

具有复杂边界条件的复合材料层合板的弯曲

叶开沅 邓梁波

(兰州大学力学系)

在各向同性薄板理论中,对于具有复杂边界条件的薄板弯曲问题,文献[1—3]利用线性叠加原理和广义简支边的概念获得了这些问题的精确解。这种求解方法具有通用性,一般来说,用此方法可以解决具有任意边界条件的薄板弯曲问题。鉴于这些优点,本文将这种方法推广到复合材料层合板的双挠度理论^[4]中去。在各向同性薄板理论中,只有一个独立变量,即挠度 W 。而在文献[4]建立的复合材料层合板理论中,具有挠度 W_b (由经典意义下的弯曲变形所产生)和 W_s (由剪切变形所产生,板的总挠度 $W = W_b + W_s$)以及层合板绕 x, y 轴的转角 ϕ_y 和 ϕ_x 4个独立变量,因此,这里的广义简支边概念与各向同性薄板理论中的广义简支边概念不同。本文将建立新的广义简支边概念,并利用此概念和线性叠加原理求解具有复杂边界条件的层合板的弯曲问题。作为一个数值例子,我们获得了三边固支一边自由的层合板的弯曲问题的精确解。

一、广义简支边概念

各向同性薄板理论中通常的简支边界条件是指沿该边的各点弯矩等于零,沿该边的各点挠度等于零。相应的广义简支边概念被定义为:沿该边的各点弯矩仍旧等于零,但沿该边的各点挠度未必等于零(有既定的值)。在复合材料层合板理论^[4]中,由于具有4个独立的变量,在板的每一边都需要4个边界条件,因此,通常的简支边界条件是指沿该边的各点弯矩等于零,沿该边的各点法向转角等于零(例如,在 $x = a$ 的边界处, $\phi_y(a, y) = 0$),沿该边的各点挠度 W_b 和 W_s 等于零。对应于此简支边界条件,我们定义层合板理论^[4]中的广义简支边为:沿该边的各点弯矩仍旧等于零,但沿该边的法向转角未必等于零(有既定的值),沿该边的各点挠度 W_b 和 W_s 未必等于零(有既定的值)。其次,在薄板理论中,只有挠度 W 一个独立变量,而关于 W 的微分方程是4阶的,因而在板的每一边需要二个边界条件,对于自由边,有三个边界条件。由于要将三个边界条件等效化为二个边界条件,因此,出现了角点力这一附加的边界条件。而层合板理论中将板的转角当作独立变量,因而克服了这一物理上的矛盾。所以,在利用新的广义简支边概念来求解层合板弯曲问题时,就不需用角点力这一边界条件。

二、求解方法

对于 $y = 0, b$ 为简支边的层合板的弯曲解,由文献[5]可得

$$W_b = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \eta_{im}(x) D_{im} + W_{bm}(x) \right) \sin \frac{m\pi y}{b},$$

本文 1987 年 3 月 2 日收到。

$$\begin{aligned}
W_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{1m} \operatorname{sh} \lambda_{1m} x + c_{2m} \operatorname{ch} \lambda_{1m} x + \frac{P_m}{KA_{55} \lambda_{1m}^2} \right) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
\phi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \theta_{im}(x) D_{im} + \phi_{xm}(x) \right) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
\phi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \zeta_{im}(x) D_{im} + \phi_{ym}(x) \right) \cos \frac{m\pi y}{b}, \\
M_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \omega_{im}(x) D_{im} + M_{xm}(x) \right) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
M_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 Q_{im}(x) D_{im} + M_{ym}(x) \right) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
M_{xy} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \varepsilon_{im}(x) D_{im} + M_{xym}(x) \right) \cos \frac{m\pi y}{b}, \\
Q_{bx} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 \gamma_{im}(x) D_{im} + Q_{bxm}(x) \right) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
Q_{by} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^6 R_{im}(x) D_{im} + Q_{bym}(x) \right) \cos \frac{m\pi y}{b}, \\
Q_{sx} &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{m0} (C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_{1m} x + C_{2m} \operatorname{sh} \lambda_{1m} x) \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
Q_{sy} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{m0} \left(C_{1m} \operatorname{sh} \lambda_{1m} x + C_{2m} \operatorname{ch} \lambda_{1m} x + \frac{P_m}{KA_{55} \lambda_{1m}^2} \right) \cos \frac{m\pi y}{b},
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 ϕ_x , ϕ_y 为板的总旋转角; M_x , M_y 和 M_{xy} 是弯矩和扭矩; Q_{bx} , Q_{by} 及 Q_{sx} , Q_{sy} 分别是由经典意义下的弯曲变形及剪切变形所产生的横向剪力, K , A_{55} 和 P_m 分别是剪切修正系数、板的平面剪切刚度和载荷。式中 $\eta_{im}(x)$, $\theta_{im}(x)$, $\zeta_{mi}(x)$ 等等是 x 的已知函数, 由于其表达式太冗长, 这里就不写出来了。而 $C_{im}(i=1, 2)$, $D_{im}(i=1, \dots, 6)$ 是待定常数, 由边界条件来确定。对于 $x=0, a$ 为简支边的弯曲解可类似地求得。

