

一种改进的基于二次误差测度的 网格简化算法

吴韦力, 王博亮*, 黄绍辉

(厦门大学计算机科学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 在医学图像三维表面建模中, 会产生大量的三角面, 难以在普通 PC 机上进行实时渲染. 为了解决这个问题, 本文作者提出一种改进的基于二次误差测度的网格简化算法. 通过对顶点进行分类, 在简化过程中更好地保持了模型的细节特征, 同时考虑了网格中三角面的分布情况, 减小了几何误差. 结果表明, 算法既保持了原算法快速的优点, 又满足了医学图像处理对逼真度和网格质量的较高要求.

关键词: 网格简化; 边折叠; 二次误差测度

中图分类号: TP 391. 42

文献标识码: A

文章编号: 0438 0479(2007) 03- 0337- 05

在医学手术仿真系统中, 需要把采集到的各类医学图像进行三维重建得到三角网格模型, 并允许医生完成一些交互性的操作. 但是医学图像的数据量很大, 用移动立方体(Marching Cubes, MC)等算法进行三维重建产生的三角面数量之多甚至达到百万级, 超过了一般计算机的实时显示能力. 此外, 进行切割模型等交互性操作时, 需要对三角面进行碰撞检测及形变处理, 但即便是工作站也难以负荷上百万三角面的相关计算. 因此, 有必要对重建所得的三角网格进行简化.

1 网格简化算法

现有的网格简化策略^[1]中, 几何元素删除法应用最为广泛, 它包括顶点删除法、三角形折叠法、边折叠法等. 其中, 前两种方法需要对产生的空洞重新三角化, 处理比较费时. 相比之下, 边折叠法只需将相连的两个顶点合并到一个新顶点上, 并延续原有的拓扑关系, 效率大大提高, 而且鲁棒性更好.

边折叠法是 Hoppe^[2]在 1993 年提出来的, 其关键是确定边折叠的次序和折叠后新顶点的位置, Hoppe 使用能量函数作为误差测度得到了很好的简化效果, 但由于考虑了全局信息, 计算量太大. Garland^[3]于 1997 年提出基于二次误差测度(Quadric Error Metric)的边折叠简化算法(简称 QEM 算法), 他以顶点到

相关三角平面距离的平方和作为误差测度, 算法速度快, 而且能生成高质量的简化模型. 但是 QEM 算法的误差测度标准过于单一, 有时模型表面的细节特征会发生变形甚至丢失, 本文对此提出了一些改进.

2 QEM 算法

2.1 边折叠操作

如图 1 所示, 边折叠操作是将一条满足条件的边 (v_1, v_2) 简化为一个顶点 v , 通常一次边折叠可以减少 1 个顶点、2 个三角形、3 条边.

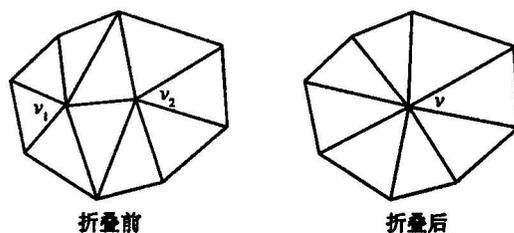


图 1 边折叠操作

Fig. 1 Edge collapse

2.2 二次误差测度

为了达到较好的简化效果, 需要评价边折叠前后产生的模型误差情况, 即折叠代价. 通过每次取出代价最小的边进行折叠, 有助于减少模型简化过程中产生的误差. Garland^[3]使用边折叠操作生成的新顶点到相关三角面距离的平方和作为误差度量.

在三维空间中, 一个三角平面可以用平面方程 $ax + by + cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ 来表示.

令 $p = [a \ b \ c \ d]^T$ 代表该平面, 点 v 的坐标为 $[v_x$

收稿日期: 2006-08-28

基金项目: 国家自然科学基金(60371012), 卫生部联合基金(WKJ2005-2-001), 福建省科技重点项目(2005Y0018)和厦门市科技计划项目(3502Z20051015)资助

* 通讯作者: blwang@xmu.edu.cn

$v, v = 1)^T$, 则点 v 到平面 p 距离的平方为:

$$D_p^2(v) = (p^T v)^2 = v^T (pp^T) v = v^T K_p v \quad (1)$$

其中:

$$K_p = pp^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$, $B = [ad \ bd \ cd]^T$, $C = d^2$.

