

# 带初始奇异性的多项时间分数阶扩散方程 一类全离散数值方法的误差分析

任金城<sup>1</sup>, 陈虎<sup>2†</sup>, 张继伟<sup>2‡</sup>, 张智民<sup>2\*</sup>

1. 河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046;

2. 北京计算科学研究中心, 北京 100193

E-mail: renjincheng2001@126.com, chenhu@ouc.edu.cn, jiweizhang@whu.edu.cn, zmzhang@csrc.ac.cn

收稿日期: 2018-07-10; 接受日期: 2020-03-13; 网络出版日期: 2020-04-07; \* 通信作者

国家自然科学基金(批准号: 11601119, 11726603, 11771035, 11801026, 11871092, 11926356 和 U1930402)、河南财经政法大学青年拔尖人才资助计划和河南省高校创新人才支持计划(批准号: 18HASTIT027) 资助项目

**摘要** 本文研究了带有初始奇异性的多项时间分数阶扩散方程的一种全离散数值方法. 首先, 基于  $L_1$  公式在渐变网格下离散多项 Caputo 时间分数阶导数, 构造了多项时间分数阶扩散方程的时间半离散格式, 证明了时间格式通过选取合适的网格参数  $r$ , 时间方向的误差可以达到最优的收敛阶  $2 - \alpha_1$ , 其中  $\alpha_1$  ( $0 < \alpha_1 < 1$ ) 为多项时间分数阶导数阶数的最大值. 然后, 空间采用谱方法进行离散, 得到了全离散格式, 证明了全离散格式的无条件稳定性和收敛性. 为了降低计算量和储存量, 对多项时间分数阶扩散方程又构造了时间方向的快速算法, 同时证明了该格式的收敛性. 数值算例验证了算法的有效性, 显示了快速算法的高效性.

**关键词** 多项时间分数阶扩散方程 弱奇异性  $L_1$  格式 渐变网格 收敛性**MSC (2020) 主题分类** 65M12, 65M06, 65M70

## 1 引言

近年的一些研究发现, 分数阶微积分算子可以更好地描述具有历史记忆性和空间全域相关性等的复杂动力学行为和物理过程<sup>[1,2]</sup>, 而分数阶导数的非局部性质给理论分析和数值求解带来了诸多困难. 通常情况下, 这类方程的解析解难以求得. 即使对一些简单的模型问题, 其解的表达式也往往比较复杂, 常常会表示为一些特殊函数的形式, 如 Wright 函数和 Mittag-Leffler 函数等. 由于这些函数对应的级数收敛很慢, 在实际应用中这些特殊函数的计算也非常困难, 因此发展这类方程的数值求解

†当前地址: 中国海洋大学数学科学学院, 青岛 266100.

‡当前地址: 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072.

英文引用格式: Ren J C, Chen H, Zhang J W, et al. Error analysis of a fully discrete scheme for a multi-term time fractional diffusion equation with initial singularity (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2021, 51: 1279–1296, doi: 10.1360/N012018-00176

方法就显得尤为重要<sup>[3,4]</sup>.

本文考虑如下的多项时间分数阶扩散方程:

$$\mathbb{D}_t^{\vec{\alpha}} u(x, t) - \nu \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x := (x_1, x_2) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是有界的矩形区域,  $(0, T]$  为有限时间区域,  $\nu > 0$  为扩散系数,  $\Delta$  表示二维 Laplace 算子,  $f(x, t)$  为已知函数.  $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  满足  $1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n > 0, n \geq 1$ ,

$$\mathbb{D}_t^{\vec{\alpha}} u = \sum_{i=1}^n b_i D_t^{\alpha_i} u, \quad b_i > 0, \quad (1.4)$$

其中  $\alpha_i$  阶 Caputo 分数阶导数  $D_t^{\alpha_i} u(x, t)$  的定义如下 (详见文献 [1,2]):

$$D_t^{\alpha_i} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_i)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha_i} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} ds, \quad 0 < \alpha_i < 1. \quad (1.5)$$

到目前为止, 关于分数阶微分方程数值算法的研究已经有许多研究成果. Sun 等<sup>[5]</sup> 对扩散波方程应用降阶法处理, 将其转化为  $\alpha \in (0, 1)$  阶的 Caputo 时间分数阶导数, 利用插值思想, 导出了  $L1$  数值积分公式, 给出了截断误差的具体表达式, 证明了  $L1$  公式具有  $2 - \alpha$  阶逼近精度. 同时, 将该公式分别应用于分数阶慢扩散方程和波方程的求解, 建立了两个差分格式, 并给出了严格的理论分析. 随后, Zhang 等<sup>[6]</sup> 利用  $L1$  公式的逼近思想, 对分数阶波方程建立了一个空间四阶精度的紧差分格式, 通过能量分析法证明了该格式在最大模意义下的无条件稳定性和收敛性. Huang 等<sup>[7]</sup> 对空间分数阶扩散方程提出了一种二阶有限差分 - 谱方法. 但是这些分析大多基于假设问题的解在时间方向属于  $C^2[0, T]$  或  $C^3[0, T]$  的光滑性要求, 然而这种假设对时间分数阶的方程通常是不成立的. 如文献 [8, 定理 2.1] 指出, 当初始值  $v \in L^2(\Omega)$ ,  $f = 0$  时, 有下面的估计:

$$\|D_t^\alpha u(t)\| \leq Ct^{-\alpha} \|v\|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

该式表明, 对精确解  $u(x, t)$  求  $\alpha$  阶 Caputo 时间分数阶导数, 这些导数在  $t = 0$  附近解是无界的. 最近, Stynes 等<sup>[9]</sup> 在合理的正则性和相容性假设下, 对一维的时间分数阶扩散方程证明了存在唯一的古典解, 并且存在正常数  $C_u$  满足

$$\|\partial_x^{(4)} u(t)\|_{L^\infty} \leq C_u, \quad \|\partial_t^{(l)} u(t)\|_{L^\infty} \leq C_u(1 + t^{\alpha-l}), \quad 0 < t \leq T, \quad l = 0, 1, 2.$$

关于初边值问题的多项时间分数阶扩散方程, Li 等<sup>[10]</sup> 利用多项 Mittag-Leffler 函数的性质, 证明了问题解的唯一性和对初值  $u_0(x)$  和源项  $f(x, t)$  的连续依赖性, 并证明了当初始值  $u_0$  满足适当的光滑性条件时,  $\|\partial_t u(t)\| \leq C_{u_0} t^{\alpha-1}, t \in (0, T]$ .

对单项时间分数阶扩散方程, Jin 等<sup>[11,12]</sup> 应用 Laplace 变换和解的算子理论对时间做均匀网格剖分, 分别证明了在光滑初始值和非光滑初始值条件下, 时间方向的收敛阶为  $\mathcal{O}(t_n^{\alpha-1}\tau)$  和  $\mathcal{O}(t_n^{-1}\tau)$ , 其中  $\tau$  表示时间剖分的步长. Stynes 等<sup>[9]</sup> 利用渐变网格分析了  $L1$  格式下的时间分数阶扩散方程, 利用离散的最大模原理和局部截断误差的分析得到了相应的误差估计结果. Liao 等<sup>[13]</sup> 利用非均匀

时间网格上的  $L1$  公式逼近 Caputo 导数以消除初值奇异性, 并应用于求解分数阶线性反应扩散方程. 由于连续问题不一定满足极值原理, 他们构造了一个类似于 Riemann-Liouville 分数阶积分核的离散模拟, 利用 Mittag-Leffler 函数的级数形式给出了离散分数阶 Gronwall 不等式, 并且给出一般非均匀网格上的整体相容性误差阶. 由于分数阶导数为非局部算子, 为化解历史记忆性所带来的巨量存储需求, Liao 等<sup>[14]</sup> 利用 SOE (sum of exponentials) 技术构建了一个非均匀快速  $L1$  公式来逼近 Caputo 导数, 并针对一个分数阶半线性反应扩散方程, 构建了一个时间两层的计算格式. 利用离散  $H^2$  能量估计、离散分数阶 Gronwall 不等式和整体相容性分析技术, 得到了无穷模意义下的无条件收敛性结果. 发展分数阶方程的高效算法的工作, 主要致力于减少分数阶导数算子计算所需的存储量和计算量. 为了加速对弱奇异核的计算, Lubich 和 Schädle<sup>[15]</sup> 提出了一个快速卷积算法来计算非反射的边界条件. Liao 等<sup>[16]</sup> 基于  $L1$  公式和指数和逼近分数阶导数的积分核, 构造了可以快速计算 Caputo 导数的计算公式, 应用于分数阶扩散方程的数值求解, 显著地减少了计算时间和计算所需的存储量. 最近有关分数阶方程时间方向快速算法的相关工作可参见文献 [14, 17–20].