下面, 在 (1) 式的基础上, 我们利用线性叠加原理及新的广义简支边概念来解三边固支一边自由的对称正交铺设矩形层合板在均布载荷作用下的弯曲问题。此问题可以分成下面三个问题来分别求解, 这三个问题的解称为原问题的基本解。然后, 利用线性叠加原理得到原问题的解。

(一) 在均布载荷作用下, 四边简支的矩形板的弯曲问题, 载荷集度为 P (如图 1 所示)。

在 $x=0, a$ 处的简支边界条件为

$$W_b = W_s = 0, \phi_y = M_x = 0. \tag{2}$$

由于 $y=0, b$ 均为简支边, 因而可利用 (1) 式的解。将 (1) 式代入 (2) 式中得到关于 $C_{im}^{(1)}(i=1, 2)$, $D_{im}^{(1)}(i=1, \dots, 6)$ 的 $8m$ 个代数方程。 C_{im} , D_{im} 的上标 (1) 表示第一个基本解中的待定常数。

(二) 矩形层合板的三边为简支边, 而 $x=a$ 这边为广义简支边 (如图 2 所示)。

广义简支边 $x=a$ 处的挠度、转角及弯矩为

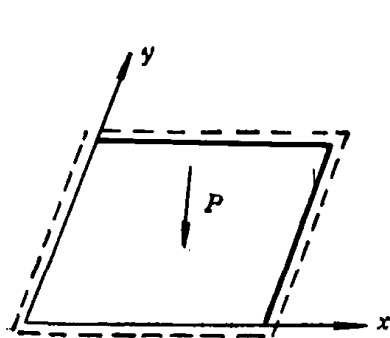


图 1

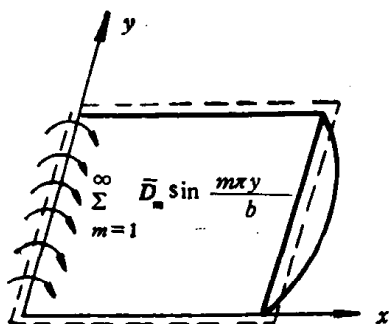


图 2

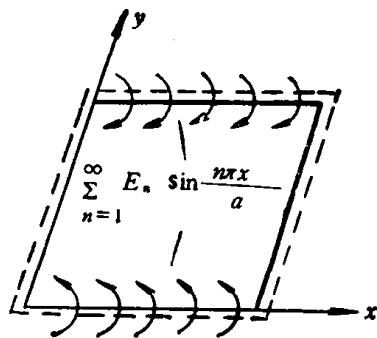


图 3

$$W_b|_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad W_t|_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (3a)$$

$$\phi_y|_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad M_x|_{x=a} = 0, \quad (3b)$$

式中 $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m$ 为待定常数。沿 $x=0$ 的边界处作用着分布弯矩 $M(y)$ ，用级数可表示为

$$M(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{D}_m \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

因此， $x=0$ 处的边界条件为

$$W_b = W_t = 0, \quad \phi_y = 0, \quad M_x = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{D}_m \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (4)$$

由于 $y=0, b$ 二对边均为简支边，因此，(1) 式的解适合于此问题，将其代入 (3) 和 (4) 式可获得关于 $C_{im}^{(2)} (i=1, 2), D_{im}^{(2)} (i=1, \dots, 6)$ 和 $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ 的 $8m$ 个代数方程。

