中国科学: 数学　2011 年　第 41 卷　第 3 期: 287～300
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

区组大小为 4 的二重超单可分解的可分组设计

曹海涛*, 马红亚

南京师范大学数学研究所, 南京 210046
E-mail: caohaitao@njnu.edu.cn, mhy19841022@163.com

收稿日期: 2010-06-22; 接受日期: 2011-01-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10971011) 资助项目

摘要　自 1992 年 Gronau 和 Mullin 提出超单设计的概念以来, 很多研究者参与了超单设计的研究. 超单设计在编码等方面也有广泛的应用. 超单可分组设计是超单设计的重要组成部分. 本文我们主要研究区组大小为 4 的二重超单可分解的可分组设计, 并基本解决了此类设计的存在性问题.

关键词　可分组设计　可分解设计　超单设计

MSC (2000) 主题分类　05B05

1　引言

设 v, λ 为给定的正整数, K 为正整数集.

定义 1　一个可分组设计, 记作 (v, K, λ)-GDD, 是一个满足下列性质的三元组 $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$.

1. $\mathcal{X}$ 称为点集且 $|\mathcal{X}| = v$;

2. $\mathcal{G}$ 中的元素 (称为组) 均是 $\mathcal{X}$ 的子集, 并且所有组构成 $\mathcal{X}$ 的一个划分;

3. $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{X}$ 的一些子集 (称为区组) 组成的集合, 且对任意 $B \in \mathcal{B}$, 都有 $|B| \in K$;

4. $\mathcal{X}$ 中任意一对属于不同组的点恰好同时包含在 λ 个区组中, 而属于同一组的任意两个点不同时出现在任何区组中.

若 $\mathcal{G}$ 包含 u_i 个大小为 m_i 的组, $1 \leqslant i \leqslant s$, 且 $v = \sum_{i=1}^{s} u_i m_i$, 则称 $m_1^{u_1} m_2^{u_2} \cdots m_s^{u_s}$ 为可分组设计 $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 的组型. 以下用 (K, λ)-GDD$(m_1^{u_1} m_2^{u_2} \cdots m_s^{u_s})$ 表示组型为 $m_1^{u_1} m_2^{u_2} \cdots m_s^{u_s}$ 的可分组设计 (v, K, λ)-GDD. 当所有的 u_i 都等于 1 时, 我们省略所有的上标 1. 当 $K = \{k\}$ 时, 记 (K, λ)-GDD 为 (k, λ)-GDD. 当 $\lambda = 1$ 时, 分别记 $(K, 1)$-GDD 和 $(k, 1)$-GDD 为 K-GDD 和 k-GDD. 型为 1^v 的 (K, λ)-GDD 称为成对平衡设计, 记为 (v, K, λ)-PBD. 型为 1^v 的 (k, λ)-GDD 称为平衡不完全区组设计, 记为 (v, k, λ)-BIBD.

若设计的区组集中无重复区组, 则称它是单纯的. 若对任意两个区组 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, 都有 $|B_1 \cap B_2| \leqslant 2$ 成立, 则称此设计是超单的. 自 1992 年 Gronau 和 Mullin[1] 提出超单设计的概念以来, 很多研究者参与了超单设计的研究. 超单设计在编码等方面也有广泛的应用, 参见 [2–5]. 以下用 (K, λ)-SGDD 来表示超单的 (K, λ)-GDD.

超单的可分组设计的研究已经有了很多成果, 其中 $2 \leqslant \lambda \leqslant 6$ 的 $(4, \lambda)$-SGDD(g^u) 的存在性问题已经彻底解决. $(5, 2)$-SGDD(g^u) 的存在性问题也仅剩 3 个可能的例外未解决, 更多结果参见 [6–9].

英文引用格式: Cao H T, Ma H Y. Super-simple resolvable group divisible designs with block size 4 and index 2 (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(3): 287–300, doi: 10.1360/012010-463

定理 1 (参见 [1, 10–18]) 当 $2 \leqslant \lambda \leqslant 6$ 时, 除去 2 个例外 $(\lambda, g, u) \in \{(3,2,5),(4,3,5)\}$, $(4,\lambda)$-SGDD(g^u) 存在的必要条件也是充分的.

定理 2 (参见 [19–21]) $(5,2)$-SGDD(h^n) 存在的必要条件: (1) $n \geqslant 5$; (2) $n(n-1)h^2 \equiv 0 \pmod 5$; (3) 若 h 为奇数, 则 n 也是奇数, 也是充分的, 除去 3 个例外 $(h,n) \in \{(1,5),(1,15),(2,5)\}$ 和 3 个可能的例外 $n=15$ 且 $h \in \{13,17,19\}$.

如果一个可分组设计的区组集 $\mathcal{B}$ 可以划分成一些平行类, 其中每个平行类都是点集 $\mathcal{X}$ 的一个划分, 则称这个可分组设计是可分解的, 简记为 RGDD. 我们用 (v,k,λ)-RBIBD 来记可分解的 (v,k,λ)-BIBD. 以下是 4-RGDD(g^u) 的存在性结果.

定理 3 (参见 [22–32]) 4-RGDD(g^u) 存在的必要条件: $u \geqslant 4$, $gu \equiv 0 \pmod 4$ 和 $g(u-1) \equiv 0 \pmod 3$ 也是充分的, 除去 4 个例外 $(g,u) \in \{(2,4),(2,10),(3,4),(6,4)\}$ 和以下可能的例外:

1. $g \equiv 2, 10 \pmod{12}: h=2$, $u \in \{34,46,52,70,82,94,100,118,130,142,178,184,202,214,238,250,334,346\}$; $g=10$, $u \in \{4,34,52,94\}$; $g \in [14,454] \cup \{478,502,514,526,614,626,686\}$, $u \in \{10,70,82\}$;

2. $g \equiv 6 \pmod{12}: g=6$, $u \in \{6,54,68\}$; $g=18$, $u \in \{18,38,62\}$;

3. $g \equiv 9 \pmod{12}: g=9$, $u=44$;

4. $g \equiv 0 \pmod{12}: g=12$, $u=27$; $g=36$, $u \in \{11,14,15,18,23\}$.

若 (K,λ)-GDD 既是超单的, 又是可分解的, 则称它是超单可分解的, 记为 (K,λ)-SRGDD. SRBIBD 表示超单可分解的平衡不完全区组设计. 葛根年等已经研究了部分超单可分解的平衡不完全区组设计的存在性问题. (k,λ)-SRGDD(g^u) 存在的必要条件和一些已知结果如下.

定理 4 (k,λ)-SRGDD(g^u) 存在的必要条件为: $\lambda \leqslant \frac{g(u-2)}{k-2}$, $u \geqslant k$, $\lambda(u-1)g \equiv 0 \pmod{k-1}$ 且 $ug \equiv 0 \pmod k$.

定理 5[33] $(v,4,2)$-SRBIBD 存在的充分必要条件是 $v \equiv 4 \pmod{12}$ 且 $v \geqslant 16$.

定理 6[34] $(v,4,3)$-SRBIBD 存在的充分必要条件是 $v \equiv 0 \pmod 4$, $v \geqslant 8$ 且 $v \neq 12$.

SRBIBD 是组型为 1^v 的 SRGDD. 本文主要研究$(4,2)$-SRGDD(g^u)的存在性问题, 将证明以下结论.

定理 7 $(4,2)$-SRGDD(g^u) 存在的必要条件也是充分的, 除去一类可能的例外 $(g,u)=(12t,27)$, 其中 $t=2$ 或 $t \equiv 1 \pmod 2$.

2 递推构造方法

我们首先介绍支架的概念. 设 $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 为一个 (K,λ)-GDD$(g_1^{u_1} g_2^{u_2} \cdots g_t^{u_t})$. 若 $\mathcal{B}$ 可以划分为一些带洞平行类, 每个带洞平行类是点集 $\mathcal{X} \setminus G_j$ 的一个划分, 其中 $G_j \in \mathcal{G}$, 则称 $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 为一个支架, 记为 (K,λ)-F$(g_1^{u_1} g_2^{u_2} \cdots g_t^{u_t})$. 支架中的组也被称为洞. 支架对于可分解设计的构造有重要作用. 超单的支架简记为 SF. 本文将用到以下结果.

定理 8 (参见 [29, 35–38]) 4-F(g^u) 存在的必要条件 $u \geqslant 5$, $g \equiv 0 \pmod 3$ 且 $g(u-1) \equiv 0 \pmod 4$ 也是充分的, 除去以下可能的例外:

1. $g=36$, $u=12$;

2. $g \equiv 6 \pmod{12}$,

(a) $g=6$, $u \in \{7,23,27,35,39,47\}$;

(b) $g=30$ 或 $g \in \{n: 66 \leqslant n \leqslant 2190\}$, $u \in \{7,23,27,39,47\}$;

(c) $g \in \{42,54\} \cup \{n: 2202 \leqslant n \leqslant 11238\}$, $u \in \{23,27\}$;

(d) $g=18$, $u \in \{15,23,27\}$.

引理 1[33] 对任意 $u \geqslant 5$ 且 $u \notin \{14, 19\}$, 存在 $(4,2)$-SF(12^u).