对多项时间分数阶扩散方程的数值求解, 也已经有一些研究工作. Ren 等<sup>[21]</sup> 对时间方向采用经典的  $L1$  公式逼近, 对空间方向采用紧差分格式和紧 ADI 格式分别离散一维和二维的多项时间分数阶扩散方程, 利用能量分析法证明了格式的稳定性 and 收敛性. Zhao 等<sup>[22]</sup> 对二维的多项时间分数阶扩散方程空间方向采用非协调  $EQ^{rot}$  元进行逼近, 时间导数仍用  $L1$  公式逼近, 得到了  $L^2$  范数和能量模意义下空间方向最优收敛阶的误差结果. Jin 等<sup>[23]</sup> 首先对多项时间分数阶扩散方程构造了空间半离散 Galerkin 有限元格式, 得到了关于光滑初始值和非光滑初始值空间方向几乎最优的误差估计, 进一步构造该问题的全离散格式, 同样证明了格式的稳定性 and 收敛性. 但是这些理论分析都必须假设问题的解满足  $u(t) \in C^2[0, T]$ . Stynes<sup>[24]</sup> 指出这里对  $u(t)$  的光滑性在初始时刻  $t = 0$  处的要求过于苛刻, 因为在  $t = 0$  附近  $u(t)$  及其导数会具有一定的奇异性. 近来很多人开始用各种网格剖分技术来处理这种奇异性, 如渐变网格<sup>[9, 25–30]</sup>、tanh 网格, 甚至更一般的非均匀网格<sup>[13, 14]</sup>. 这些非均匀网格的采用使得对问题离散格式稳定性和收敛性的分析会变得异常困难.

本文对带有初始奇异性的多项时间分数阶扩散方程 (1.1)–(1.3) 进行数值求解, 即假设问题 (1.1)–(1.3) 的解满足  $\|\partial_t^{(l)} u(t)\|_1 \leq C(1 + t^{\sigma-l})$ ,  $l = 0, 1, 2$ , 其中  $\sigma \in (0, 1)$  是正则化参数. 首先, 利用 Kopteva<sup>[25]</sup> 的分析技巧, 证明了在渐变网格下  $L1$  公式离散多项 Caputo 时间分数阶导数的局部截断误差结果. 然后, 构造问题的时间半离散格式, 证明了通过选取合适的网格参数, 时间方向的误差可以达到最优的收敛阶  $2 - \alpha_1$ . 随后, 空间方向基于谱方法进行离散得到了全离散格式, 证明了全离散格式的无条件稳定性和收敛性. 最后, 利用文献 [16] 的思想构造多项时间分数阶扩散方程时间方向的快速算法格式, 说明快速算法格式在减少计算时间和降低存储量方面是非常有效的.

文中使用 Sobolev 空间通常的定义和记号,  $L^2(\Omega)$ 、 $H^k(\Omega)$  及相应的范数分别为  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  和  $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ . 记  $v : (0, T) \rightarrow H^m(\Omega)$  的空间为  $L^\infty(0, T; H^m(\Omega))$ , 其范数为  $\|v\|_{L^\infty(H^m)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_m < +\infty$ .  $A \lesssim B$  表示  $A \leq CB$ , 其中  $C$  表示与空间网格剖分  $N$  以及时间剖分  $M$  无关的正常数, 而  $A \simeq B$  表示  $A \lesssim B$  和  $B \lesssim A$ .

## 2 多项时间分数阶导数 $L1$ 格式逼近的误差估计

本节首先建立多项时间分数阶导数  $L1$  公式的逼近格式, 随后给出相应的局部截断误差.

由于时间分数阶偏微分方程的解在初始时刻具有一定的弱奇异性, 我们对时间区间  $[0, T]$  采用渐变网格进行剖分, 即对  $r \geq 1$  和正常数  $M$ , 取剖分使得  $\{t_j = T(j/M)^r\}_{j=0}^M$ . 通过简单的计算可得

$$t_{j-1} \geq 2^{-r}t_j, \quad \forall j \geq 2, \tag{2.1}$$

和

$$\tau_j := t_j - t_{j-1} \simeq M^{-1}t_j^{1-1/r}, \quad \forall j = 1, \dots, M. \tag{2.2}$$

特别地,  $\tau_1 = t_1 \simeq M^{-r}$ .

为了得到多项时间分数阶导数  $L1$  逼近的误差估计, 我们需要以下引理.

**引理 2.1** 对任意的  $j \geq 1$ , 成立

$$\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j} \geq \frac{\tau_{j+2}}{\tau_{j+1}} \geq 1,$$

当且仅当  $r = 1$  时等号成立.

**证明** 由于  $t_j = T(j/M)^r, j = 0, \dots, M$ , 可得

$$\tau_j = t_j - t_{j-1} = TM^{-r}(j^r - (j-1)^r).$$

对任意的  $j \geq 1$ , 利用 Cauchy 中值定理知, 存在  $0 < \theta_j < 1$ , 使得

$$\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j} = \frac{(j+1)^r - j^r}{j^r - (j-1)^r} = \frac{(j+\theta_j)^{r-1}}{(j-1+\theta_j)^{r-1}} = \left(1 + \frac{1}{j-1+\theta_j}\right)^{r-1} \geq \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{r-1}.$$

类似可得

$$\frac{\tau_{j+2}}{\tau_{j+1}} = \frac{(j+2)^r - (j+1)^r}{(j+1)^r - j^r} = \frac{(j+1+\theta_{j+1})^{r-1}}{(j+\theta_{j+1})^{r-1}} = \left(1 + \frac{1}{j+\theta_{j+1}}\right)^{r-1} \leq \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{r-1}.$$

证明完毕. □

下面利用经典的  $L1$  公式离散时间分数阶导数. 首先, 引入记号  $\delta_t u(t_j) = [u(t_j) - u(t_{j-1})]/\tau_j, j \geq 1$ . 对于  $k = 1, \dots, M$ , 在  $t = t_k$  逼近时间分数阶导数  $D_t^\alpha u(t)$ , 可以得到 Caputo 分数阶导数在渐变网格下的  $L1$  离散公式如下:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(t_k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} (t_k - \eta)^{-\alpha} u'(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha} u'(\eta) d\eta \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha} \delta_t u(t_j) d\eta \\ &=: \delta_t^\alpha u(t_k). \end{aligned} \tag{2.3}$$

当  $k \geq 1$  时, 记

$$d_{k,j}^{(\alpha)} = \frac{\tau_j^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha} d\eta, \quad \forall j = 1, \dots, k. \tag{2.4}$$

则有

$$\delta_t^\alpha u(t_k) = \sum_{j=1}^k d_{k,j}^{(\alpha)} (u(t_j) - u(t_{j-1})).$$

由 (2.4) 容易验证  $d_{k,j+1}^{(\alpha)} > d_{k,j}^{(\alpha)} > 0$ . 对于任意网格函数  $\{V^j\}_{j=0}^M$ ,  $\delta_t^\alpha$  可以改写为下面的形式:

$$\delta_t^\alpha V^k = d_{k,k}^{(\alpha)} V^k - \sum_{j=0}^{k-1} (d_{k,j+1}^{(\alpha)} - d_{k,j}^{(\alpha)}) V^j, \quad k = 1, \dots, M, \tag{2.5}$$

其中  $d_{k,0}^{(\alpha)} := 0$ .

记

$$L_t^{\bar{\alpha}} V^k = \sum_{i=1}^n b_i \delta_t^{\alpha_i} V^k, \quad k = 1, \dots, M$$

和

$$d_{k,j}^{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^n b_i d_{k,j}^{(\alpha_i)}, \quad j = 0, \dots, k, \tag{2.6}$$

则

$$L_t^{\bar{\alpha}} V^k = d_{k,k}^{\bar{\alpha}} V^k - \sum_{j=0}^{k-1} (d_{k,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{k,j}^{\bar{\alpha}}) V^j, \quad k = 1, \dots, M, \tag{2.7}$$

其中, 对于所有的下标  $k$  和  $j$  ( $j \neq 0$ ), 成立  $d_{k,j+1}^{\bar{\alpha}} > d_{k,j}^{\bar{\alpha}} > 0$ .