令

$$Q(v_1) = \sum_{p \in \text{planes}(v_1)} K_p \quad (3)$$

为点 v_1 的二次误差测度矩阵, 其中 $\text{planes}(v_1)$ 为所有包含顶点 v_1 的三角面的集合.

根据 Garland 的定义, 由式(1) 可得折叠代价:

$$\Delta v = \sum_{p \in \text{planes}(v_1) \cup \text{planes}(v_2)} D_p^2(v) = \sum_{p \in \text{planes}(v_1) \cup \text{planes}(v_2)} v^T K_p v = v^T \left(\sum_{p \in \text{planes}(v_1) \cup \text{planes}(v_2)} K_p \right) v.$$

但在实际应用中, 为了减少储存空间并加快计算速度, 折叠代价 Δv 通常使用

$$v^T \left(\sum_{p \in \text{planes}(v_1)} K_p + \sum_{p \in \text{planes}(v_2)} K_p \right) v,$$

来进行估算, 即:

$$\Delta v = v^T (Q(v_1) + Q(v_2)) v,$$

新顶点 v 的二次误差测度矩阵由 v_1, v_2 的二次误差测度矩阵线性相加得到. 这样就能快速计算出折叠所影响到的边的误差代价, 并进行相关的更新操作.

2.3 新顶点的位置

点 v 位置的选取对折叠代价的计算也有很大的影响, 容易想到应计算使折叠代价最小化的点 v 坐标. 由式(2)、(3) 可知 $Q(v)$ 是对称矩阵, 再仿照式(2) 的划分方式, 可得:

$$\Delta v = v^T Q(v) v = v^T A v + 2B^T v + C \quad (4)$$

对上式求偏导数并令其为 0, 得 $v = -A^{-1}B$. 即当 A 可逆时, 点 v 坐标取 $-A^{-1}B$, 使得折叠代价最小化. 若 A 不可逆, 则在 v_1, v_2 中取折叠代价相对较小的点.

3 算法改进

QEM 算法虽然有效, 但其误差测度标准过于单一, 仅仅考虑新顶点与相关三角面的距离平方和. 由式(2) ~ (4) 可知 Δv 是实二次型, 再由 Δv 的定义得 Δv

≥ 0 , 因此 Δv 是半正定二次型, 二次误差测度矩阵 $Q(v)$ 是实对称的半正定矩阵. 这样, 所有误差为 η 的点构成的等值面 $\Delta v = \eta$ 是一个椭圆曲面(也可能退化成圆柱面或者两个平行平面), 其形状与模型表面在该局部区域的曲率相关. 若为薄饼状, 则该处表面较为平滑; 若为细长形, 则该处曲率较大, 且主要是在扁平方向上的法向量变化较快; 若近似球形, 则该处曲率大, 且法向量沿各个方向的变化都较快. 这样可以在一定程度上保证边折叠操作主要往曲率较小的方向进行, 但它并没有对模型表面的细节特征进行识别. 因此当细节特征发生在曲率较小的方向时, 如果毫无区分地加以折叠, 多次操作之后, 可能导致细节特征出现形变或丢失, 这在医学模型中可能涉及一些重要组织或病变区域, 必须尽量避免.

3.1 顶点分类

为了保持细节特征, 我们需要先对其进行识别. Hoppe^[4] 等将模型的细节特征分为: ①折痕, 两个三角面相交形成的尖锐边; ②角点, 3 条或 3 条以上折痕的交点; ③尖刺, 模型表面内部折痕的终止点. 在此基础上, 我们增加一些定义和新的策略.

1) 首先, 将所有的顶点划分为独立点、简单点、边界点和复杂点.

独立点: 没有相邻三角面的点, 对模型没有贡献, 不参与边折叠, 可以直接删除.

简单点: 被包围在一个闭合的环中, 且每条和该顶点相连的边都恰好被两个三角形共用.

边界点: 当一条边只有一个相邻三角面时, 则该边的两个顶点都为边界点.

复杂点: 除独立点、简单点和边界点之外的其它顶点.

2) 再从简单点中进一步划分出尖刺点、公共尖刺点和角点.