下面我们先给出一些超单可分解的可分组设计的递推构造方法, 它们的证明方法类似于已有的一些构造方法, 参见 [34, 35].

构造 1 若存在 (n,λ_1)-SRGDD(h^u) 和 (k,λ_2)-SRGDD(g^n), 则存在 $(k,\lambda_1\lambda_2)$-SRGDD$((gh)^u)$.

构造 2 若存在 (k,λ)-SRGDD$((gh)^m)$ 和 (k,λ)-SRGDD(g^h), 则存在 (k,λ)-SRGDD(g^{hm}).

构造 3 设 $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 为一个 K-GDD, $\omega: X \to Z^+\cup\{0\}$ 为 X 上的一个权函数, 其中 Z^+ 为正整数集. 若对每一个区组 $B\in\mathcal{B}$, 都存在 (k,λ)-SF$(\{\omega(x): x \in B\})$. 则存在 (k,λ)-SF$(\{\sum_{x\in G_i}\omega(x): G_i \in \mathcal{G}\})$.

构造 4 若存在 n-F$(h_1^{u_1}\cdots h_t^{u_t})$ 和 (k,λ)-SRGDD(g^n), 则存在 (k,λ)-SF$((gh_1)^{u_1}\cdots(gh_t)^{u_t})$.

构造 5 若存在 (k,λ)-SF$((gr_1)^{u_1}\cdots(gr_t)^{u_t})$ 和 (k,λ)-SF(g^{r_i+1}), $1 \leqslant i \leqslant t$, 则存在 (k,λ)-SF(g^u), 其中 $u = 1 + \sum_{i=1}^t r_iu_i$.

为了给出更多的递推构造方法, 我们还需要不完全的可分解的可分组设计的概念.

定义 2 一个区组大小为 k 的 λ 重不完全的可分解的可分组设计, 记为 (k,λ)-IRGDD$(g^{(u,h)})$, 是满足以下条件的四元组 $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{B})$:

1. $|\mathcal{X}| = gu$. $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_u\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个划分, 每个 G_i (称为组) 的大小均为 g, $1 \leqslant i \leqslant u$. $\mathcal{H} = \{G_1, G_2, \ldots, G_h\} \subseteq \mathcal{G}$ ($\mathcal{H}$ 称为洞, 由部分组构成);

2. $\mathcal{X}$ 的每个不在同一组中出现且不在洞中出现的点对恰好在 λ 个区组中出现;

3. $\mathcal{B}$ 为区组集, 且它可以分解为两个集合的并, $\mathcal{B} = \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, 其中 $\mathcal{P}$ 中的区组可分解为 $\mathcal{X}$ 的一些平行类, $\mathcal{Q}$ 中的区组可分解为 $\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}$ 的一些平行类, 也称之为带洞平行类.

以下把超单的 (k,λ)-IRGDD$(g^{(u,h)})$ 记为 (k,λ)-SIRGDD$(g^{(u,h)})$. 由定义可知, (k,λ)-SIRGDD$(g^{(u,1)})$ 即为 (k,λ)-SRGDD(g^u). 下面我们给出用 (k,λ)-SIRGDD$(g^{(u,h)})$ 构造 (k,λ)-SRGDD 的一个递推构造方法, 以及运用此构造方法需要的 (k,λ)-SIRGDD$(g^{(u,h)})$ 的两个直接构造.

引理 2 存在 $(4,2)$-SIRGDD$(6^{(u,2)})$, 其中 $u \in \{8, 12\}$.

证明 取点集为 $(Z_{2(u-2)}\cup\{a,b,c,d\})\times Z_3$, 组为 $\{\{i, i+u-2\}\times Z_3 : 0 \leqslant i \leqslant u-3\}\cup\{\{a,b\}\times Z_3\}\cup\{\{c,d\}\times Z_3\}$, 洞为 $\{a,b,c,d\}\times Z_3$. 所求设计的所有区组可以由表 1 中的基区组经运算 $(+1 \bmod 2(u-2), +1 \bmod 3)$ 生成. 带下划线的区组可以经运算 $(+4 \bmod 2(u-2), +1 \bmod 3)$ 单独生成一个带洞平行类. 其余的所有平行类可由 P_1 和 P_2 先经运算 $(-, +1 \bmod 3)$ 生成两个初始平行类, 再经运算 $(+1 \bmod 2(u-2), -)$ 得到. □

构造 6 令 $h_i = gr_i$, $1 \leqslant i \leqslant t$. 设存在 (k,λ)-SF$(h_1h_2\cdots h_t)$, (k,λ)-SIRGDD$(g^{(r_i+h,h)})$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, 和 (k,λ)-SRGDD(g^{r_t+h}), 则存在 (k,λ)-SRGDD(g^u), 其中 $u = h + \sum_{i=1}^t r_i$.

表 1 引理 2 中 SIRGDD 的基区组

$u=12$	$\underline{\{(0,0),(1,0),(2,1),(3,1)\}}$		
P_1	$\{(4,0),(7,0),(10,1),(13,1)\}$	$\{(0,0),(2,0),(1,2),(3,2)\}$	$\{(8,0),(15,0),(19,1),(a,0)\}$
	$\{(18,0),(12,1),(16,1),(b,0)\}$	$\{(5,0),(14,0),(9,1),(c,0)\}$	$\{(6,0),(11,1),(17,1),(d,0)\}$
P_2	$\{(0,0),(4,0),(12,1),(17,1)\}$	$\{(1,0),(6,0),(8,2),(14,2)\}$	$\{(3,0),(11,0),(18,1),(b,1)\}$
	$\{(13,0),(2,1),(9,1),(a,2)\}$	$\{(5,0),(16,0),(10,1),(d,1)\}$	$\{(19,0),(7,1),(15,1),(c,2)\}$
$u=8$	$\underline{\{(0,0),(1,0),(2,1),(3,1)\}}$		
P_1	$\{(0,0),(2,0),(1,1),(a,0)\}$	$\{(3,0),(6,1),(10,1),(b,0)\}$	$\{(4,0),(11,0),(8,1),(c,0)\}$
	$\{(9,0),(5,1),(7,1),(d,0)\}$		
P_2	$\{(0,0),(3,0),(8,1),(b,1)\}$	$\{(2,0),(7,1),(11,1),(a,2)\}$	$\{(5,0),(10,0),(9,1),(d,1)\}$
	$\{(6,0),(1,1),(4,1),(c,2)\}$		

证明 设 $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 是一个 (k,λ)-SF$(h_1h_2\cdots h_t)$. 它的第 i 个组 G_i 对应的 $\frac{\lambda h_i}{k-1}$ 个带洞平行类为 H_i^j, $1\leqslant i\leqslant t$, $1\leqslant j\leqslant \frac{\lambda h_i}{k-1}$. 令 $\mathcal{Y}=\{G_{01},G_{02},\ldots,G_{0h}\}$, $|G_{0i}|=g$, $i=1,2,\ldots,h$. 对每一个 $G_i\in\mathcal{G}$, $1\leqslant i\leqslant t-1$, 在点集 $G_i\cup\mathcal{Y}$ 上构造 (k,λ)-SIRGDD$(g^{(r_i+h,h)})$, 它的 $\frac{\lambda h_i}{k-1}$ 个平行类标记为 P_i^j, $1\leqslant j\leqslant\frac{\lambda h_i}{k-1}$, $\frac{\lambda g(h-1)}{k-1}$ 个带洞平行类标记为 Q_i^l, $1\leqslant l\leqslant\frac{\lambda g(h-1)}{k-1}$. 对 $G_t\in\mathcal{G}$, 在点集 $G_t\cup\mathcal{Y}$ 上构造一个 (k,λ)-SRGDD(g^{r_t+h}), 它的 $\frac{\lambda(h_t+gh-g)}{k-1}$ 个平行类标记为 P_t^j, $1\leqslant j\leqslant\frac{\lambda(h_t+gh-g)}{k-1}$.

显然, $H_i^j\cup P_i^j$ 是一个 $\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}$ 上的平行类, $1\leqslant j\leqslant\frac{\lambda h_i}{k-1}, i=1,2,\ldots,t$. 而且 $P_t^{l+\frac{\lambda h_t}{k-1}}\cup(\bigcup_{i=1}^{t-1}Q_i^l)$ 也是点集 $\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}$ 上的平行类, $1\leqslant l\leqslant\frac{\lambda g(h-1)}{k-1}$. 容易验证上面得到的所有平行类构成一个 (k,λ)-SRGDD(g^u), 其中 $u=h+\sum_{i=1}^t r_i$. □

3 一些小设计的直接构造

这一节将给出一些参数较小的 (4,2)-SRGDD 的直接构造. 其中的一些将作为递推构造中的输入设计. 我们将主要利用差族的方法, 类似的构造方法可见 [33].

引理 3 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $(g,u)\in\{(2,4),(2,10)\}$.