我们有下面的引理.

**引理 2.2** 对于  $\{t_j\}_{j=0}^M$  上的任意网格函数  $\{V^j\}_{j=0}^M$ , 成立下面的估计:

$$|V^k| \leq |V^0| + \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} \max_{j=1, \dots, k} \{t_j^{\alpha_1} L_t^{\bar{\alpha}} |V^j|\}, \quad k = 1, \dots, M.$$

**证明** 假设对于某个  $m \in \{1, \dots, k\}$  成立  $\max_{j=1, \dots, k} |V^j| = |V^m|$ . 对于所有的  $j$ , 令  $W^j = |V^j| - |V^0|$ . 由于  $L_t^{\bar{\alpha}} |V^0| = 0$ , 则

$$\begin{aligned} L_t^{\bar{\alpha}} |V^m| &= L_t^{\bar{\alpha}} W^m = d_{m,m}^{\bar{\alpha}} W^m - \sum_{j=1}^{m-1} (d_{m,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{m,j}^{\bar{\alpha}}) W^j \\ &\geq d_{m,m}^{\bar{\alpha}} W^m - \sum_{j=1}^{m-1} (d_{m,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{m,j}^{\bar{\alpha}}) (|V^m| - |V^0|) \\ &= d_{m,1}^{\bar{\alpha}} (|V^m| - |V^0|). \end{aligned}$$

因此,  $|V^m| - |V^0| \leq (d_{m,1}^{\bar{\alpha}})^{-1} L_t^{\bar{\alpha}} |V^m|$ . 利用  $d_{m,1}^{\bar{\alpha}} \geq b_1 d_{m,1}^{(\alpha_1)} \geq b_1 t_m^{-\alpha_1} / \Gamma(1 - \alpha_1)$ , 结论得证.  $\square$

**注 2.1** 引理 2.2 的结论亦可通过文献 [13] 中 Gronwall 不等式的证明技巧得到, 见文献 [13] 中的注 4.

**引理 2.3** 对任意的  $u(t) \in C^2(0, T]$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ , 有

$$|\delta_t^\alpha u(t_k) - D_t^\alpha u(t_k)| \lesssim t_k^{-\alpha} \left\{ \max_{j=1, \dots, k} \psi_j^{(\alpha)} \right\}, \tag{2.8}$$

其中

$$\psi_1^{(\alpha)} = \tau_1^\sigma \sup_{\eta \in (0, t_1)} (\eta^{1-\sigma} |\delta_t u(t_1) - u'(\eta)|), \quad (2.9a)$$

$$\psi_j^{(\alpha)} = \tau_j^{2-\alpha} t_j^\alpha \sup_{\eta \in (t_{j-1}, t_j)} |u''(\eta)|, \quad \forall j = 2, \dots, M. \quad (2.9b)$$

**证明** 利用文献 [25, 引理 2.3], 可以得到同样的结论. 由于我们的证明方法更加简单和直接, 所以为了内容完整起见, 给出具体的证明过程. 令  $r^k = \delta_t^\alpha u(t_k) - D_t^\alpha u(t_k)$ . 记  $I_{1,j}u(t)$  表示在  $t_{j-1}$  和  $t_j$  处对  $u(t)$  线性插值, 则

$$I_{1,j}u(t) = u(t_{j-1}) + \delta_t u(t_j)(t - t_{j-1}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

由 (2.3) 得

$$\Gamma(1-\alpha)r^k = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha} (I_{1,j}u(\eta) - u(\eta))' d\eta. \quad (2.10)$$

当  $k=1$  时, 利用 Euler beta 函数 (参见文献 [1, 定理 D.6]) 有

$$\begin{aligned} |\Gamma(1-\alpha)r^1| &= \left| \int_0^{t_1} (t_1 - \eta)^{-\alpha} [\delta_t u(t_1) - u'(\eta)] d\eta \right| \\ &= \left| \int_0^{t_1} (t_1 - \eta)^{-\alpha} \eta^{\sigma-1} \eta^{1-\sigma} [\delta_t u(t_1) - u'(\eta)] d\eta \right| \\ &\leq \psi_1^{(\alpha)} \tau_1^{-\sigma} \int_0^{t_1} (t_1 - \eta)^{-\alpha} \eta^{\sigma-1} d\eta \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(1+\sigma-\alpha)} \psi_1^{(\alpha)} t_1^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

利用文献 [31, 定理 2], 对  $\eta \in [t_{k-1}, t_k]$  ( $k \geq 2$ ) 有

$$|(I_{1,k}u(\eta) - u(\eta))'| \leq \tau_k \sup_{\eta \in (t_{k-1}, t_k)} |u''(\eta)|.$$

借助于导数插值误差估计, 对  $k \geq 2$  得

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - \eta)^{-\alpha} (I_{1,k}u(\eta) - u(\eta))' d\eta \right| &\leq \tau_k \sup_{\eta \in (t_{k-1}, t_k)} |u''(\eta)| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - \eta)^{-\alpha} d\eta \\ &= \tau_k \sup_{\eta \in (t_{k-1}, t_k)} |u''(\eta)| \frac{\tau_k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &\leq t_k^{-\alpha} \psi_k^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

当  $k \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_1} (t_k - \eta)^{-\alpha} [\delta_t u(t_1) - u'(\eta)] d\eta \right| &= \int_0^{t_1} (t_k - \eta)^{-\alpha} \eta^{\sigma-1} \eta^{1-\sigma} [\delta_t u(t_1) - u'(\eta)] d\eta \\ &\leq \sup_{\eta \in (0, t_1)} (\eta^{1-\sigma} |\delta_t u(t_1) - u'(\eta)|) \int_0^{t_1} (t_k - \eta)^{-\alpha} \eta^{\sigma-1} d\eta \end{aligned}$$

$$\leq (t_k - t_1)^{-\alpha} \frac{\tau_1^\sigma}{\sigma} \psi_1^{(\alpha)} \tau_1^{-\sigma} \lesssim t_k^{-\alpha} \psi_1^{(\alpha)}, \tag{2.12}$$

其中最后一个不等式用到了  $(t_k - t_1)^{-\alpha} = t_k^{-\alpha} (1 - t_1/t_k)^{-\alpha} \lesssim t_k^{-\alpha}$ .

对  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  ( $j \geq 2$ ) 利用插值余项定理 (参见文献 [32, 第 122 页]) 得

$$u(t) - I_{1,j}u(t) = \frac{u''(\bar{\xi}_s)}{2}(t - t_{j-1})(t - t_j), \quad \forall \bar{\xi}_s(t) \in (t_{j-1}, t_j). \tag{2.13}$$

对  $k \geq 3$  有

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_{k-1}} \eta^{-\alpha} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta &= \int_{t_1}^{t_k/2} \eta^{-\alpha} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta + \int_{t_k/2}^{t_{k-1}} \eta^{-\alpha} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\lesssim (t_k - t_k/2)^{-\alpha-1} (t_k/2)^{1-\alpha} + (t_k/2)^{-\alpha} (t_k - t_{k-1})^{-\alpha} \\ &\lesssim \tau_k^{-\alpha} t_k^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

当  $k \geq 3$ , 由分部积分、(2.13) 和 (2.14), 得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=2}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha} (I_{1,j}u(\eta) - u(\eta))' d\eta \right| &= 7 \left| \alpha \sum_{j=2}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} (u(\eta) - I_{1,j}u(\eta)) d\eta \right| \\ &\leq \sum_{j=2}^{k-1} \psi_j^{(\alpha)} \tau_j^\alpha t_j^{-\alpha} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\leq \sum_{j=2}^{k-1} \psi_j^{(\alpha)} \tau_k^\alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} \eta^{-\alpha} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\leq \max_{j=2, \dots, k-1} \{ \psi_j^{(\alpha)} \} \tau_k^\alpha \int_{t_1}^{t_{k-1}} \eta^{-\alpha} (t_k - \eta)^{-\alpha-1} d\eta \\ &\lesssim t_k^{-\alpha} \max_{j=2, \dots, k-1} \{ \psi_j^{(\alpha)} \}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

将 (2.11)、(2.12) 和 (2.15) 代入 (2.10), 即可完成证明. □

利用引理 2.3 和三角不等式易得下面的估计.