当一条边恰好有两个相邻三角面(设夹角为 θ) 时, 我们计算它们的单位法向量并进行点乘, 即得 $\cos(\pi - \theta)$. 实践中, 当 $\cos(\pi - \theta) < -0.1$ 时, 我们判断此边为折痕.

对所有边进行遍历, 当发现某条边为折痕时, 对其两个端点设定标记. 若之前顶点标记为简单点, 则重新标记为尖刺点; 若之前标记为尖刺点, 则重新标记为公共尖刺点; 若之前标记为公共尖刺点, 则重新标记为角点.

3.2 基于顶点分类的边折叠

将细节特征通过顶点分类进行识别之后, 需要针对各种细节特征的特点调整相关边的折叠策略, 以更好地在简化过程中将其保留下来. 为了节约空间和增

加灵活性,我们并没有设置边的类型,而是直接根据边的两个顶点的分类来判断。

首先,当边的两个顶点中有一个为公共尖刺点或角点时,为了保持折痕的特征,我们仅在该边的连线上寻找使折叠代价 Δv 最小化的点。接着,我们为角点、公共尖刺点和复杂点各分配一个权值以降低其相连边的折叠优先权。其中,角点的特征最为突出,应尽量保留,实践中使用 int 类型的最大表示值作为其权值。公共尖刺点和复杂点经多次试验,权值分别取为 1.8 和 3.2。这样,边的初始权值为 1.0,每当有一个顶点为角点、公共尖刺点或复杂点时,就把相应的权值累加上去,得到的权值再与之前计算出的边折叠代价相乘作为新的折叠代价。

但注意到公共尖刺点应避免往非折痕方向的折叠,因此当边的一个顶点为公共尖刺点,另一个顶点为简单点时,要另外增加其权值以使这类折叠的优先权降低,实践中取公共尖刺点权值的 2 倍作为附加权值。

至于边界点,在我们需要处理的医学模型中是相对较少的。而 Garland^[3] 提出的方法已经可以得到相当不错的效果,即通过边界边作一个垂直于边界三角形的平面,在计算边界点的误差矩阵时,将其考虑在内并赋予一个较大的系数 k 。实践中我们设置 k 为 1.024。

对于边折叠生成的新顶点,我们由高到低定义如下优先级:角点、边界点、复杂点、公共尖刺点、尖刺点、简单点。当发生边折叠时,取该边两个顶点中优先级较高的类别来对新顶点进行分类设置,该方法简单快速,且有利于细节特征的继续保持。

3.3 网格分布的调整

注意到对于大多数模型来说,涉及细节特征的区域往往只占整个模型的小部分,模型的大部分区域都比较平坦。前面的方法虽然保持了模型的细节特征,但也会使简化得到的网格花费过多的三角面来描述细节集中的区域,从而其它区域的三角面较为稀疏,整体上可能导致体积等几何误差增大,这将影响医学模型在实际应用中的各种相关测算。

为了缓解这种情况,需要对简化模型中三角面的分布进行调整。我们希望在细节集中的区域仍然保留用来描述细节特征的三角面,但对该区域的其它三角面加强简化力度,以节省出一些三角面来描述细节较少但对体积等几何误差影响较大的其它区域。前面 Garland 使用边折叠操作生成的新顶点到相关三角面距离的平方和作为误差度量,这里我们使用相关三角面的面积平均值作为局部区域三角面密集程度的度量。

设点 v_1, v_2 的相关三角面面积和分别为 S_1, S_2 , 个

数分别为 n_1, n_2 , 则新顶点 v 的相关三角面面积平均值可近似为 $(S_1 + S_2) / (n_1 + n_2)$, 类似二次误差测度矩阵的累加方法,我们只要设置点 v 的相关面积和为 $S_1 + S_2$, 个数为 $n_1 + n_2$, 就可以随时计算出面积平均值。

我们把边折叠相关三角面的面积平均值与原折叠代价相乘作为最终的折叠代价,这样原来三角面较密集的局部区域进行边折叠的优先级将有所提高,可以改善简化模型中三角面的分布情况。