证明 取点集为 Z_{2u}, 组为 $G_i=\{i,u+i\}$, $0\leqslant i\leqslant u-1$. 所有区组可以由表 2 中的基区组经运算 $+4 \bmod 2u$ 生成. 每一个带下划线的基区组可以生成一个平行类. 其余的所有平行类可以由两个初始平行类 P_1 和 P_2 生成. □

引理 4 存在 $(4,2)$-SRGDD(3^{12}).

证明 取点集为 $(Z_{11}\cup\{\infty\})\times Z_3$, 组集为 $\{\{i\}\times Z_3\colon i\in Z_{11}\}\cup\{\{\infty\}\times Z_3\}$. 所有平行类可由表 3 中的 P_1 和 P_2 先经运算 $(-,+1 \bmod 3)$ 生成两个初始平行类, 再经运算 $(+1 \bmod 11,-)$ 得到. □

引理 5 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $(g,u)\in\{(3,8),(4,7),(4,10),(4,13),(6,6),(12,5)\}$.

证明 取点集为 Z_{gu}, 组为 $G_i=\{i,u+i,\ldots,(g-1)u+i\}$, $0\leqslant i\leqslant u-1$. 所有平行类可以由表 4 中的基区组经运算 $+2 \bmod gu$ 得到. 其中, 每一个带下划线的区组可以生成两个平行类, 共可得 $g(u-4)/6$ 个平行类. 其余的 $gu/2$ 个平行类可以由不带下划线的一个平行类生成. □

引理 6 存在 $(4,2)$-SRGDD(6^{10}).

证明 由 [23, 引理 3.2] 可知, 存在 4-RGDD(6^{10}). 其点集为 $(Z_{18}\cup\{\infty_1,\infty_2\})\times Z_3$, 组集为 $\{\{j,j+9\}\times Z_3: j=0,1,\ldots,8\}\cup\{\{\infty_1,\infty_2\}\times Z_3\}$. 基区组见表 5. 定义两个点集的自同构如下.

表 2 引理 3 中 SRGDD 的基区组

$(g,u)=(2,4)$	$\underline{\{0,1,2,3\}}$	$\underline{\{0,1,6,7\}}$	$\underline{\{0,2,5,7\}}$	$\underline{\{0,3,5,6\}}$	
$(g,u)=(2,10)$	$\underline{\{0,5,6,19\}}$	$\underline{\{0,6,9,15\}}$			
P_1	{0, 1, 2, 3}	{4, 5, 8, 16}	{6, 12, 14, 19}	{7, 10, 15, 18}	{9, 11, 13, 17}
P_2	{0, 3, 7, 11}	{1, 4, 8, 19}	{2, 5, 13, 18}	{6, 10, 12, 17}	{9, 14, 15, 16}

表 3 引理 4 中 SRGDD 的基区组

P_1	$\{(0,0),(1,0),(2,1),(4,1)\}$	$\{(3,0),(6,0),(8,2),(9,2)\}$	$\{(5,0),(10,0),(7,2),(\infty,0)\}$
P_2	$\{(0,0),(3,0),(1,1),(7,1)\}$	$\{(5,0),(9,0),(6,2),(10,2)\}$	$\{(8,0),(2,1),(4,1),(\infty,2)\}$

表 4　引理 5 中 SRGDD 的基区组

(g,u) :	$\underline{\{0, 1, 2, 3\}}$				
$(3,8)$	{0, 3, 9, 13}	{1, 2, 8, 12}	{4, 16, 18, 23}	{5, 17, 19, 22}	{6, 10, 15, 21}
	{7, 11, 14, 20}				
$(4,7)$	$\underline{\{0, 1, 2, 3\}}$				
	{0, 2, 5, 10}	{1, 4, 16, 20}	{3, 9, 15, 27}	{6, 17, 25, 26}	{7, 12, 18, 22}
	{8, 14, 19, 23}	{11, 13, 21, 24}			
$(4,10)$	$\underline{\{0, 1, 23, 26\}}$	$\underline{\{0, 5, 14, 19\}}$			
	{10, 17, 19, 23}	{5, 7, 8, 16}	{1, 18, 20, 35}	{0, 3, 11, 27}	{6, 12, 24, 30}
	{2, 9, 37, 38}	{15, 29, 34, 36}	{4, 13, 28, 31}	{14, 22, 26, 39}	{21, 25, 32, 33}
$(4,13)$	$\underline{\{0, 1, 6, 51\}}$	$\underline{\{0, 5, 10, 27\}}$	$\underline{\{0, 11, 14, 33\}}$		
	{4, 38, 41, 47}	{10, 14, 17, 51}	{7, 15, 18, 43}	{6, 12, 28, 40}	{11, 21, 31, 48}
	{8, 13, 22, 29}	{2, 25, 26, 46}	{0, 30, 42, 50}	{1, 20, 24, 39}	{5, 34, 36, 45}
	{3, 35, 37, 49}	{9, 16, 32, 33}	{19, 23, 27, 44}		
$(6,6)$	$\underline{\{0, 1, 2, 3\}}$				
	{0, 2, 5, 7}	{1, 4, 15, 30}	{3, 8, 16, 24}	{6, 17, 25, 26}	{9, 19, 23, 28}
	{10, 14, 27, 35}	{11, 18, 22, 32}	{12, 21, 31, 34}	{13, 20, 29, 33}	
$(12,5)$	$\underline{\{0, 13, 14, 47\}}$				
	{10, 18, 27, 36}	{14, 35, 42, 46}	{9, 11, 43, 55}	{0, 16, 37, 58}	{3, 5, 34, 41}
	{15, 33, 44, 57}	{2, 13, 50, 56}	{6, 30, 53, 59}	{4, 7, 23, 26}	{1, 20, 39, 47}
	{17, 21, 29, 38}	{8, 19, 51, 52}	{12, 45, 48, 49}	{22, 24, 25, 31}	{28, 32, 40, 54}

表 5　引理 6 中 SRGDD 的基区组

P_1	$\{(2,1),(9,0),(16,0),(1,0)\}$	$\{(4,1),(10,1),(14,0),(17,2)\}$	$\{(6,1),(7,0),(8,0),(12,0)\}$
	$\{(13,1),(15,1),(0,2),(\infty_1,1)\}$	$\{(3,1),(5,2),(11,0),(\infty_2,1)\}$	
P_2	$\{(3,1),(10,0),(17,0),(2,0)\}$	$\{(5,1),(11,1),(15,0),(0,2)\}$	$\{(7,1),(8,0),(9,0),(13,0)\}$
	$\{(14,1),(16,1),(1,2),(\infty_1,0)\}$	$\{(4,1),(6,2),(12,0),(\infty_2,1)\}$	
P_3	$\{(4,1),(11,0),(0,0),(3,0)\}$	$\{(6,1),(12,1),(16,0),(1,2)\}$	$\{(8,1),(9,0),(10,0),(14,0)\}$
	$\{(15,1),(17,1),(2,2),(\infty_1,2)\}$	$\{(5,1),(7,2),(13,0),(\infty_2,1)\}$	

对 $i \in Z_{18}$, 令 $\sigma_1 : (i,x) \to (-i \bmod 18, x)$; $\sigma_2 : (\infty_1, x) \to (\infty_2, x), (\infty_2, x) \to (\infty_1, x)$. P_{i+3} 可以由 $\sigma_1\sigma_2$ 作用于 P_i $(i = 1,2,3)$ 得到. 易见, 每一个 P_i $(i = 1,2,\ldots,6)$ 可以通过运算 $(-, +1 \bmod 3)$ 得到一个初始平行类. 从而, 所需设计的 36 个平行类可由这 6 个初始平行类经运算 $(+3 \bmod 18, -)$ 得到. □

引理 7　存在 $(4,2)$-SRGDD(6^{14}).

证明　由 [23, 引理 3.3] 可知, 存在 4-RGDD(6^{14}). 其点集为 $(Z_{26} \cup \{\infty_1, \infty_2\}) \times Z_3$, 组集为 $\{\{j, j+13\} \times Z_3 : j = 0, 1, \ldots, 12\} \cup \{\{\infty_1, \infty_2\} \times Z_3\}$. 它的所有 26 个平行类可由表 6 中 P_1 的区组先通过运算 $(-, +1 \bmod 3)$ 得到一个平行类, 然后再经运算 $(+1 \bmod 26, -)$ 得到. 用以下方法可再得到一个 4-RGDD(6^{14}). 首先由 P_1 经运算 $(\times(-1) \bmod 26, -)$ 得到另一组基区组 P_2. 然后用和 P_1 同样的方法得到 26 个平行类. 经验证, 所有的 52 个平行类构成 $(4,2)$-SRGDD(6^{14}). □

引理 8　存在 $(4,2)$-SRGDD(12^u), 其中 $u \in \{6, 11, 15\}$.