**引理 2.4** 对任意的  $u \in C^2(0, T]$ , 成立

$$|L_t^\alpha u(t_k) - \mathbb{D}_t^\alpha u(t_k)| \lesssim \sum_{i=1}^n b_i t_k^{-\alpha_i} \left\{ \max_{j=1, \dots, k} \psi_j^{(\alpha_i)} \right\}.$$

**引理 2.5** 假设对任意的  $\sigma \in (0, 1)$  和  $t \in (0, T]$  有  $|u^{(l)}(t)| \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $l = 0, 1, 2$ , 则由 (2.9) 式定义的  $\psi_j^{(\alpha)}$  满足如下估计:

$$\psi_j^{(\alpha)} \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha\}}, \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

**证明** 令  $\gamma = \min\{r\sigma, 2 - \alpha\}$ . 对于  $l = 1, 2$ , 由  $0 < t \leq T$  可得  $|u^{(l)}(t)| \lesssim t^{\sigma-l}$ . 利用 (2.1) 和 (2.2), 对  $2 \leq j \leq M$  有

$$\psi_j^{(\alpha)} \lesssim (\tau_j/t_j)^{2-\alpha} t_j^\sigma \lesssim (\tau_j/t_j)^\gamma t_j^\sigma \lesssim M^{-\gamma} t_j^{-\gamma/r} t_j^\sigma \lesssim M^{-\gamma}.$$

下面估计  $\psi_1^{(\alpha)}$ . 由  $\psi_1^{(\alpha)} = \tau_1^\sigma \sup_{\eta \in (0, t_1)} (\eta^{1-\sigma} |\delta_t u(t_1) - u'(\eta)|)$ ,

$$\tau_1^\sigma \sup_{\eta \in (0, t_1)} (\eta^{1-\sigma} |\delta_t u(t_1)|) \leq \int_0^{t_1} |u'(\xi)| d\xi \lesssim \int_0^{t_1} \xi^{\sigma-1} d\xi \lesssim \tau_1^\sigma \simeq M^{-r\sigma},$$

和

$$\tau_1^\sigma \sup_{\eta \in (0, t_1)} (\eta^{1-\sigma} |u'(\eta)|) \lesssim \tau_1^\sigma \simeq M^{-r\sigma},$$

可得  $\psi_1^{(\alpha)} \lesssim M^{-r\sigma}$ . 证明完毕. □

### 3 时间半离散格式及其误差估计

本节主要构造原问题 (1.1)–(1.3) 的时间半离散格式, 进而利用能量分析法给出其相应的误差估计结果.

首先考虑问题 (1.1)–(1.3) 的时间半离散格式. 记  $U^j(x)$  为精确解  $u(x, t)$  在  $t_j$  处的逼近. 则问题 (1.1)–(1.3) 的时间半离散格式为: 求  $U^k(x)$  使得

$$L_t^{\bar{\alpha}} U^k(x) - \nu \Delta U^k(x) = f^k(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$U^k(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, \dots, M, \tag{3.2}$$

$$U^0(x) = u_0. \tag{3.3}$$

下面给出时间半离散格式 (3.1)–(3.3) 的误差估计.

**引理 3.1** 设  $u(x, t)$  和  $\{U^j(x)\}_{j=0}^M$  分别为方程 (1.1)–(1.3) 和时间半离散格式 (3.1)–(3.3) 的解. 假设解满足正则性条件  $\|\partial_t^l u(t)\| \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $l = 0, 1, 2$ . 则

$$\|u(t_k) - U^k\| \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}}, \quad k = 1, \dots, M.$$

**证明** 记  $e^m := u(\cdot, t_m) - U^m$  为时间  $t_m$  处的误差. 由 (1.1)–(1.3) 和 (3.1)–(3.3) 可得误差方程

$$L_t^{\bar{\alpha}} e^m - \nu \Delta e^m = \underbrace{L_t^{\bar{\alpha}} u(\cdot, t_m) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(\cdot, t_m)}_{=: r^m}, \quad m = 1, \dots, M, \tag{3.4}$$

$$e^0 = 0. \tag{3.5}$$

对 (3.4) 两端用  $e^m$  做内积, 利用边界条件 (3.2) 和 Cauchy-Schwarz 引理可得

$$d_{k,k}^{\bar{\alpha}} \|e^m\|^2 + \nu \|\nabla e^m\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m-1} (d_{m,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{m,j}^{\bar{\alpha}}) \|e^j\| \|e^m\| + \|r^m\| \|e^m\|. \tag{3.6}$$

因此

$$d_{k,k}^{\bar{\alpha}} \|e^m\| \leq \sum_{j=1}^{m-1} (d_{m,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{m,j}^{\bar{\alpha}}) \|e^j\| + \|r^m\|,$$

即

$$L_t^{\bar{\alpha}} \|e^m\| \leq \|r^m\|. \tag{3.7}$$

由引理 2.2 可得

$$\|e^k\| \lesssim \max_{1 \leq m \leq k} \{t_m^{\alpha_1} L_t^{\bar{\alpha}} \|e^m\|\} \lesssim \max_{1 \leq m \leq k} \{t_m^{\alpha_1} \|r^m\|\}, \quad \forall k = 0, \dots, M-1.$$

进一步, 由引理 2.3 和 2.4 可得

$$\max_{1 \leq m \leq k} \{t_m^{\alpha_1} \|r^m\|\} \lesssim \max_{1 \leq m \leq k} \left\{ t_m^{\alpha_1} \sum_{i=1}^n b_i t_m^{-\alpha_i} \left( \max_{j=1, \dots, m} \|\psi_j^{(\alpha_i)}\| \right) \right\} \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}}. \tag{3.8}$$

证明完毕. □

### 4 全离散格式的稳定性分析和误差估计

本节我们考虑多项时间分数阶扩散方程 (1.1)–(1.3) 的全离散格式的稳定性分析和误差估计.

令  $\Lambda := (-1, 1)$ ,  $N$  为一个正整数. 定义  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  为  $\Lambda$  上的次数不超过  $N$  的多项式空间,  $\mathbb{P}_N^0 := \{\phi \in \mathbb{P}_N(\Lambda) : \phi(\pm 1) = 0\}$  和  $H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

令  $\pi_N^{1,0}$  为  $H_0^1(\Omega)$  到  $(\mathbb{P}_N^0)^2$  的 Ritz 正交投影算子, 即对于任意的  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$(\nabla \pi_N^{1,0} v, \nabla v_N) = (\nabla v, \nabla v_N), \quad \forall v_N \in (\mathbb{P}_N^0)^2. \tag{4.1}$$

由文献 [33, (5.8.15)] 知, 投影算子  $\pi_N^{1,0}$  满足下面的逼近性质: 对于任意的  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$ , 有

$$\|v - \pi_N^{1,0} v\|_k \leq CN^{k-s} \|v\|_s, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad s \geq 1. \tag{4.2}$$

对空间的逼近, 我们采用 Legendre 谱方法, 则方程 (1.1)–(1.3) 的全离散逼近格式为: 求  $u_N^k \in (\mathbb{P}_N^0)^2$ , 使得

$$(L_t^{\bar{\alpha}} u_N^k, v_N) + \nu(\nabla u_N^k, \nabla v_N) = (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in (\mathbb{P}_N^0)^2, \quad k = 1, \dots, M, \tag{4.3}$$

$$u_N^0 = \pi_N^{1,0} u_0. \tag{4.4}$$

(4.3) 可以改写为

$$a(u_N^k, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in (\mathbb{P}_N^0)^2,$$

其中

$$a(u_N^k, v_N) := d_{k,k}^{\bar{\alpha}}(u_N^k, v_N) + \nu(\nabla u_N^k, \nabla v_N)$$

是一个双线性形式并且在  $(\mathbb{P}_N^0)^2 \times (\mathbb{P}_N^0)^2$  上连续、强制. 又

$$F(v_N) := (f^k, v_N) + \sum_{j=0}^{k-1} (d_{k,j}^{\bar{\alpha}} - d_{k,j-1}^{\bar{\alpha}})(u_N^j, v_N)$$

是一个线性泛函, 故由 Lax-Milgram 引理知, 全离散问题 (4.3)–(4.4) 的解存在且唯一.

下面我们给出全离散问题 (4.3)–(4.4) 的稳定性分析结果.