4 算法描述

4.1 算法步骤

- 1) 读入模型数据并对顶点进行分类。
- 2) 计算出每个顶点的二次误差测度矩阵 Q 、相邻三角面的面积和 S 及个数 n 。我们先清空各顶点的 Q 和 S , 接着对每个三角形 f_i 计算其二次误差测度矩阵 Q_i 和面积 S_i , 并在其三个顶点的 Q 及 S 中分别加入 Q_i 和 S_i , 遍历所有三角形之后即完成了 Q 和 S 的初始化, 而 n 可以从数据结构中直接得到。
- 3) 计算每一条边的折叠代价: 先按顶点的分类选择新顶点的位置, 确定其权值 $Weight$, 计算二次误差折叠代价 $QEMvalue$, 再得到相关三角面面积平均值 Sa , 则最终折叠代价 $Value = QEMvalue \times Weight \times Sa$ 。将所有的边按折叠代价放入优先队列中。
- 4) 从优先队列里取出折叠代价最小的边完成边折叠的操作, 重新计算该过程中受影响的边的折叠代价并更新其在优先队列中的位置。
- 5) 若达到简化要求或优先队列为空, 转 6), 否则转 4)。
- 6) 删除不存在邻接三角面的独立点, 输出简化模型, 结束。

4.2 算法复杂度

QEM 算法已经由 Garland^[3] 证明其初始化及执行的时间复杂度均为 $O(n \log n)$, 空间复杂度为 $O(n)$ 。而我们的方法中, 主要是增加了顶点分类和面积平均值的计算。顶点分类是通过分析顶点的邻接三角面信息来进行的: 独立点没有邻接三角面; 简单点的邻接三角面构成一个闭合面; 两个相邻点若只有一个公共邻接三角面则为边界点; 两个相邻点若恰有两个公共邻接三角面且其夹角 θ 满足 $\cos(\pi - \theta) < -0.1$ 时, 以累计的方法设置顶点的类型; 其余为复杂点。这些都可以视为常数时间的操作, 因此顶点分类总的时间复杂度为 $O(n)$ 。在初始化过程中, 一个三角形的面积计算及在边折叠的过程中新顶点的相关三角面面积平均值计算都可以在常数时间内完成, 这样, 所有与面积平均值

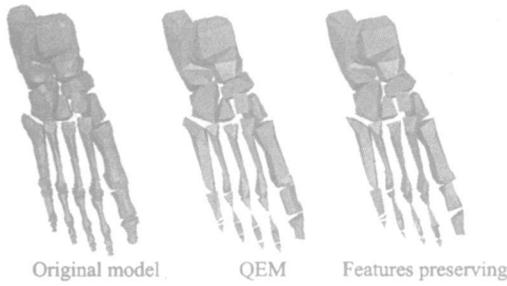


图 2 足部模型对比

Fig. 2 Comparison of foot's models

相关的计算的时间复杂度也为 $O(n)$. 同时, 为了存储每个顶点的类型、相关三角面的面积和及个数, 需要增加三个字段, 即新增的空间复杂度为 $O(n)$. 综上所述, 改进后的算法的时间复杂度和空间复杂度均不变, 分别为 $O(n \log n)$ 和 $O(n)$.

5 实验结果与分析

本算法已经在 Visual C++ .NET 下实现, 并用 OpenGL 完成图形的绘制. 图 2 中给出的是 Skeletal foot 模型的简化, 原模型包括 2 154 个顶点和 4 204 个三角面, 其中有 1 960 个简单点、126 个尖刺点、62 个公共尖刺点和 6 个角点, 简化模型均为 500 个三角面.

可以看到, 在 QEM 的简化模型中, 中间三个脚趾处基本是藕断丝连, 而我们通过对顶尖进行分类加权, 对这些细节特征做了更好的保留.

图 3 是本实验室采集的肝脏模型, 原模型图 3(a) 中包括 199 747 个顶点和 400 954 个三角面, 其中有 189 754 个简单点、2 458 个复杂点、4 976 个尖刺点、2 184 个公共尖刺点和 141 个角点, 此外还包括 234 个独立点. 简化模型图 3(b)、(c) 均已简化到原模型的 0.5%, 仅包含 2 004 个三角面. 其中(b) 只考虑细节特征保持, 而(c) 还加入了网格分布的调整策略. 可以看出, (c) 相对于(b) 来说网格分布更为均匀.

图 4 中给出的是不同分辨率的简化结果, 可以看到, 即使三角面数目简化到 1%, 仍然可以很好地保持原模型的形状.