表 6　引理 7 中 SRGDD 的基区组

P_1	$\{(5,1),(7,2),(8,0),(12,1)\}$	$\{(16,1),(17,0),(18,0),(24,1)\}$	$\{(2,1),(11,1),(19,0),(22,1)\}$
	$\{(4,1),(6,1),(20,2),(1,1)\}$	$\{(9,1),(13,1),(21,2),(25,1)\}$	$\{(3,1),(14,0),(23,2),(\infty_1,1)\}$
	$\{(10,1),(15,2),(0,0),(\infty_2,1)\}$		

表 7　引理 8 中 SRGDD 的基区组

(g,u)	P_1	P_2
$(12,6)$	$\{(10,1),(14,1),(18,0),(1,0)\}$	$\{(11,1),(15,1),(19,2),(2,2)\}$
	$\{(2,1),(4,1),(15,2),(16,1)\}$	$\{(3,1),(5,1),(16,0),(17,1)\}$
	$\{(12,1),(19,1),(0,2),(\infty_1,1))\}$	$\{(13,1),(0,1),(1,0),(\infty_1,2)\}$
	$\{(8,1),(11,2),(17,1),(\infty_2,1)\}$	$\{(9,1),(12,0),(18,1),(\infty_2,2)\}$
	$\{(3,1),(5,2),(6,2),(\infty_3,1)\}$	$\{(4,1),(6,0),(7,0),(\infty_3,1)\}$
	$\{(7,1),(9,0),(13,2),(\infty_0,1)\}$	$\{(8,1),(10,2),(14,0),(\infty_0,1)\}$
$(12,11)$	$\{(17,1),(19,1),(24,0),(28,0)\}$	$\{(18,1),(20,1),(25,2),(29,2)\}$
	$\{(6,1),(9,0),(21,2),(37,0)\}$	$\{(7,1),(10,2),(22,0),(38,2)\}$
	$\{(8,1),(14,0),(20,0),(1,0)\}$	$\{(9,1),(15,2),(21,2),(2,2)\}$
	$\{(2,1),(10,2),(18,1),(35,1)\}$	$\{(3,1),(11,0),(19,1),(36,1)\}$
	$\{(3,1),(4,2),(22,2),(30,2)\}$	$\{(4,1),(5,0),(23,0),(31,0)\}$
	$\{(23,1),(25,2),(26,1),(0,2)\}$	$\{(24,1),(26,0),(27,1),(1,0)\}$
	$\{(16,1),(27,0),(33,2),(38,0)\}$	$\{(17,1),(28,2),(34,0),(39,2)\}$
	$\{(7,1),(29,0),(31,2),(\infty_1,1)\}$	$\{(8,1),(30,2),(32,0),(\infty_1,1)\}$
	$\{(5,1),(32,0),(36,1),(\infty_2,1)\}$	$\{(6,1),(33,2),(37,1),(\infty_2,0)\}$
	$\{(11,1),(12,1),(15,2),(\infty_3,1)\}$	$\{(12,1),(13,1),(16,0),(\infty_3,2)\}$
	$\{(13,1),(34,0),(39,0),(\infty_0,1)\}$	$\{(14,1),(35,2),(0,2),(\infty_0,1)\}$
$(12,15)$	$\{(6,1),(10,1),(42,1),(51,1)\}$	$\{(7,1),(11,1),(43,1),(52,1)\}$
	$\{(23,1),(48,1),(53,1),(55,2)\}$	$\{(24,1),(49,1),(54,1),(0,0)\}$
	$\{(5,1),(12,1),(17,2),(32,0)\}$	$\{(6,1),(13,1),(18,0),(33,2)\}$
	$\{(14,1),(18,0),(45,2),(1,1)\}$	$\{(15,1),(19,2),(46,0),(2,1)\}$
	$\{(8,1),(15,0),(19,2),(0,2)\}$	$\{(9,1),(16,2),(20,0),(1,0)\}$
	$\{(4,1),(27,1),(38,2),(39,1)\}$	$\{(5,1),(28,1),(39,0),(40,1)\}$
	$\{(26,1),(28,1),(34,1),(36,2)\}$	$\{(27,1),(29,1),(35,1),(37,0)\}$
	$\{(16,1),(33,0),(49,0),(54,1)\}$	$\{(17,1),(34,2),(50,2),(55,1)\}$
	$\{(9,1),(41,0),(44,0),(47,2)\}$	$\{(10,1),(42,2),(45,2),(48,0)\}$
	$\{(3,1),(37,1),(40,0),(50,2)\}$	$\{(4,1),(38,1),(41,2),(51,0)\}$
	$\{(7,1),(20,0),(30,0),(46,1)\}$	$\{(8,1),(21,2),(31,2),(47,1)\}$
	$\{(2,1),(11,2),(31,1),(\infty_1,1)\}$	$\{(3,1),(12,0),(32,1),(\infty_1,2)\}$
	$\{(13,1),(29,2),(35,0),(\infty_2,1)\}$	$\{(14,1),(30,0),(36,2),(\infty_2,1)\}$
	$\{(21,1),(22,1),(52,2),(\infty_3,1)\}$	$\{(22,1),(23,1),(53,0),(\infty_3,2)\}$
	$\{(24,1),(25,2),(43,0),(\infty_0,1)\}$	$\{(25,1),(26,0),(44,2),(\infty_0,1)\}$

证明　由 [22, 引理 2.2] 可知, 存在 4-RGDD(12^u). 其点集为 $(Z_{4(u-1)}\cup\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,\infty_3\})\times Z_3$, 组集为 $\{\{j,j+(u-1),j+2(u-1),j+3(u-1)\}\times Z_3: j=0,1,\ldots,u-2\}\cup\{\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,\infty_3\}\times Z_3\}$. 基

区组见表 7. 定义点集上的 3 个自同构如下. 对 $i \in Z_{4(u-1)}$, $j \in Z_4$, 令 $\sigma_1 : (i,2) \to (i,0), (i,0) \to (i,2)$; $\sigma_2 : (i,x) \to (-i \bmod 4(u-1), x)$; $\sigma_3 : (\infty_j, x) \to (\infty_{j+1}, x)$, 其中 $j+1$ 在群 Z_4 中运算. 对 $u=6$, P_1 和 P_2 经 σ_2 作用分别得到 P_3 和 P_4. 对 $u=11,15$, P_3 和 P_4 可由 P_1 和 P_2 经 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 作用得到. 最后, 所需的全部平行类可由 P_i $(i=1,2,3,4)$ 经运算 $(+2 \bmod 4(u-1), +1 \bmod 3)$ 生成. □

引理 9 存在 $(4,2)$-SRGDD(12^u), 其中 $u \in \{17, 23\}$.

证明 由 [24, 引理 3.4] 可知, 存在 4-RGDD(12^u). 其点集为 $(Z_{4(u-1)} \cup \{\infty_0, \infty_1, \infty_2, \infty_3\}) \times Z_3$, 组集为 $\{\{j, j+(u-1), j+2(u-1), j+3(u-1)\} \times Z_3 : j = 0, 1, \ldots, u-2\} \cup \{\{\infty_0, \infty_1, \infty_2, \infty_3\} \times Z_3\}$. 和引理 8 中一样定义 3 个自同构 σ_1, σ_2 和 σ_3. 对每一个 u, 令 P_1 为表 8 中的基区组集, 则 P_2 可由 P_1 在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 作用下生成. 所有的平行类可由 P_1 和 P_2 经运算 $(+1 \bmod 4(u-1), +1 \bmod 3)$ 生成. □

引理 10 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $(g,u) \in \{(12,9), (6,18)\}$.

证明 对 $(g,u) = (12,9)$, 取点集为 $(Z_{32} \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4\}) \times Z_3$, 组为 $\{\{i, 8+i, 16+i, 24+i\} \times Z_3 : i = 0, 1, \ldots, 7\} \cup \{\{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4\} \times Z_3\}$. 对 $(g,u) = (6,18)$, 取点集为 $(Z_{34} \cup \{\infty_1, \infty_2\}) \times Z_3$, 组为 $\{\{0+i, 17+i\} \times Z_3 : i = 0, 1, \ldots, 16\} \cup \{\{\infty_1, \infty_2\} \times Z_3\}$. 对每一个 u, 令 P_1 为表 9 中的基区组集, 它先经运算 $(\times 5 \bmod g(u-1)/3, -)$ 得到 P_2. 然后 P_1 和 P_2 经运算 $(-, +1 \bmod 3)$ 生成两个初始平行类. 最后, 所需的 $2g(u-1)/3$ 个平行类可由 P_1 和 P_2 得到的两个初始平行类经运算 $(+1 \bmod g(u-1)/3, -)$ 生成. □