**定理 4.1** 设  $\{u_N^j\}_{j=0}^M$  是全离散问题 (4.3)–(4.4) 的解. 则有下面的稳定性结果:

$$\|u_N^k\| \leq \|u_N^0\| + \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} T^{\alpha_1} \max_{1 \leq j \leq M} \|f^j\|, \quad k = 1, \dots, M.$$

**证明** 在 (4.3) 中取  $v_N = u_N^k$  得

$$(L_t^{\bar{\alpha}} u_N^k, u_N^k) + \nu \|\nabla u_N^k\|^2 = (f^k, u_N^k), \quad k = 1, \dots, M.$$

利用 (2.7) 的定义和 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$d_{k,k}^{\bar{\alpha}} \|u_N^k\|^2 + \nu \|\nabla u_N^k\|^2 \leq \sum_{j=0}^{k-1} (d_{k,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{k,j}^{\bar{\alpha}}) \|u_N^j\| \|u_N^k\| + \|f^k\| \|u_N^k\|, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.5)$$

因此

$$d_{k,k}^{\bar{\alpha}} \|u_N^k\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} (d_{k,j+1}^{\bar{\alpha}} - d_{k,j}^{\bar{\alpha}}) \|u_N^j\| + \|f^k\|, \quad k = 1, \dots, M, \quad (4.6)$$

即

$$L_t^{\bar{\alpha}} \|u_N^k\| \leq \|f^k\|, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.7)$$

利用引理 2.2 得

$$\begin{aligned} \|u_N^k\| &\leq \|u_N^0\| + \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} \max_{j=1, \dots, k} \{t_j^{\alpha_1} L_t^{\bar{\alpha}} \|u_N^j\|\} \\ &\leq \|u_N^0\| + \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} T^{\alpha_1} \max_{1 \leq j \leq M} \|f^j\|, \quad k = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

证明完毕. □

下面我们给出全离散格式 (4.3)–(4.4) 的误差估计结果. 令

$$e_N^j = u(t_j) - u_N^j = (u(t_j) - \pi_N^{1,0} u(t_j)) + (\pi_N^{1,0} u(t_j) - u_N^j) =: \hat{e}_N^j + \tilde{e}_N^j, \quad j = 0, \dots, M.$$

特别地, 有

$$e_N^0 = u_0 - \pi_N^{1,0} u_0 = \hat{e}_N^0 \quad \text{和} \quad \tilde{e}_N^0 = 0.$$

由原方程 (1.1)–(1.3) 和全离散格式 (4.3)–(4.4) 可得误差方程

$$\begin{aligned} (L_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N^m, v_N) + \nu (\nabla \hat{e}_N^m, \nabla v_N) &= (L_t^{\bar{\alpha}} u(t_m) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_m), v_N) - (L_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N^m, v_N) \\ &= \underbrace{(L_t^{\bar{\alpha}} u(t_m) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_m))}_{=: r^m} - \underbrace{L_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N^m}_{=: P^m}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

**定理 4.2** 设  $u(x, t)$  和  $\{u_N^k\}_{k=0}^M$  分别为方程 (1.1)–(1.3) 和全离散格式 (4.3)–(4.4) 的解. 假设  $u(x, t) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega))$  和  $\mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$ , 解满足正则性条件  $\|\partial_t^l u(t)\|_1 \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $l = 0, 1, 2$ . 则成立

$$\|u(t_k) - u_N^k\| \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}} + N^{-s}, \quad k = 1, \dots, M.$$

**证明** 在 (4.8) 中取  $v_N = \tilde{e}_N^m$ , 利用与定理 4.1 类似的证明技巧可得

$$L_t^{\bar{\alpha}} \|\tilde{e}_N^m\| \leq \|r^m\| + \|P^m\|.$$

由引理 2.2 知

$$\|\tilde{e}_N^k\| \leq \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} \max_{1 \leq m \leq k} \{t_m^{\alpha_1} (\|r^m\| + \|P^m\|)\}. \quad (4.9)$$

由 (4.2) 得

$$\begin{aligned} \|P^m\| &= \|L_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N^m - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N(t_m) + \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N(t_m)\| \\ &\leq \|L_t^{\bar{\alpha}} u(t_m) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_m) - \pi_N^{1,0}(L_t^{\bar{\alpha}} u(t_m) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_m))\| + \|\mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} \hat{e}_N(t_m)\| \\ &\lesssim \|r^m\|_1 + N^{-s} \|\mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_m)\|_s \\ &\lesssim \|r^m\|_1 + N^{-s} \|\mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u\|_{L^\infty(H^s)}. \end{aligned}$$

利用引理 2.3 和 2.4 可得

$$\max_{1 \leq m \leq k} \{t_m^{\alpha_1} \|r^m\|_1\} \lesssim \max_{1 \leq m \leq k} \left\{ t_m^{\alpha_1} \sum_{i=1}^n b_i t_m^{-\alpha_i} \left( \max_{j=1, \dots, m} \|\psi_j^{(\alpha_i)}\|_1 \right) \right\} \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}}.$$

结合 (3.8), 由 (4.9) 可得

$$\|\tilde{e}_N^k\| \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}} + N^{-s}.$$

最后, 利用三角不等式即可完成证明. □

**注 4.1** 值得注意的是, 如果渐变网格参数  $r$  选取  $r \geq (2 - \alpha_1)/\sigma$ , 从定理 4.2 可以看出, 对全离散格式 (4.3)–(4.4) 可以得到最优的收敛阶  $\mathcal{O}(M^{-(2-\alpha_1)} + N^{-s})$ .

**注 4.2** 需要指出的是, 通过定理 4.2 的证明过程可以看出, 对问题精确解的假设  $D_t^\alpha u \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$  可以改为更弱的假设条件  $\|D_t^\alpha u(t)\|_s \lesssim t^{-\alpha}$ , 而定理的结论仍然成立.

## 5 时间方向的快速算法及误差估计

由于时间分数阶算子的历史依赖性, 直接利用  $L1$  公式离散 Caputo 分数阶导数进行计算, 其计算量和存储量都是非常巨大的. 本节主要通过 Jiang 等<sup>[16]</sup> 提出的指数和逼近核函数的方法, 建立时间分数阶导数的快速算法, 从而减少数值模拟中所需的计算量和存储量.

定义如下的差分算子  $\nabla_t u^k = u^k - u^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ . 令  $\varpi_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1}$ . 下面介绍指数和逼近的一个非常重要的引理.

**引理 5.1**<sup>[16]</sup> 对于给定的  $\alpha \in (0, 1)$ , 容许绝对误差  $\varepsilon$ , 截取时间长度  $t_\tau$ , 以及最终时间  $T$ , 存在一个正整数  $N_q^{(\alpha)}$ , 一组节点  $s_i^{(\alpha)} > 0$ , 权重  $w_i^{(\alpha)} > 0$  ( $i = 1, \dots, N_q^{(\alpha)}$ ) 满足

$$\left| \varpi_{1-\alpha}(t) - \sum_{i=1}^{N_q^{(\alpha)}} w_i^{(\alpha)} e^{-s_i^{(\alpha)} t} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [t_\tau, T],$$

其中

$$N_q^{(\alpha)} = \mathcal{O}\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \left(\log \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{T}{t_\tau}\right) + \log \frac{1}{t_\tau} \left(\log \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{1}{t_\tau}\right)\right).$$

对  $k = 1, \dots, M$ , 将 Caputo 分数阶导数  $D_t^\alpha u(t_k)$  的积分区间  $[0, t_k]$  分成  $[t_{k-1}, t_k]$  和  $[0, t_{k-1}]$  两段, 即局部分和历史依赖部分. 对  $[t_{k-1}, t_k]$  部分利用线性插值逼近, 而对历史依赖部分利用 SOE 技巧逼近其核函数 (引理 5.1) 得

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(t_k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{u'(\xi)}{(t_k - \xi)^\alpha} d\xi + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{k-1}} \frac{u'(\xi)}{(t_k - \xi)^\alpha} d\xi \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{(t_k - \xi)^\alpha} \nabla_t u^k \frac{d\xi}{\tau_k} + \sum_{i=1}^{N_q^{(\alpha)}} w_i^{(\alpha)} \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t_k - \xi)s_i^{(\alpha)}} u'(\xi) d\xi \\ &= d_{k,k}^{(\alpha)} \nabla_t u^k + \sum_{i=1}^{N_q^{(\alpha)}} w_i^{(\alpha)} e^{-s_i^{(\alpha)} \tau_k} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_{k-1}), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_k) = \int_0^{t_k} e^{-(t_k - \xi)s_i^{(\alpha)}} u'(\xi) d\xi, \quad \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq N_q^{(\alpha)}.$$

为了快速计算  $\mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_k)$ , 在区间  $[t_{k-1}, t_k]$  上采用线性插值逼近可得

