information fusion of multi-feature and multi-target. *Acta Electron Sin*, 2004, 32: 1013–1016 [王杰贵, 罗景青. 基于多目标多特征信息融合数据关联的无源跟踪方法. *电子学报*, 2004, 32: 1013–1016]
- 8 Cao Z W, Zhao J, Gao B J. The research of location about the infrared multi-sites system based on the weighted least square method. *Acta Photon Sin*, 2005, 34: 1001–1004 [曹正文, 赵健, 高宝建. 基于加权最小二乘法的红外多站定位的研究. *光子学报*, 2005, 34: 1001–1004]
- 9 Lui K W K, Chan F K W, So H C. Accurate time delay estimation based passive localization. *Signal Process*, 2009, 89: 1835–1838
- 10 Ho K C, Vicente L M. Sensor allocation for source localization with decoupled range and bearing estimation. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 5773–5789
- 11 Xiu J J, He Y, Wang G H, et al. Constellation of multisensors in bearing-only location system. *IEE Proc Radar Sonar Navig*, 2005, 152: 215–218
- 12 Wang G H, Bai J, He Y, et al. Optimal deployment of multiple passive sensors in the sense of minimum concentration ellipse. *IET Radar Sonar Navig*, 2009, 3: 8–17
- 13 Levanon N. Lowest GDOP in 2-D scenarios. *IEE Proc Radar Sonar Navig*, 2000, 147: 149–155
- 14 Ge J J. Sensor network and its target geometric positioning method. *Radar Sci Tech*, 2009, 7: 81–84 [葛建军. 传感器网络及其目标几何定位方法. *雷达科学与技术*, 2009, 7: 81–84]
- 15 Jia X Q. *Continuous-Wave Radar Data Processing*. Beijing: National Defense Industry Press, 2005. 54–70 [贾兴泉. 连续波雷达数据处理. 北京: 国防工业出版社, 2005. 54–70]
- 16 Zhang X D. *Matrix Analysis and Applications*. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 403–418 [张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004. 403–418]

- 17 Sadaphal V P, Jain B. Localization accuracy and threshold network density for tracking sensor networks. In: Proceedings of IEEE International Conference on Personal Wireless Communications, 2005. 408–412

附录 A LS 算法非一致性的证明

证明: 用反证法. 假设 LS 算法具有一致性, 则在 $\det \mathbf{F} \neq 0$ 条件下, 在 (25) 式中一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{X}_{\text{LS}}} = 0, \quad (\text{A1})$$

该式相当于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{L} = 0. \quad (\text{A2})$$

在 (26)–(28) 式中, g_i 由于是 e_i 的方差成分而不能为零, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时一定有

$$\begin{cases} f_{11} \sin \theta_i - f_{12} \cos \theta_i = 0, \\ f_{21} \sin \theta_i - f_{22} \cos \theta_i = 0. \end{cases} \quad (\text{A3})$$

该式等同于

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 \triangleq F_* = 0. \quad (\text{A4})$$

联合 (18) 式, 可知

$$F_* = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_j - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\sin \theta_i \cos \theta_i \sin \theta_j \cos \theta_j). \quad (\text{A5})$$

注意到 (A5) 式中前、后两项均有 $n^2 - n$ 项, 同时后一项的系数为 2; 因此对于同一下标而言可将其拆分成相同的两项, 分别对应于前一项中的下标相同项及下标次序颠倒项. 即

$$\begin{aligned} F_* = & \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_j - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \theta_j \cos \theta_j \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \theta_j \cos \theta_j \right). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

进一步推导可得

$$\begin{aligned} F_* = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin \theta_i \cos \theta_j (-\sin \Delta \theta_{ij}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin \theta_j \cos \theta_i \sin \Delta \theta_{ij} \\ = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sin^2 \Delta \theta_{ij} = \det \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

显然, 由 (A4) 式可知 $\det \mathbf{F} = 0$, 但同 (A1) 式的条件相反. 这表明开始的假设不成立, 因此多站 LS 无源测向交叉定位算法具有非一致性.