表 8 引理 9 中 SRGDD 的基区组

(g,u)	P_1	
$(12,17)$	$\{(42,1),(47,2),(55,0),(61,2)\}$	$\{(17,1),(24,1),(39,1),(51,1)\}$
	$\{(6,1),(30,2),(34,2),(45,1)\}$	$\{(29,1),(32,2),(53,0),(58,2)\}$
	$\{(3,1),(11,0),(12,2),(36,2)\}$	$\{(14,1),(16,1),(25,1),(33,1)\}$
	$\{(19,1),(31,0),(54,1),(60,2)\}$	$\{(26,1),(28,0),(46,1),(59,1)\}$
	$\{(2,1),(8,1),(15,2),(62,0)\}$	$\{(4,1),(18,0),(41,0),(48,2)\}$
	$\{(21,1),(22,1),(40,0),(43,0)\}$	$\{(35,1),(52,2),(56,1),(57,2)\}$
	$\{(9,1),(27,1),(37,1),(63,2)\}$	$\{(23,1),(38,2),(49,0),(\infty_1,1)\}$
	$\{(20,1),(50,2),(0,0),(\infty_2,1)\}$	$\{(5,1),(7,2),(44,0),(\infty_3,1)\}$
	$\{(10,1),(13,0),(1,2),(\infty_0,1)\}$	
$(12,23)$	$\{(23,1),(26,1),(34,1),(74,2)\}$	$\{(11,1),(16,0),(31,1),(41,1)\}$
	$\{(29,1),(54,1),(64,2),(82,1)\}$	$\{(12,1),(25,1),(36,0),(59,0)\}$
	$\{(8,1),(20,0),(38,0),(57,1)\}$	$\{(22,1),(35,0),(80,0),(86,0)\}$
	$\{(18,1),(46,2),(75,1),(77,0)\}$	$\{(6,1),(53,1),(67,0),(68,1)\}$
	$\{(3,1),(58,2),(84,0),(85,2)\}$	$\{(21,1),(47,0),(49,0),(70,2)\}$
	$\{(2,1),(37,0),(83,1),(87,0)\}$	$\{(28,1),(40,2),(44,2),(76,1)\}$
	$\{(9,1),(14,1),(30,1),(55,0)\}$	$\{(10,1),(48,2),(60,2),(81,0)\}$
	$\{(17,1),(62,2),(71,1),(72,1)\}$	$\{(7,1),(52,0),(61,0),(66,1)\}$
	$\{(39,1),(42,0),(56,0),(0,0)\}$	$\{(19,1),(27,2),(43,1),(50,0)\}$
	$\{(15,1),(24,2),(32,1),(51,1)\}$	$\{(4,1),(73,2),(79,0),(\infty_1,1)\}$
	$\{(45,1),(63,2),(65,0),(\infty_2,1)\}$	$\{(5,1),(78,2),(1,0),(\infty_3,1)\}$
	$\{(13,1),(32,2),(69,0),(\infty_0,1)\}$	

表 9　引理 10 中 SRGDD 的基区组

(g,u)	P_1	
$(12,9)$	$\{(0,0),(1,0),(5,1),(18,1)\}$	$\{(10,0),(17,0),(28,0),(14,1)\}$
	$\{(4,0),(6,0),(8,0),(7,1)\}$	$\{(9,0),(23,0),(26,0),(16,1)\}$
	$\{(21,0),(25,0),(30,0),(12,1)\}$	$\{(2,0),(13,1),(19,2),(\infty_1,0)\}$
	$\{(3,0),(24,1),(22,2),(\infty_2,0)\}$	$\{(11,0),(20,1),(15,2),(\infty_3,0)\}$
	$\{(27,0),(29,1),(31,2),(\infty_4,0)\}$	
$(6,18)$	$\{(7,0),(11,1),(17,1),(8,2)\}$	$\{(3,1),(5,1),(25,1),(21,2)\}$
	$\{(31,0),(6,1),(10,1),(12,2)\}$	$\{(1,1),(9,2),(22,2),(30,2)\}$
	$\{(33,0),(2,1),(26,1),(27,1)\}$	$\{(4,0),(23,0),(15,1),(24,1)\}$
	$\{(29,0),(0,1),(18,1),(19,1)\}$	$\{(13,0),(20,1),(32,2),(\infty_1,0)\}$
	$\{(14,0),(28,1),(16,2),(\infty_2,0)\}$	

表 10　引理 11 中 SRGDD 的基区组

P_1	$\{(3,1),(6,1),(7,1),(9,4)\}$	$\{(4,1),(8,2),(0,3),(\infty_1,1)\}$	$\{(2,1),(5,2),(1,3),(\infty_2,1)\}$
P_2	$\{(4,1),(8,5),(0,5),(1,2)\}$	$\{(5,6),(7,4),(9,0),(\infty_1,1)\}$	$\{(2,4),(3,8),(6,6),(\infty_2,1)\}$
P_3	$\{(7,1),(8,2),(9,7),(0,6)\}$	$\{(2,8),(4,7),(1,5),(\infty_1,1)\}$	$\{(3,5),(5,7),(6,0),(\infty_2,1)\}$

表 11　引理 12 中 SF 的基区组

P_1	$\{(1,0),(2,0),(3,1),(5,1)\}$	$\{(4,0),(8,0),(1,1),(13,1)\}$	$\{(5,0),(10,0),(23,1),(56,1)\}$
P_2	$\{(2,0),(28,1),(32,1),(54,1)\}$	$\{(4,0),(20,1),(27,1),(33,1)\}$	$\{(1,0),(12,0),(15,0),(24,0)\}$

引理 11　存在 $(4,2)$-SRGDD(18^6).

证明　由 [24, 引理 3.3] 可知, 存在 4-RGDD(18^6). 其点集为 $(Z_{10}\cup\{\infty_1,\infty_2\})\times Z_9$, 组集为 $\{\{j,j+5\}\times Z_9: j=0,1,\ldots,4\}\cup\{\{\infty_1,\infty_2\}\times Z_9\}$. 定义自同构 $\sigma:(i,j)\rightarrow(-i \bmod 10,-j \bmod 9)$. 则 P_{i+3} 可由表 10 中的 P_i 在 σ 作用下生成, 其中 $i=1,2,3$. 所有的平行类可由 P_i 经运算 $(+1 \bmod 10,+1 \bmod 9)$ 生成, 其中 $i\in\{1,2,\ldots,6\}$, 且每一个 P_i 经运算 $(-,+1 \bmod 9)$ 得到一个平行类. □

引理 12　存在 $(4,2)$-SF(6^{19}).

证明　由 [38, 引理 3.1] 可知, 存在 4-F(6^{19}). 其点集为 $Z_{57}\times Z_2$, 组集为 $\{\{j,j+19,j+38\}\times Z_2: j=0,1,\ldots,18\}$. 把表 11 中的每一个区组进行运算 $(\times 7^i \bmod 57,-)$, $0\leqslant i\leqslant 2$, 再把得到的区组经运算 $(+19 \bmod 57,-)$ 得到两个初始的洞为 $\{0,19,38\}\times Z_2$ 的带洞平行类 HP_1 和 HP_2. 定义自同构为 $\sigma:(i,x)\rightarrow(-i \bmod 57,x)$. 在 σ 的作用下, 每一个 HP_i, $i=1,2$, 可以生成一个新的洞为 $\{0,19,38\}\times Z_2$ 的带洞平行类 HP_{i+2}. 所需的全部带洞平行类可由 HP_i, $i=1,2,3,4$, 经运算 $(+j \bmod 57,-)$ 得到, 其中 $j=0,1,2,\ldots,18$. □

引理 13　存在 $(4,2)$-SF(6^u), 其中 $u\in\{7,11\}$.

证明　取点集为 Z_{6u}, 组为 $G_i=\{i,u+i,\ldots,5u+i\}, 0\leqslant i\leqslant u-1$. 所需的全部带洞平行类可以由表 12 中 P_1 的区组经运算 $+1 \bmod 6u$ 得到. 其中, HP_i, $i=1,2$, 可以经运算 $+gu/3 \bmod 6u$ 得到一个洞为 $\{0,u,\ldots,5u\}$ 的带洞平行类. □

引理 14　存在 $(4,2)$-SF(12^{19}).

证明　由定理 8 可知, 存在 4-F(6^{19}). 运用构造 4 可得所需设计, 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(2^4) 来自引理 3. □

表 12 引理 13 中 SF 的基区组

(g,u)	P_1			
$(6,7)$	{1, 2, 3, 5}	{4, 12, 22, 34}	{9, 25, 38, 41}	HP_1
	{1, 6, 10, 25}	{2, 8, 13, 33}	{3, 9, 18, 26}	HP_2
$(6,11)$	{1, 2, 3, 5}	{4, 7, 12, 16}	{6, 13, 18, 31}	HP_1
	{8, 14, 37, 43}	{10, 19, 42, 61}		
	{1, 8, 29, 47}	{2, 12, 28, 42}	{4, 21, 36, 60}	HP_2
	{5, 19, 35, 54}	{9, 17, 37, 62}		

表 13 引理 15 中 SRGDD 的基区组

(g,u)	P_1			
$(3,4)$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,6,7\}$	$\{0,2,5,11\}$	$\{0,3,5,10\}$
	$\{0,6,9,11\}$	$\{0,7,9,10\}$		
$(6,4)$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,6,7\}$	$\{0,2,5,7\}$	$\{0,3,13,14\}$
	$\{0,5,14,23\}$	$\{0,6,13,23\}$	$\{0,9,15,18\}$	$\{0,9,19,22\}$
	$\{0,10,15,17\}$	$\{0,10,19,21\}$	$\{0,11,17,22\}$	$\{0,11,18,21\}$

4 主要结果

本节将证明定理 7. 由定理 4 得: 若 $(4,2)$-SRGDD(g^u) 存在, 则 $u\geqslant 4$, $g(u-2)\geqslant 4$, $g(u-1)\equiv 0 \pmod 3$ 且 $gu\equiv 0 \pmod 4$. 由于 $u=4$ 的情形对其余无穷类的证明起着关键的作用, 我们首先证明 $(4,2)$-SRGDD(g^4) 的存在性.