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_k) &= e^{-s_i^{(\alpha)} \tau_k} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k - \xi)s_i^{(\alpha)}} u'(\xi) d\xi \\ &\approx e^{-s_i^{(\alpha)} \tau_k} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_{k-1}) + c_{k,i}^{(\alpha)} \nabla_t u^k, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N_q^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

其中系数

$$c_{k,i}^{(\alpha)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_k - \xi)s_i^{(\alpha)}} \frac{1}{\tau_k} d\xi, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N_q^{(\alpha)}.$$

因此我们得到时间方向快速算法 L1 格式如下:

$${}^F \delta_t^\alpha u(t_k) := d_{k,k}^{(\alpha)} \nabla_t u^k + \sum_{i=1}^{N_q^{(\alpha)}} w_i^{(\alpha)} e^{-s_i^{(\alpha)} \tau_k} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad (5.1)$$

其中  $\mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_k)$  满足  $\mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_0) = 0$  和如下的迭代公式:

$$\mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_k) = e^{-s_i^{(\alpha)} \tau_k} \mathcal{H}_i^{(\alpha)}(t_{k-1}) + c_{k,i}^{(\alpha)} \nabla_t u^k, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N_q^{(\alpha)}. \quad (5.2)$$

则多项时间分数阶导数的快速计算公式为

$${}^F L_t^{\bar{\alpha}} u^k := \sum_{i=1}^n b_i^F \delta_t^{\alpha_i} u(t_k), \quad k \geq 1. \quad (5.3)$$

方程 (1.1)–(1.3) 时间方向的快速求解全离散逼近格式为: 求  $u_N^k \in (\mathbb{P}_N^0)^2$ , 使得

$$({}^F L_t^{\bar{\alpha}} u_N^k, v_N) + \nu(\nabla u_N^k, \nabla v_N) = (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in (\mathbb{P}_N^0)^2, \quad k = 1, \dots, M, \quad (5.4)$$

$$u_N^0 = \pi_N^1 u_0. \quad (5.5)$$

由  ${}^F L_t^{\bar{\alpha}} u$  和  $L_t^{\bar{\alpha}} u$  的定义及文献 [14, 引理 3.3] 的证明过程, 易得下面的结论.

**引理 5.2** 假设  $u(x, t) \in C^1(0, T]$ , 并且对任意的  $\sigma \in (0, 1)$  和  $t \in (0, T]$ ,  $u^{(l)}(t)$  满足  $|u^{(l)}(t)| \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $l = 0, 1$ , 则对容许绝对误差  $\varepsilon$ , 成立

$$|{}^F L_t^{\bar{\alpha}} u(t_k) - L_t^{\bar{\alpha}} u(t_k)| \lesssim t_{k-1}^{\sigma} \varepsilon, \quad k = 1, \dots, M.$$

由引理 2.4 和 5.2, 利用三角不等式可以得到下面的引理.

**引理 5.3** 假设  $u(x, t) \in C^2(0, T]$ , 并且对任意的  $\sigma \in (0, 1)$  和  $t \in (0, T]$ ,  $u^{(l)}(t)$  满足  $|u^{(l)}(t)| \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $l = 0, 1, 2$ , 则对容许绝对误差  $\varepsilon$ , 成立

$$|{}^F L_t^{\bar{\alpha}} u(t_k) - \mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(t_k)| \lesssim \sum_{i=1}^n b_i t_k^{-\alpha_i} \left\{ \max_{j=1, \dots, k} \psi_j^{(\alpha_i)} \right\} + t_{k-1}^{\sigma} \varepsilon, \quad k = 1, \dots, M.$$

由文献 [14, (2.13)] 和 [14, 引理 2.5], 我们可以得到与引理 2.2 类似的结论.

**引理 5.4** 令  $\varepsilon \leq \min\{\frac{1}{3}\varpi_{1-\alpha}(T), \alpha\varpi_{2-\alpha}(T)\}$ . 对于  $\{t_j\}_{j=0}^M$  上的任意网格函数  $\{V^j\}_{j=0}^M$ , 成立下面的估计:

$$|V^k| \leq |V^0| + \Gamma(1 - \alpha_1) b_1^{-1} \max_{j=1, \dots, k} \{t_j^{\alpha_1} {}^F L_t^{\bar{\alpha}} |V^j|\}, \quad k = 1, \dots, M.$$

利用引理 5.3 和 5.4, 采用与定理 4.2 相同的证明过程, 我们可以得到下面的收敛性定理.

**定理 5.1** 设  $u(x, t)$  和  $\{u_N^k\}_{k=0}^M$  分别为方程 (1.1)–(1.3) 和全离散格式 (5.4)–(5.5) 的解. 假设  $u(x, t) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega))$  和  $\mathbb{D}_t^{\bar{\alpha}} u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$ , 解满足正则性条件  $\|\partial_t^l u(t)\|_1 \lesssim 1 + t^{\sigma-l}$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $l = 0, 1, 2$ . 令  $\varepsilon \leq \min\{\frac{1}{3}\varpi_{1-\alpha}(T), \alpha\varpi_{2-\alpha}(T)\}$ , 则成立

$$\|u(t_k) - u_N^k\| \lesssim M^{-\min\{r\sigma, 2-\alpha_1\}} + N^{-s} + \varepsilon, \quad k = 1, \dots, M.$$

## 6 数值实验

本节通过两个数值例子来验证算法的精度和有效性.

**例 6.1** 在方程 (1.1)–(1.3) 中取  $\nu = 0.1$ ,  $T = 1$ ,  $n = 2$ ,  $b_1 = b_2 = 1$ , 问题的精确解为

$$u(x, t) = (1 + t^{\alpha_1})(1 - x_1^2)(1 - x_2^2) \exp(x_1 + x_2),$$

相应的右端源项  $f(x, t)$  可以得到. 显然, 该问题的解在初始时刻  $t = 0$  处有一定的弱奇异性, 满足  $\|\partial_t^l u(t)\|_1 \lesssim 1 + t^{\alpha_1-l}$ ,  $l = 0, 1, 2$ .

记误差为  $\max_{1 \leq n \leq M} \|u_N^n - u(t_n)\|$ , 在这里我们采用 Gauss 积分来计算范数  $\|\cdot\|$ . 对于不同的时间剖分次数  $M_1$  和  $M_2$ , 记收敛阶为  $\frac{\ln(E_1/E_2)}{\ln(M_2/M_1)}$ , 其中  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是对应剖分次数  $M_i$  的误差.

首先, 我们验证时间方向的离散精度. 当  $N$  充分大时, 使得空间方向的误差不影响时间方向的精度, 由于解在空间方向充分光滑, 所以我们选取  $N = 20$  进行验证. 在不同的时间剖分次数  $M$  下, 如下的表 1–2 分别给出了当渐变网格参数  $r$  取 1 和  $1/\alpha_1$  时, 在不同时间分数阶导数值  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  下的误差和收敛阶, 结果表明全离散格式 (4.3)–(4.4) 在时间方向的收敛阶为  $\mathcal{O}(M^{-\min\{r\alpha_1, 2-\alpha_1\}})$ , 这与理论分析结果相一致. 当渐变网格参数  $r$  选取最优的值  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时, 表 3 的数值结果表明时间方向的收敛阶可以达到最优的结果  $2 - \alpha_1$ , 而当渐变网格参数选取  $r = 2/\alpha_1$  大于最优的值

$(2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时, 表 4 的数值结果表明时间方向的收敛阶也达到最优的结果  $2 - \alpha_1$ , 这与注 4.1 是吻合的.