在 P4 2.4 GHz, 内存为 1 GB 的系统下运行该简化程序, 将肝脏模型的三角面数目从 400 954 简化到 4 010 所花的时间为 16.28 s, 其中包括读取模型信息时间 3.41 s、初始化时间 3.22 s、边折叠时间 9.34 s、模型输出时间 0.31 s. 可见本算法依然保持很快的简化速度.

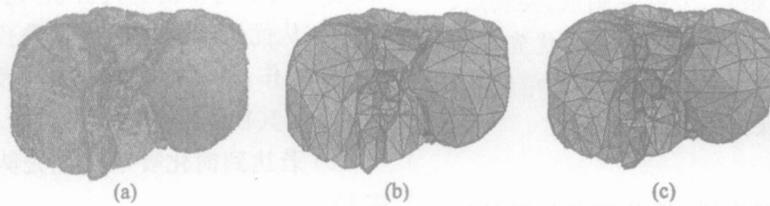


图 3 肝脏模型对比

Fig. 3 Comparison of liver's models

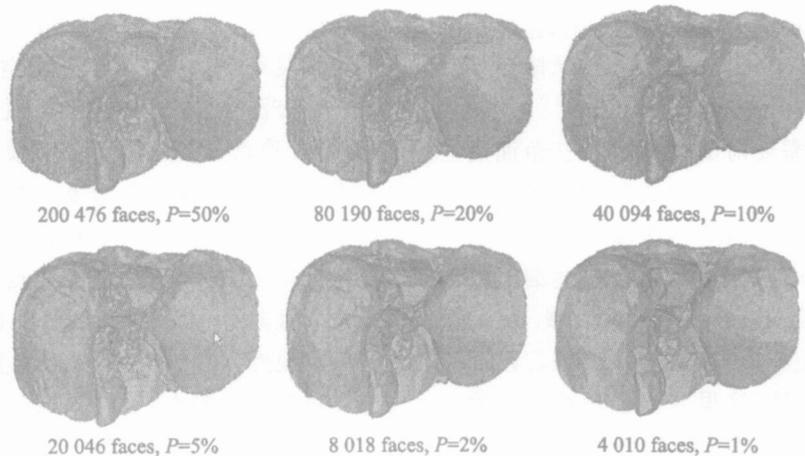


图 4 不同分辨率的肝脏模型

Fig. 4 The liver models in different resolution

6 结 论

本文在二次误差测度方法的基础上通过对顶点进行分类加权,较好地实现了网格简化过程中细节特征的保持,同时为了克服该方法引起的局部区域三角面过于密集的问题,加入相关三角面面积平均值作为网格调整依据,取得了不错的效果.本算法不但适用于医学图像处理,也具有一定的通用性.通过记录简化过程中的相关信息,将来还可以用于构造层次细节模型(LOD).

参考文献:

[1] 田捷,包尚联,周明全.医学影像处理与分析[M].北京:

电子工业出版社,2003.

- [2] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, et al. Mesh optimization[C]//Cunningham S SIGGRAPH'93. Anaheim: ACM Press, 1993: 9-26.
- [3] Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics [C]//Proceedings of SIGGRAPH 97, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series. Los Angeles: Addison Wesley, 1997: 209-216.
- [4] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, et al. Piecewise smooth surface reconstruction [C]//Andrew Glassner SIGGRAPH'94. Orlando: ACM Press, 1994: 295-302.
- [5] Lindstrom P, Turk G. Fast and memory efficient polygonal simplification[C]//IEEE Visualization'98. North Carolina: IEEE, 1998: 279-286.

A New Mesh Simplification Algorithm Based on Quadric Error Metrics

WU Weili, WANG Borliang*, HUANG Shaohui

(Department of Computer Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: During 3D medical image reconstruction, many triangles were produced, which were beyond the rendering capability of common PC. In order to solve the problem, this paper put forward an improved mesh simplification algorithm based on quadric error metrics. The algorithm, by classifying the vertices, preserved the specific features of the model during the process of simplification. Meanwhile, how triangles were distributed in the mesh was also taken into consideration and thus reduced geometric error. It has been proved that the new algorithm not only maintains high efficiency of the original algorithm, but also meets higher requirements of medical image processing in terms of fidelity and mesh quality.

Key words: mesh simplification; edge collapse; quadric error metrics