引理 15 对任意整数 $g\geqslant 2$, 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^4).

证明 首先给出 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 和 $(4,2)$-SRGDD(6^4) 的直接构造. 取点集为 Z_{4g}, 组为 $G_i=\{i,4+i,\dots,(g-1)4+i\}$, $i=0,1,2,3$. 所需的 $2g$ 个平行类可以由表 13 中 P_1 的 $2g$ 个基区组经运算 $+4 \bmod 4g$ 生成.

以下证明当 $q>3$ 为素数幂时, 存在 $(4,2)$-SRGDD(q^4). 设点集为 $Z_4\times GF(q)$, 组为 $G_i=\{i\}\times GF(q)$, $i\in Z_4$. 令 ξ 为 GF(q) 的一个原根. 定义 L_k 和 P_k^y 如下:

$$L_k=\{\{(0,x),(1,x+y),(2,x+\xi y+k),(3,x+\xi^2y+k)\}: \ x,y\in GF(q)\},\quad k=0,1,$$

$$P_k^y=\{\{(0,x),(1,x+y),(2,x+\xi y+k),(3,x+\xi^2y+k)\}: \ x\in GF(q)\},\quad y\in GF(q).$$

易证 L_k 为一个 4-RGDD(q^4) 的区组集, 且 P_k^y 是其中的一个平行类. 进一步, 不难证明 $\mathcal{B}=L_0\cup L_1$ 为 $(4,2)$-SRGDD(q^4) 的区组集.

对任意的 $g\geqslant 2$, 把 g 分为两类: (1) $g\equiv 0 \pmod 2$. 此时, 令 $g=2m$, $m\geqslant 1$. $g=2,4,6$ 的情形可由引理 3 和以上的构造得到. $g=12,20$ 可由以上构造的 $(4,2)$-SRGDD$((g/4)^4)$ 和构造 1 得到. 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 和 $(4,2)$-SRGDD(5^4) 来自上面的直接构造和素数幂构造, 4-RGDD(4^4) 来自定理 3. 从而, 我们已经证明了存在 $(4,2)$-SRGDD$((2m)^4)$, 其中 $m\in\{1,2,3,6,10\}$. 对其余的 m, 由 $(4,2)$-SRGDD(2^4) 出发, 运用构造 1 即可得 $(4,2)$-SRGDD$((2m)^4)$, 其中的输入设计 4-RGDD(m^4) 来自定理 3. (2) $g\equiv 1 \pmod 2$. 此时, 令 $g=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$, 其中 $p_0=3$, $p_i>3\,(1\leqslant i\leqslant t)$ 为素数.

若 $\alpha_0 \geqslant 1$, 则由素数幂构造知存在 $(4,2)$-SRGDD($(3^{\alpha_0})^4$), 运用构造 1 和 4-RGDD($(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t})^4$) 即可得所需设计. 若 $\alpha_0 = 0$, 不失一般性, 可设 $\alpha_1 > 0$. 则由素数幂构造知存在 $(4,2)$-SRGDD($(p_1^{\alpha_1})^4$), 运用构造 1 和 4-RGDD($(p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t})^4$) 可得所需设计. □

对 $u > 4$, 我们把参数 g, u 分为 6 种情形分别证明: (1) $g \equiv 1,5 \pmod 6$, $g \geqslant 5$ 且 $u \equiv 4 \pmod{12}$; (2) $g \equiv 4,8 \pmod{12}$ 且 $u \equiv 1 \pmod 3$; (3) $g \equiv 0 \pmod{12}$; (4) $g \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $u \equiv 0 \pmod 2$; (5) $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $u \equiv 0 \pmod 4$; (6) $g \equiv 2,10 \pmod{12}$ 且 $u \equiv 4 \pmod 6$.

4.1 $g \equiv 1,5 \pmod 6$

引理 16 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $g \equiv 1,5 \pmod 6$, $g \geqslant 5$, $u \equiv 4 \pmod{12}$ 且 $u \geqslant 16$.

证明 对每一个 u, 由定理 5 知存在 $(u,4,2)$-SRBIBD. 运用构造 1 和输入设计 4-RGDD(g^4) 即得 $(4,2)$-SRGDD(g^u). □

4.2 $g \equiv 4,8 \pmod{12}$

引理 17 存在 $(4,2)$-SRGDD(4^u), 其中 $u \geqslant 7$ 且 $u \equiv 1 \pmod 3$.

证明 当 $u \in \{7,10,13\}$ 时, 结论来自引理 5. 对 $u = 43$, 从定理 8 中的 4-F(12^7) 出发. 运用构造 4 和输入设计 $(4,2)$-SRGDD(2^4), 可得 $(4,2)$-SF(24^7). 接着对 $h = 1$ 运用构造 6 可得 $(4,2)$-SRGDD(4^{43}). 对其余的 u, 令 $u = 3w+1$, 则 $w \geqslant 5$ 且 $w \neq 14$. 由引理 1 和 14 可知, 存在 $(4,2)$-SF(12^w). 同样运用构造 6 即得所需设计. □

引理 18 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $g \equiv 4,8 \pmod{12}$, $u \equiv 1 \pmod 3$ 且 $u \geqslant 7$.

证明 $g = 4$ 来自引理 17. 当 $g \geqslant 8$ 时, 令 $g = 4h$, 则 $h \geqslant 2$. 由定理 3 知, 存在 4-RGDD(4^u). 运用构造 1 可得所需设计, 其中输入设计 $(4,2)$-SRGDD(h^4) 来自引理 15. □

4.3 $g \equiv 0 \pmod{12}$

本小节的证明需要以下 PBD 的已知结论.

定理 9[39] 1. 对所有的 $v \geqslant 21$ 且 $v \notin \{22-24, 27-29, 32-34, 68, 69, 93, 94, 98, 99, 104, 108, 109, 114, 124\}$, 存在 $(v, \{5,6,7\}, 1)$-PBD.

2. 对所有的 $v \geqslant 21$ 且 $v \notin \{22-24, 27-29, 32-34, 94, 124\}$, 存在 $(v, \{5,6,7,8\}, 1)$-PBD.

3. 对所有的 $v \equiv 1 \pmod 2$ 且 $v \notin \{11-19, 23, 27-33, 39, 43, 51, 59, 71, 75, 83, 87, 95, 99, 107, 111, 113, 115, 119, 139, 179\}$, 存在 $(v, \{5,7,9\}, 1)$-PBD.

为方便起见, 以下令 $L = \{9-20, 22-24, 27-29, 32-34, 94, 124\}$.

引理 19 对任意的 $u \geqslant 5$ 且 $u \notin L$, 存在 $(4,2)$-SRGDD(12^u).

证明 当 $u \in \{5,6\}$ 时, 结论来自引理 5 和 8. 从 4-RGDD(4^7) 出发, 运用构造 1 和来自引理 15 的 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 可得 $(4,2)$-SRGDD(12^7). 类似地, 用来自引理 5 的 $(4,2)$-SRGDD(3^8) 和 4-RGDD(4^4) 可得 $(4,2)$-SRGDD(12^8). 对其余的 u, 由定理 9 知存在 $(u, \{5,6,7,8\}, 1)$-PBD. 删去此 PBD 中的一点, 并把这一点所在的区组看为组, 则可得一个 $\{5,6,7,8\}$-GDD($4^a5^b6^c7^d$), 其中 $4a+5b+6c+7d = u-1$. 运用构造 3 加权 12, 得到 $(4,2)$-SF($48^a60^b72^c84^d$). 其中的输入设计 $(4,2)$-SF(12^n), $n \in \{5,6,7,8\}$, 来自引理 1. 继续对 $h = 1$ 运用构造 6 和输入设计 $(4,2)$-SRGDD(12^n) 就可得 $(4,2)$-SRGDD(12^u). □

引理 20 存在 $(4,2)$-SRGDD(12^u), 其中 $u \in L \setminus \{27\}$.

证明 当 $u \in \{9,11,15,17,23\}$ 时, 结论来自引理 8–10. 当 $u \in \{10,12,14,16,18,20,22,24,28,32,34,94,124\}$ 时, 由定理 3 知, 存在 4-RGDD(6^u). 运用构造 1 和 $(4,2)$-SRGDD(2^4) 可得 $(4,2)$-SRGDD(12^u).

类似地, 当 $u\in\{13,19\}$ 时, 用 4-RGDD(4^u) 和 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 可得 $(4,2)$-RGDD(12^u). 当 $u\in\{29,33\}$ 时, 令 $u=4w+1$, 则 $w\in\{7,8\}$. 取来自定理 8 的 4-F(12^w). 运用构造 4 和 $(4,2)$-SRGDD(4^4) 可得 $(4,2)$-SF(48^w). 继续对 $h=1$ 运用构造 6 就可得 $(4,2)$-SRGDD(12^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(12^5) 来自引理 5. □

引理 21 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $g\equiv 0 \pmod{12}$, $u\geqslant 5$, 且 $(g,u)\neq(12t,27)$, $t=2$ 或 $t\equiv 1 \pmod 2$.