表 1 例 6.1 当  $r = 1$  时格式 (4.3)–(4.4) 时间方向误差及收敛阶

$M$	$\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.2$		$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3$		$\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.4$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	5.8155E-2	0.2678	3.1208E-2	0.4605	1.2261E-2	0.6598
128	4.8305E-2	0.2711	2.2680E-2	0.4666	7.7607E-3	0.6680
256	4.0029E-2	0.2742	1.6412E-2	0.4718	4.8843E-3	0.6745
512	3.3101E-2	0.2769	1.1835E-2	0.4761	3.0602E-3	0.6796
1024	2.7321E-2	0.2792	8.5083E-3	0.4796	1.9107E-3	0.6836
2048	2.2513E-2	*	6.1018E-3	*	1.1896E-3	*

表 2 例 6.1 当  $r = 1/\alpha_1$  时格式 (4.3)–(4.4) 时间方向误差及收敛阶

$M$	$\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.2$		$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3$		$\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.4$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	3.7536E-3	0.9764	4.3669E-3	0.9723	4.0835E-3	0.9487
128	1.9078E-3	0.9818	2.2258E-3	0.9795	2.1156E-3	0.9512
256	9.6599E-4	0.9858	1.1288E-3	0.9846	1.0942E-3	0.9634
512	4.8778E-4	0.9887	5.7047E-4	0.9860	5.6114E-4	0.9731
1024	2.4581E-4	0.9910	2.8801E-4	0.9851	2.8585E-4	0.9801
2048	1.2367E-4	*	1.4550E-4	*	1.4491E-4	*

表 3 例 6.1 当  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时格式 (4.3)–(4.4) 时间方向误差及收敛阶

$M$	$\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.2$		$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3$		$\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.4$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	5.9107E-4	1.6058	1.0998E-3	1.4158	1.8553E-3	1.1860
128	1.9420E-4	1.6183	4.1221E-4	1.4350	8.1546E-4	1.2064
256	6.3253E-5	1.6286	1.5245E-4	1.4494	3.5338E-4	1.2230
512	2.0456E-5	1.6375	5.5824E-5	1.4600	1.5139E-4	1.2365
1024	6.5746E-6	1.6453	2.0292E-5	1.4680	6.4252E-5	1.2477
2048	2.1018E-6	*	7.3353E-6	*	2.7058E-5	*

表 4 例 6.1 当  $r = 2/\alpha_1$  时格式 (4.3)–(4.4) 时间方向误差及收敛阶

$M$	$\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.2$		$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3$		$\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.4$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	5.7450E-4	1.6450	8.7332E-4	1.5053	1.2599E-3	1.3272
128	1.8369E-4	1.6582	3.0763E-4	1.5093	5.0214E-4	1.3252
256	5.8199E-5	1.6690	1.0806E-4	1.5118	2.0041E-4	1.3223
512	1.8302E-5	1.6776	3.7895E-5	1.5131	8.0142E-5	1.3193
1024	5.7211E-6	1.6845	1.3277E-5	1.5135	3.2116E-5	1.3164
2048	1.7799E-6	*	4.6504E-6	*	1.2896E-5	*

下面取容许误差  $\varepsilon = 10^{-10}$ . 在  $\alpha_1 = 0.5$  和  $\alpha_2 = 0.3$  时, 我们来比较时间方向快速算法格式 (5.4)–(5.5) 和传统  $L1$  格式 (4.3)–(4.4) 时间方向的误差、收敛精度及 CPU 时间. 固定空间多项式的次数  $N = 20$ , 渐变网格参数  $r$  分别取  $1/\alpha_1$  和  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时, 我们得到在相同时间分数阶导数值  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  下的运算结果. 表 5 和 6 的数值结果表明两个格式在时间方向的误差、收敛阶是完全一样的, 而快速算法格式的 CPU 运行时间上要比传统  $L1$  格式大大减少, 这与理论分析的结果是一致的.

其次, 我们来验证空间方向的收敛精度. 固定时间方向的剖分  $M = 10,000$ , 选取最优的渐变网格参数  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$ , 我们以  $\vec{\alpha} = (0.5, 0.3)$  为例. 图 1 给出了全离散格式 (4.3)–(4.4) 空间方向误差与多项式次数  $N$  的变化曲线, 其中纵坐标取对数坐标. 从中可以看出格式 (4.3)–(4.4) 空间方向达到了谱精度, 这与理论分析的结果相吻合. 由于两个格式在空间方向的离散方法完全一样, 所以时间方向的快速算法格式 (5.4)–(5.5) 在空间方向的收敛精度就不再赘述.

我们以  $\vec{\alpha} = (0.5, 0.3)$  为例比较时间方向的快速算法格式 (5.4)–(5.5) 和传统的  $L1$  格式 (4.3)–(4.4) 的 CPU 时间, 如图 2 所示: 固定  $N = 20$ , 取  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ . 从中可以看出快速算法格式 (5.4)–(5.5) 的计算量与  $M$  成线性关系, 比传统的  $L1$  格式 (4.3)–(4.4) 计算得更快, 所以 SOE 快速算法在降低存储量和减少计算时间方面更加有效.

**例 6.2** 下面考虑方程 (1.1)–(1.3) 更一般的情形. 令

$$\nu = 0.1, \quad T = 1, \quad n = 5, \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_5 = 1.$$

表 5 例 6.1 当  $r = 1/\alpha_1$  时比较两个格式时间方向误差、收敛阶及 CPU 时间

$M$	格式 (4.3)–(4.4)		格式 (5.4)–(5.5)	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	4.3669E-3	0.9723	4.3669E-3	0.9723
128	2.2258E-3	0.9795	2.2258E-3	0.9795
256	1.1288E-3	0.9846	1.1288E-3	0.9846
512	5.7047E-4	0.9860	5.7047E-4	0.9860
1024	2.8801E-4	0.9851	2.8801E-4	0.9851
2048	1.4550E-4	*	1.4550E-4	*
CPU (s)	196		12	

表 6 例 6.1 当  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时比较两个格式时间方向误差、收敛阶及 CPU 时间

$M$	格式 (4.3)–(4.4)		格式 (5.4)–(5.5)	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
64	1.0998E-3	1.4158	1.0998E-3	1.4158
128	4.1221E-4	1.4350	4.1221E-4	1.4350
256	1.5245E-4	1.4494	1.5245E-4	1.4494
512	5.5824E-5	1.4600	5.5824E-5	1.4600
1024	2.0292E-5	1.4680	2.0292E-5	1.4680
2048	7.3353E-6	*	7.3353E-6	*
CPU (s)	364		14	

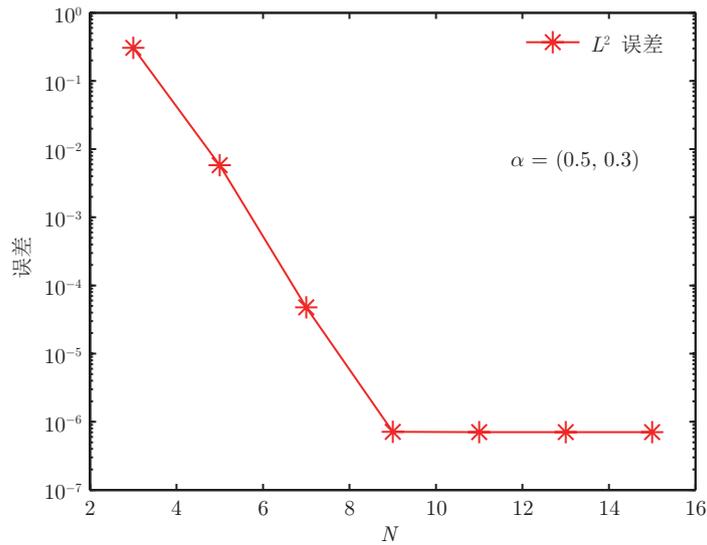


图 1 (网络版彩图) 例 6.1 当  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3$  时格式 (4.3)–(4.4) 的空间方向误差

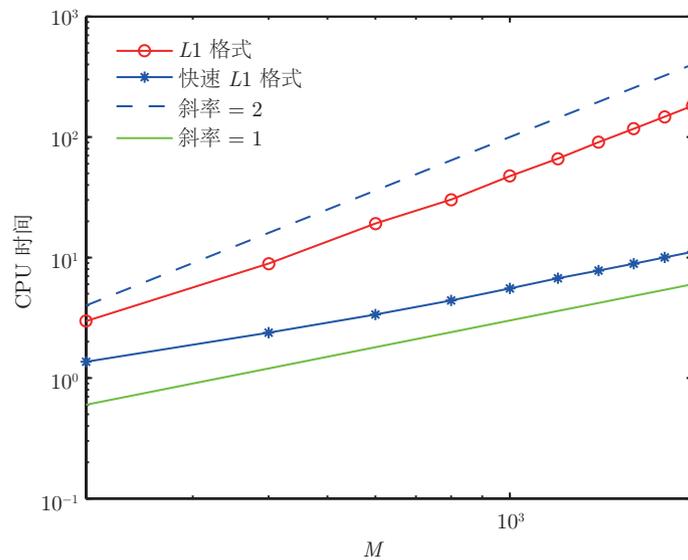


图 2 (网络版彩图) 例 6.1 快速算法格式 (5.4)–(5.5) 和 L1 格式 (4.3)–(4.4) 的 CPU 时间的比较

问题的精确解为

$$u(x, t) = (1 + t^{\alpha_1})(1 - x_1^2)(1 - x_2^2) \exp(x_1 + x_2).$$

相应的右端项和初边值条件可以由精确解确定下来.