附录 B LS 算法最优估计时一致性的讨论

假设定位系统有 $n-1$ ($n-1 \geq 3$) 个传感器, 由 (42) 式可知其定位精度为

$$G_{n-1} = r \sigma_\theta \sqrt{\frac{n-1}{\det \mathbf{F}_{n-1}}}, \quad (\text{B1})$$

其中

$$\det \mathbf{F}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sin^2 \Delta \theta_{ij}. \quad (\text{B2})$$

在此基础上增加一个传感器 S_n 后, 定位精度如 (42) 式所示, 其中

$$\det \mathbf{F}_n = \det \mathbf{F}_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \Delta \theta_{in}. \quad (\text{B3})$$

令

$$\beta = \det \mathbf{F}_{n-1} / \det \mathbf{F}_n. \quad (\text{B4})$$

则联合 (B2), (B3) 两式可知:

$$0 < \beta < 1. \quad (\text{B5})$$

比较 (42), (B1) 两式, 有

$$\frac{G_n}{G_{n-1}} = \sqrt{\frac{n\beta}{n-1}}. \quad (\text{B6})$$

理论上, 该式有 3 种结果:

① 当 $\frac{n-1}{n} < \beta < 1$ 时, 有 $G_n > G_{n-1}$. 此时增加 S_n 后, 定位精度降低;

② 当 $\beta = \frac{n-1}{n} > 0$ 时, 有 $G_n = G_{n-1}$. 此时增加 S_n 后, 定位精度不变;

③ 当 $0 < \beta < \frac{n-1}{n}$ 时, 有 $G_n < G_{n-1}$. 此时增加 S_n 后, 定位精度提高.

但实际上, 由区间长度可知第 3 种结果发生的概率要明显大于前两种结果, 特别当 n 较大时. 这将导致 $G_n < G_{n-1}$ 的情况更容易发生, 因此当 LS 算法达到最优估计时具有强一致性.

附录 C 3.1 小节最佳配置时 LS 算法一致性的讨论

当 n 个传感器呈最佳配置且 $\mathbf{X}_T$ 位于传感器闭合区域内侧时, 首先须推导 $\det \mathbf{F}_n$ 的表达式. 分两种情况进行讨论:

① n 为奇数.

将 (40) 式中各相邻传感器间的夹角称为单位夹角 $\Delta \theta_0$, 则 $\Delta \theta_0 = 2\pi/n$; 令 n_0 表示传感器间夹角包含 $\Delta \theta_0$ 的数量, m_0 表示属于某一 n_0 的夹角数量. 当 n 为奇数时有 $\min(n) = 3$, 因此当 $n = 3$ 时 n_0 与各夹角如表 C1 所示.

计算可得

$$\det \mathbf{F}_3 = 3 \sin^2 \Delta \theta_0 = 3 \sin^2 2\pi/3. \quad (\text{C1})$$

同理, 当 $n = 5$ 时有表 C2.

因此有

$$\det \mathbf{F}_5 = 5 \sin^2 \Delta \theta_0 + 5 \sin^2 2\Delta \theta_0 = 5(\sin^2 2\pi/5 + \sin^2 4\pi/5). \quad (\text{C2})$$

根据同样方法进一步推导可知, 当 n 为奇数时有

$$\det \mathbf{F}_n = n \left(\sin^2 1 \cdot \Delta \theta_0 + \sin^2 2 \cdot \Delta \theta_0 + \cdots + \sin^2 \frac{n-1}{2} \cdot \Delta \theta_0 \right) = n \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \sin^2 k \Delta \theta_0. \quad (\text{C3})$$

应用 Fourier 求和公式^[13], 有

$$\det \mathbf{F}_n = n^2/4. \quad (\text{C4})$$

② n 为偶数.

此时 $\min(n) = 4$, 因此当 $n = 4$ 时 n_0 与各夹角如表 C3 所示.

可得

$$\det \mathbf{F}_4 = 4 \sin^2 \Delta \theta_0 + 2 \sin^2 2\Delta \theta_0 = 4 \sin^2 2\pi/4. \quad (\text{C5})$$

同理, 当 $n = 6$ 时有表 C4.