证明 令 $g=12t$, 则 $t\geqslant 1$. $t=1$ 来自引理 19 和 20. 当 $t\equiv 0 \pmod 2$ 且 $t>2$ 时, 由 4-RGDD(24^u) 出发; 当 $t\equiv 1 \pmod 2$ 或 $t=2$ 时, 由 4-RGDD(12^u) 出发. 运用构造 1 可得 $(4,2)$-SRGDD($(12t)^u$), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(t^4) 来自引理 15. □

4.4 $g\equiv 6 \pmod{12}$

引理 22 存在 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中 $u\equiv 0,4,8,10 \pmod{12}$, $u\geqslant 5$ 且 $u\notin\{70,82,118,142\}$.

证明 由已知条件和定理 3 可知, 对 $u\equiv 0,4,8 \pmod{12}$, 存在 4-RGDD(3^u); 对 $u\equiv 10 \pmod{12}$ 且 $u\notin M=\{10,34,46,70,82,94,118,130,142,178,202,214,238,250,334,346\}$, 存在 4-RGDD($2^u$). 运用构造 1 可得 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中 $u\equiv 0,4,8,10 \pmod{12}$, $u\geqslant 5$ 且 $u\notin M$. 构造所需的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(2^4) 和 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 分别来自引理 3 和 15. $u=10$ 来自引理 6. 对每一个 $u\in\{34,46,94,130,178,202,214,238,250,334,346\}$, 令 $u=3w+1$, 则 $w\in\{11,15,31,43,59,67,71,79,83,111,115\}$. 对 4-F($6^w$) 运用构造 4 可得 $(4,2)$-SF(18^w). 继续运用构造 6 和输入设计 $(4,2)$-SRGDD(6^4) 即得 $(4,2)$-SRGDD(6^u). □

引理 23 存在 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中 $u\equiv 6 \pmod{12}$ 且 $u\neq 162$.

证明 $u\in\{6,18\}$ 来自引理 5 和 10. 对其余的 u, 令 $u=6w$, 则 $w\equiv 1 \pmod 2$, $w\geqslant 5$ 且 $w\neq 27$. 由引理 21 知存在 $(4,2)$-SRGDD(36^w). 运用构造 2 可得 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(6^6) 来自引理 5. □

引理 24 存在 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中 $u\equiv 2 \pmod{12}$ 且 $u\neq 26$.

证明 $u=14$ 来自引理 7. 若 $u>14$, 令 $u=6w+2$, 则 $w\equiv 0 \pmod 2$ 且 $w\geqslant 6$. 由定理 8 可知存在 4-F(12^w). 运用构造 4 可得 $(4,2)$-SF(36^w). 继续运用构造 6 可得 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(6^8) 和 $(4,2)$-SIRGDD($6^{(8,2)}$) 分别来自引理 22 和 2. □

引理 25 存在 $(4,2)$-SRGDD(6^u), 其中 $u\in\{26,70,82,118,142,162\}$.

证明 若 $u\in\{82,142,162\}$, 令 $u=10w+2$, 则 $w\in\{8,14,16\}$. 对 4-F(12^w) 运用构造 4 可得 $(4,2)$-SF(60^w), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(5^4) 来自引理 15. 接着运用构造 6 可得所需设计, 其中输入设计 $(4,2)$-SRGDD(6^{12}) 和 $(4,2)$-SIRGDD($6^{(12,2)}$) 分别来自引理 22 和 2. 若 $u\in\{26,118\}$, 由 4-F(3^5) 或 4-F(6^{13}) 出发. 类似地, 运用构造 4 得到 $(4,2)$-SF(30^5) 或 $(4,2)$-SF(54^{13}). 再用构造 6 得所需设计, 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(6^6) 和 $(4,2)$-SRGDD(6^{10}) 分别来自引理 5 和 6. 对 $u=70$, 由引理 21 知存在 $(4,2)$-SRGDD(60^7). 运用构造 2 和 $(4,2)$-SRGDD(6^{10}) 可得 $(4,2)$-SRGDD(6^{70}). □

引理 26 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $u\geqslant 5$, $g\equiv 6 \pmod{12}$ 且 $u\equiv 0 \pmod 2$.

证明 $g=6$ 来自引理 22–25. 若 $g\geqslant 18$, 令 $g=12t+6$, 则 $t\geqslant 1$. 对 $u\equiv 0 \pmod 2$, $u>4$ 且 $u\notin\{6,54,68\}$, 存在 4-RGDD(6^u). 运用构造 1 可得 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD($(2t+1)^4$) 来自引理 15. 若 $u\in\{6,54,68\}$ 且 $g>18$, 同样运用构造 1 可得所需设计, 这里的输入设计为 $(4,2)$-SRGDD(6^u) 和 4-RGDD($(2t+1)^4$), 它们分别来自引理 5, 22, 23 和定理 3. 当 $u=6$ 且 $g=18$ 时, $(4,2)$-SRGDD(18^6) 来自引理 11. 当 $u\in\{54,68\}$ 且 $g=18$ 时, 由引理 21 知存

在 $(4,2)$-SRGDD(72^{17}) 和 $(4,2)$-SRGDD(108^9), 运用构造 2 可得 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(18^4) 和 $(4,2)$-SRGDD(18^6) 分别来自引理 15 和 11. □

4.5 $g \equiv 3 \pmod 6$

引理 27 存在 $(4,2)$-SRGDD(3^u), 其中 $u \equiv 0 \pmod 4$, $u \geqslant 8$.

证明 $u = 8, 12$ 分别来自引理 5 和 4. 对其余的 u, 令 $u = 4t$, 则 $t \geqslant 4$. 若 $t \neq 27$, 由引理 21 可知存在 $(4,2)$-SRGDD(12^t). 若 $t = 27$, 同样由引理 21 可知存在 $(4,2)$-SRGDD(36^9). 对这两种情形都用构造 2 即可得 $(4,2)$-SRGDD(3^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(3^4) 和 $(4,2)$-SRGDD(3^{12}) 来自引理 15 和 4. □

引理 28 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $g \equiv 3 \pmod 6$, $u \equiv 0 \pmod 4$ 且 $u \geqslant 8$.

证明 $g = 3$ 来自引理 27. 当 $g \geqslant 9$ 时, 令 $g = 6t+3$, 则 $t \geqslant 1$. 由定理 3 知存在 4-RGDD(3^u). 运用构造 1 可得 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD$((2t+1)^4)$ 来自引理 15. □

4.6 $g \equiv 2, 10 \pmod{12}$

引理 29 存在 $(4,2)$-SF(6^u), 其中 $u \in \{7, 11, 19\} \cup \{4t+1 : t \geqslant 1\}$.

证明 $u \in \{7, 11, 19\}$ 来自引理 12 和 13. 若 $u \in \{4t+1 : t \geqslant 1\}$, 由定理 8 知存在 4-F$(3^u)$. 运用构造 4 和 $(4,2)$-SRGDD(2^4) 即得所需设计. □

引理 30 存在 $(4,2)$-SF(6^u), 其中 $u \equiv 1 \pmod 2$, $u \geqslant 5$ 且 $u \notin \{15, 23, 27, 39\}$.

证明 若 $u \geqslant 21$ 且 $u \notin \{23, 27-33, 39, 43, 51, 59, 71, 75, 83, 87, 95, 99, 107, 111, 113, 115, 119, 139, 179\}$, 由定理 9 可知存在 $(u, \{5,7,9\}, 1)$-PBD. 令 $\omega = 6$, 运用构造 3 即得 $(4,2)$-SF(6^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SF(6^t), $t \in \{5,7,9\}$, 来自引理 29.

$u \in \{5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 29, 33\}$ 来自引理 29. 若 $u \in \{51, 59, 71, 75, 83, 87, 95, 99, 107, 111, 113, 115, 119, 139, 179\}$, 由定理 9 可知存在 $((u+1)/2, \{5,6,7\}, 1)$-PBD. 删去其点集中一个点可得 $\{5,6,7\}$-GDD $(4^a 5^b 6^c)$, 其中 $a, b, c \geqslant 0$ 且 $4a+5b+6c = (u+1)/2-1$. 令 $\omega = 12$, 运用构造 3 可得 $(4,2)$-SF$(48^a 60^b 72^c)$, 输入设计 $(4,2)$-SF(12^t), $t \in \{5,6,7\}$, 来自引理 1. 继续运用构造 5 即得 $(4,2)$-SF(6^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SF(6^t), $t \in \{9, 11, 13\}$, 全部来自引理 29.

对 $u \in \{31, 43\}$, 令 $u = 6v+1$, 则 $v \in \{5, 7\}$. 取 4-F(12^v). 运用构造 4 可得 $(4,2)$-SF(36^v). 继续运用构造 5 可得 $(4,2)$-SF(6^u), 其中的输入设计 $(4,2)$-SF(6^7) 来自引理 13. □

引理 31 若 $u \equiv 4 \pmod 6$ 且 $u > 4$, 则存在 $(4,2)$-SRGDD(2^u).