我们仅验证时间方向的离散精度. 同样选取空间的剖分  $N = 20$  充分大, 使得空间方向的误差不影响时间方向的误差. 当渐变网格参数  $r$  选取最优的值  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时, 在不同的时间分数阶导数值  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$  下, 随着时间剖分的增加, 表 7 的数值结果表明时间方向的收敛阶可以达到最优的  $2 - \alpha_1$  阶, 这与理论分析结果相一致.

表 7 例 6.2 当  $r = (2 - \alpha_1)/\alpha_1$  时格式 (4.3)-(4.4) 时间方向误差及收敛阶

$M$	$\bar{\alpha}$	误差	收敛阶	$\bar{\alpha}$	误差	收敛阶	$\bar{\alpha}$	误差	收敛阶
10	$\alpha_1 = 0.3$	9.18E-3	1.52	$\alpha_1 = 0.5$	1.13E-2	1.30	$\alpha_1 = 0.7$	1.33E-2	1.16
20	$\alpha_2 = 0.25$	3.20E-3	1.56	$\alpha_2 = 0.4$	4.56E-3	1.34	$\alpha_2 = 0.6$	5.98E-3	1.18
40	$\alpha_3 = 0.2$	1.09E-3	1.58	$\alpha_3 = 0.3$	1.81E-3	1.38	$\alpha_3 = 0.5$	2.65E-3	1.19
80	$\alpha_4 = 0.15$	3.64E-4	1.60	$\alpha_4 = 0.2$	6.96E-4	1.40	$\alpha_4 = 0.4$	1.16E-3	1.20
160	$\alpha_5 = 0.1$	1.20E-4	1.61	$\alpha_5 = 0.1$	2.64E-4	1.42	$\alpha_5 = 0.3$	5.05E-4	1.21
320		3.92E-5	*		9.84E-5	*		2.18E-4	*

致谢 感谢两位审稿人对本文的审阅和提出的宝贵意见, 使得本文得以改进.

## 参考文献

- Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2004. New York: Springer, 2004
- Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999
- Chen W, Sun H G. Numerical algorithms for fractional differential equations: Status and problems (in Chinese). Comput Aided Eng, 2010, 19: 1-2 [陈文, 孙洪广. 分数阶微分方程的数值算法: 现状和问题. 计算机辅助工程, 2010, 19: 1-2]
- An N, Huang C, Yu X. Error analysis of direct discontinuous Galerkin method for two-dimensional fractional diffusion-wave equation. Appl Math Comput, 2019, 349: 148-157
- Sun Z, Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. Appl Numer Math, 2006, 56: 193-209
- Zhang Y, Sun Z, Zhao X. Compact alternating direction implicit scheme for the two-dimensional fractional diffusion-wave equation. SIAM J Numer Anal, 2012, 50: 1535-1555
- Huang J F, Nie N M, Tang Y F. A second order finite difference-spectral method for space fractional diffusion equations. Sci China Math, 2014, 57: 1303-1317
- Sakamoto K, Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. J Math Anal Appl, 2011, 382: 426-447
- Stynes M, O'Riordan E, Gracia J L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation. SIAM J Numer Anal, 2017, 55: 1057-1079
- Li Z, Liu Y, Yamamoto M. Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. Appl Math Comput, 2015, 257: 381-397
- Jin B T, Lazarov R, Zhou Z. An analysis of the  $L_1$  scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data. IMA J Numer Anal, 2016, 36: 197-221
- Jin B, Lazarov R, Zhou Z. Two fully discrete schemes for fractional diffusion and diffusion-wave equations with nonsmooth data. SIAM J Sci Comput, 2016, 38: A146-A170
- Liao H, Li D, Zhang J. Sharp error estimate of the nonuniform  $L_1$  formula for linear reaction-subdiffusion equations. SIAM J Numer Anal, 2018, 56: 1112-1133
- Liao H, Yan Y, Zhang J. Unconditional convergence of a fast two-level linearized algorithm for semilinear subdiffusion equations. J Sci Comput, 2019, 80: 1-25
- Lubich C, Schädle A. Fast convolution for nonreflecting boundary conditions. SIAM J Sci Comput, 2002, 24: 161-182
- Jiang S, Zhang J, Zhang Q, et al. Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations. Commun Comput Phys, 2017, 21: 650-678
- Shen J. Fast finite difference schemes for time-fractional diffusion equations with a weak singularity at initial time. East Asian J Appl Math, 2019, 8: 834-858
- Zhang Q, Zhang J, Jiang S, et al. Numerical solution to a linearized time fractional KdV equation on unbounded domains. Math Comp, 2018, 87: 693-719
- Ren J, Mao S, Zhang J. Fast evaluation and high accuracy finite element approximation for the time fractional subdiffusion equation. Numer Methods Partial Differential Equations, 2018, 34: 705-730
- Gao G H, Yang Q. Fast evaluation of linear combinations of Caputo fractional derivatives and its applications to multi-term time-fractional sub-diffusion equations. Numer Math Theory Methods Appl, 2020, 13: 433-451
- Ren J, Sun Z. Efficient and stable numerical methods for multi-term time fractional sub-diffusion equations. East Asian J Appl Math, 2014, 4: 242-266
- Zhao Y M, Zhang Y D, Liu F, et al. Analytical solution and nonconforming finite element approximation for the 2D multi-term fractional subdiffusion equation. Appl Math Model, 2016, 40: 8810-8825

- 23 Jin B, Lazarov R, Liu Y, et al. The Galerkin finite element method for a multi-term time-fractional diffusion equation. *J Comput Phys*, 2015, 281: 825–843
- 24 Stynes M. Too much regularity may force too much uniqueness. *Fract Calc Appl Anal*, 2016, 19: 1554–1562
- 25 Kopteva N. Error analysis of the  $L1$  method on graded and uniform meshes for a fractional-derivative problem in two and three dimensions. *Math Comp*, 2019, 88: 2135–2155
- 26 Huang C, Stynes M. Optimal spatial  $H^1$ -norm analysis of a finite element method for a time-fractional diffusion equation. *J Comput Appl Math*, 2020, 367: 112435
- 27 Brunner H. The numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes. *Math Comp*, 1985, 45: 417–437
- 28 Brunner H, Ling L, Yamamoto M. Numerical simulations of 2D fractional subdiffusion problems. *J Comput Phys*, 2010, 229: 6613–6622
- 29 Mustapha K. An implicit finite-difference time-stepping method for a sub-diffusion equation, with spatial discretization by finite elements. *IMA J Numer Anal*, 2011, 31: 719–739
- 30 Mustapha K, AlMutawa J. A finite difference method for an anomalous sub-diffusion equation, theory and applications. *Numer Algorithms*, 2012, 61: 525–543
- 31 Howell G W. Derivative error bounds for Lagrange interpolation: An extension of Cauchy’s bound for the error of Lagrange interpolation. *J Approx Theory*, 1991, 67: 164–173
- 32 Atkinson K, Han W. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. New York: Springer, 2009
- 33 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. *Spectral Methods. Scientific Computation*. Berlin: Springer-Verlag, 2007

## Error analysis of a fully discrete scheme for a multi-term time fractional diffusion equation with initial singularity

Jincheng Ren, Hu Chen, Jiwei Zhang & Zhimin Zhang

**Abstract** In this paper, a fully discrete scheme for a multi-term time fractional diffusion equation with initial singularity is considered. First, we construct a semi-discrete scheme by using the  $L1$  scheme on a graded mesh for the multi-term Caputo-type time fractional derivatives. It is shown that with appropriate choice of the grading parameter  $r$ , the method has the optimal  $2 - \alpha_1$  order convergence, where  $\alpha_1 \in (0, 1)$  is the highest fractional derivative order in the multi-term time fractional derivatives. Then we design a fully discrete scheme by combining the spectral method for the spatial discretization. Convergence and unconditional stability are proved rigorously. In order to reduce the storage requirement and computational cost, a fast evaluation scheme for the time fractional derivatives is applied. Numerical tests confirm that our error analysis is sharp and the fast algorithm improves the computational efficiency significantly.

**Keywords** multi-term time fractional diffusion equation, weak singularity,  $L1$  scheme, graded mesh, convergence

**MSC(2020)** 65M12, 65M06, 65M70

**doi:** 10.1360/N012018-00176