因此有

$$\det \mathbf{F}_6 = 6 \sin^2 \Delta \theta_0 + 6 \sin^2 2\Delta \theta_0 + 3 \sin^2 3\Delta \theta_0 = 6(\sin^2 2\pi/6 + \sin^2 4\pi/6). \quad (\text{C6})$$

根据同样方法进一步推导可知, 当 n 为偶数时有

$$\det \mathbf{F}_n = n \left(\sin^2 1 \cdot \Delta \theta_0 + \sin^2 2 \cdot \Delta \theta_0 + \cdots + \sin^2 \frac{n-2}{2} \cdot \Delta \theta_0 \right) = n \sum_{k=1}^{(n-2)/2} \sin^2 k \cdot \Delta \theta_0. \quad (\text{C7})$$

对 (C7) 式应用 Fourier 求和公式, 同样可以得到 (C4) 式. 因此对于任意 $n(n \geq 3)$, 其 $\det \mathbf{F}_n$ 表达式均为 (C4) 式.

表 C1 3 站时 n_0 与各夹角列表Table C1 n_0 and each cut angle when $n = 3$

n_0	Cut angle			m_0
1	$\Delta\theta_{12}$	$\Delta\theta_{23}$	$\Delta\theta_{13}$	3

表 C2 5 站时 n_0 与各夹角列表Table C2 n_0 and each cut angle when $n = 5$

n_0	Cut angle					m_0
1	$\Delta\theta_{12}$	$\Delta\theta_{23}$	$\Delta\theta_{34}$	$\Delta\theta_{45}$	$\Delta\theta_{15}$	5
2	$\Delta\theta_{13}$	$\Delta\theta_{24}$	$\Delta\theta_{35}$	$\Delta\theta_{14}$	$\Delta\theta_{25}$	5

表 C3 4 站时 n_0 与各夹角列表Table C3 n_0 and each cut angle when $n=4$

n_0	Cut angle				m_0
1	$\Delta\theta_{12}$	$\Delta\theta_{23}$	$\Delta\theta_{34}$	$\Delta\theta_{14}$	4
2	$\Delta\theta_{13}$	$\Delta\theta_{24}$			2

表 C4 6 站时 n_0 与各夹角列表Table C4 n_0 and each cut angle when $n=6$

n_0	Cut angle						m_0
1	$\Delta\theta_{12}$	$\Delta\theta_{23}$	$\Delta\theta_{34}$	$\Delta\theta_{45}$	$\Delta\theta_{56}$	$\Delta\theta_{16}$	6
2	$\Delta\theta_{13}$	$\Delta\theta_{24}$	$\Delta\theta_{35}$	$\Delta\theta_{46}$	$\Delta\theta_{15}$	$\Delta\theta_{26}$	6
3	$\Delta\theta_{14}$	$\Delta\theta_{25}$	$\Delta\theta_{36}$				3

将 (C4) 式代入 (42) 式, 即可得到 (43) 式. 显然, 当 n 增加时即可得到 (B6) 式的第 3 种结果. 因此当目标位于传感器闭合区域内侧且呈最佳配置时, LS 算法是一种一致估计.

Optimal allocation of multi-sensor passive localization

WANG BenCai^{1,2*}, HE You¹, WANG GuoHong¹ & XIU JianJuan¹

¹ Institute of Information Fusion, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China;

² Unit 93286, People's Liberation Army, Shenyang 110141, China

*E-mail: springbook7559@126.com

Abstract To improve multi-sensor passive localization precision, the optimal allocation form of multi-sensor bearing-only localization is analyzed from the perspective of the geometric dilution of precision (GDOP) of the least squares (LS) algorithm. This paper indicates that whether the target lies inside the closed region formed by the sensors or not, the optimal allocation is when each adjacent cut angle between a sensor pair is identical, and all sensors are located on the border of the circle that has the target (which is also the origin of the coordinate

system) as its center. When there is no restriction on the adjacent cut angle in the above allocation, the optimal estimate of the LS algorithm in the sense of minimum variance can be acquired. When the LS algorithm achieves the optimal estimate and the sensors present the optimal allocation, the respective consistencies are analyzed. Simulation results verify the analysis of the optimal allocation form above, which can be used in multi-sensor passive localization algorithms based on sensor management.

Keywords multi-sensor passive localization, optimal allocation, geometric dilution of precision, cut angle, consistency, optimal estimate