证明 $u = 10$ 来自引理 3. 若 $u \neq 10$, 令 $u = 3v+1$, 则 $v \geqslant 5$ 且 $v \equiv 1 \pmod 2$. 由引理 30 可知, 对 $v \notin \{15, 23, 27, 39\}$, 存在 $(4,2)$-SF(6^v). 运用构造 6 可得 $(4,2)$-SRGDD(2^u), 其中 $u \notin \{46, 70, 82, 118\}$. 当 $u \in \{46, 82, 118\}$ 时, 令 $u = 9v+1$, 则 $v \in \{5, 9, 13\}$. 由 4-F(6^v) 出发, 运用构造 4 可得 $(4,2)$-SF(18^v). 继续运用构造 6 就可得所需设计, 其中的输入设计 $(4,2)$-SRGDD(2^{10}) 来自引理 3. 对 $u = 70$, 由引理 18 知存在 $(4,2)$-SRGDD(20^7). 运用构造 3 即得 $(4,2)$-SRGDD(2^{70}). □

引理 32 存在 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中 $g \equiv 2, 10 \pmod{12}$, $u \equiv 4 \pmod 6$ 且 $u > 4$.

证明 $g = 2$ 来自引理 31. 以下设 $g > 2$. 若 $g \equiv 2 \pmod{12}$, 令 $g = 2(6m+1)$, 则 $m \geqslant 1$; 若 $g \equiv 10 \pmod{12}$, 令 $g = 2(6t+5)$, 则 $t \geqslant 0$. 由引理 31 可知, 存在 $(4,2)$-SRGDD(2^u). 运用构造 1 可得 $(4,2)$-SRGDD(g^u), 其中的输入设计 4-RGDD$((6t+5)^4)$ 和 4-RGDD$((6m+1)^4)$ 均来自定理 3. □

5 结束语

综合引理 15–32, 我们已经证明了本文的主要结果定理 7. 从而, $(4,2)$-SRGDD(g^u) 的存在性已经基本解决, 还剩下一个可能的无穷类. 值得一提的是: 若能给出 4-RGDD(12^{27}) 和 $(4,2)$-SRGDD(12^{27}) 的构造, 则由构造 1 可解决所有可能的例外. 由此可见, 4-RGDD(12^{27}) 和 $(4,2)$-SRGDD(12^{27}) 的存在性的证明对解决 $(4,2)$-SRGDD(g^u) 的存在性问题很关键. 而由本文直接构造的例子可见, 这两个设计中, 4-RGDD(12^{27}) 的存在性更为重要, 因为 $(4,2)$-SRGDD(12^{27}) 的存在性往往可以通过同构映射由它得到. 我们花费了大量的时间用差族的方法, 借助计算机搜索 4-RGDD(12^{27}) 的区组, 但是目前还未能成功.

致谢 感谢匿名审稿人的仔细阅读和宝贵意见.

参考文献

1 Gronau H-D O F, Mullin R C. On super-simple 2-(v,4,λ) designs. J Combin Math Combin Comput, 1992, 11: 113–121
2 Bluskov I. New designs. J Combin Math Combin Comput, 1997, 23: 212–220
3 Bluskov I, Hämäläinen H. New upper bounds on the minimum size of covering designs. J Combin Des, 1998, 6: 21–41
4 Stinson D R, Wei R, Zhu L. New constructions for perfect hash families and related structures using related combinatorial designs and codes. J Combin Des, 2000, 8: 189–200
5 Kim H K, Lebedev V. Cover-free families, superimposed codes and key distribution patterns. J Combin Des, 2004, 12: 79–91
6 Hartmann S. On simple and super-simple transversal designs. J Combin Des, 2000, 8: 311–320
7 Gronau H-D O F. Super-simple designs. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. Handbook of Combinatorial Designs, 2nd Ed. Boca Raton, FL: Chapman Hall/CRC, 2007, 633–635
8 Chen K, Wei R. Super-simple (v,5,4) designs. Discrete Appl Math, 2007, 155: 904–913
9 Chen K, Wei R. Super-simple (v,5,5) designs. Des Codes Cryptogr, 2006, 39: 173–187
10 Khodkar A. Various super-simple designs with block size four. Australas J Combin, 1994, 9: 201–210
11 Adams P, Bryant D, Khodkar A. On the existence of super-simple designs with block size 4. Aequationes Math, 1996, 52: 230–246
12 Cao H, Chen K, Wei R. Super-simple balanced incomplete block designs with block size 4 and index 5. Discrete Math, 2009, 309: 2808–2814
13 Cao H, Yan F, Wei R. Super-simple group divisible designs with block size 4 and index 2. J Statist Plann Inference, 2010, 140: 2497–2503
14 Cao H, Yan F. On super-simple group divisible designs with block size four and index $\lambda = 3, 4, 6$. J Statist Plann Inference, 2010, 140: 1330–1345
15 Cao H, Yan F. Super-simple group divisible designs with block size 4 and index 5. Discrete Math, 2009, 309: 5111–5119
16 Chen K. On the existence of super-simple (v,4,3)-BIBDs. J Combin Math Combin Comput, 1995, 17: 149–159
17 Chen K. On the existence of super-simple (v,4,4)-BIBDs. J Statist Plann Inference, 1996, 51: 339–350
18 Chen K, Cao Z, Wei R. Super-simple balanced incomplete block designs with block size 4 and index 6. J Statist Plann Inference, 2005, 133: 537–554
19 Abel R J R, Bennett F E, Ge G. Super-simple holey Steiner pentagon systems and related designs. J Combin Des, 2008, 16: 301–328
20 Abel R J R, Bennett F E, Zhang H. Holey Steiner pentagon systems. J Combin Des, 1999, 7: 41–56
21 Gronau H-D O F, Kreher D L, Ling A C H. Super-simple (v,5,2)-designs. Discrete Appl Math, 2004, 138: 65–77
22 Ge G. Resolvable group divisible designs with block size four. Discrete Math, 2002, 243: 109–119
23 Ge G, Lam C W H. Resolvable group divisible designs with block size four and group size six. Discrete Math, 2003, 268: 139–151
24 Ge G, Ling A C H. A survey on resolvable group divisible designs with block size four. Discrete Math, 2004, 279: 225–245
25 Ge G, Ling A C H. Asymptotic results on the existence of 4-RGDDs and uniform 5-GDDs. J Combin Des, 2005, 13: 222–237

26 Hanani H, Ray-Chauduri D K, Wilson R M. On resolvable designs. Discrete Math, 1972, 3: 343–357
27 Kreher D L, Ling A C H, Rees R S, et al. A note on 4-GDDs of type 2^{10}. Discrete Math, 2003, 261: 373–376
28 Rees R S. Group divisible designs with block size k having $k+1$ groups, for $k=4$ and 5. J Combin Des, 2000, 8: 363–386
29 Rees R, Stinson D R. Frames with block size four. Canad J Math, 1992, 44: 1030–1049
30 Shen H. Resolvable group divisible designs with block size 4. J Combin Math Combin Comput, 1987, 1: 125–130
31 Shen H. On the existence of nearly Kirkman systems. Ann Discrete Math, 1992, 52: 511–518
32 Shen H, Shen J. Existence of resolvable group divisible designs with block size four I. Discrete Math, 2002, 254: 513–525
33 Zhang X, Ge G. Super-simple resolvable balanced incomplete block designs with block size 4 and index 2. J Combin Des, 2007, 15: 341–356
34 Ge G, Lam C W H. Super-simple resolvable incomplete block designs with block size 4 and index 3. J Combin Des, 2004, 12: 1–11
35 Furino S C, Miao Y, Yin J X. Frames and Resolvable Designs: Uses, Constructions and Existence. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996
36 Colbourn C J, Stinson D R, Zhu L. More frames with block size four. J Combin Math Combin Comput, 1997, 23: 3–20
37 Ge G. Uniform frames with block size four and index one or three. J Combin Des, 2001, 9: 28–39
38 Ge G, Lam C W H, Ling A C H. Some new uniform frames with block size four and index one or three. J Combin Des, 2004, 12: 112–122
39 Abel R J R, Colbourn C J, Dinitz J H. Mutually Orthogonal Latin Squares. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. Handbook of Combinatorial Designs, 2nd Ed. Boca Raton, FL: Chapman Hall/CRC, 2007, 160–193

Super-simple resolvable group divisible designs with block size 4 and index 2

CAO HaiTao & MA HongYa

Abstract The concept of super-simple designs was first introduced by Gronau and Mullin in 1992. The existence of super-simple designs is an interesting extremal problem by itself, but there are also some useful applications. Super-simple group divisible designs are useful for the construction of other types of super-simple designs. In this paper, we shall show that the necessary conditions for the existence of a super-simple $(4,2)$-RGDD of type g^u are also sufficient possibly except for $(g,u)=(12t,27)$, where $t=2$ or $t\equiv 1 \bmod 2$.

Keywords: group divisible design, resolvable, super-simple
MSC(2000): 05B05
doi: 10.1360/012010-463