(三) 矩形层合板四边简支，沿 $y=0, b$ 二边作用着分布弯矩 $M(x)$ (如图 3 所示)，由于问题的对称性二边的分布弯矩大小相等，且可表为

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n \sin \frac{n\pi x}{a},$$

因此， $y=0, b$ 二边的边界条件可写为

$$W_b = W_t = 0, \quad \phi_x = 0, \quad M_y = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (5)$$

在此问题中， $x=0, a$ 二对边是简支边，因此，将 $x=0, a$ 为简支边时所获得的解代入 (5) 式中，就可得到关于 $C_{in}^{(2)} (i=1, 2), D_{in}^{(2)} (i=1, \dots, 6)$ 和 $\bar{E}_n$ 的 $8n$ 个代数方程。

下面，利用线性叠加原理来求原问题的解，并使叠加后的解满足原问题的边界条件。原问题的边界条件是

$$\begin{aligned} W_b = W_t = 0, \quad \phi_x = \phi_y = 0, \quad & \text{在 } x=0 \text{ 处;} \\ M_x = M_{xy} = 0, \quad Q_{bx} = Q_{tx} = 0, \quad & \text{在 } x=a \text{ 处;} \\ W_b = W_t = 0, \quad \phi_x = \phi_y = 0, \quad & \text{在 } y=0, b \text{ 处.} \end{aligned} \quad (6)$$

在 $x=0$ 处，除了 $\phi_x=0$ 外，前面三部分叠加后的解已经满足其他的边界条件。由 $\phi_x|_{x=0}=0$ 得

$$\phi_x^{(1)}|_{x=0} + \phi_x^{(2)}|_{x=0} + \phi_x^{(3)}|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

在 $x=a$ 处， $M_x=0$ 已经得到满足。为了使边界条件 $Q_{bx}|_{x=a}=0, Q_{tx}|_{x=a}=0$ 和

$M_{xy}|_{x=a} = 0$ 得到满足, 叠加三个基本解, 并令其等于零得

$$Q_{bx}^{(1)}|_{x=a} + Q_{bx}^{(2)}|_{x=a} + Q_{bx}^{(3)}|_{x=a} = 0, \quad (8)$$

$$Q_{ix}^{(1)}|_{x=a} + Q_{ix}^{(2)}|_{x=a} + Q_{ix}^{(3)}|_{x=a} = 0, \quad (9)$$

$$M_{xy}^{(1)}|_{x=a} + M_{xy}^{(2)}|_{x=a} + M_{xy}^{(3)}|_{x=a} = 0. \quad (10)$$

在 $y = 0$ 处, 除了 $\phi_y = 0$ 外, 其他边界条件已经满足. 为使 $\phi_y|_{y=0} = 0$, 叠三个基本解的 ϕ_y , 并令其等于零得

$$\phi_y^{(1)}|_{y=0} + \phi_y^{(2)}|_{y=0} + \phi_y^{(3)}|_{y=0} = 0. \quad (11)$$

由于问题的对称性, 在 $y = b$ 处将得到同一方程.

在上面的求解过程中, 出现了 $C_{im}^{(j)}(i = 1, 2, j = 1, 2)$, $D_{im}^{(j)}(i = 1, \dots, 6, j = 1, 2)$, $C_{in}^{(j)}(i = 1, 2)$, $D_{in}^{(j)}(i = 1, \dots, 6)$ 和 $\bar{A}_m$, $\bar{B}_m$, $\bar{C}_m$, $\bar{D}_m$, $\bar{E}_n$ 这些待定常数, 总的个数为 $2 \times 8m + 8n + 4m + n$. (一)、(二)中分别有 $8m$ 个代数方程, (三)中有 $8n$ 个代数方程, 式 (7—10) 代表 $4m$ 个代数方程, (11) 式代表 n 个代数方程. 因此, 方程的总数为 $2 \times 8m + 8n + 4m + n$ 个, 恰好与待定常数的个数相等, 由这些方程可以唯一地确定这些待定常数. 由这些已知的常数, 就可求出上面三种情况下的 W_b, W_i , 叠加这些 W_b, W_i 就可得板的总挠度.

三、结 果

表 1 中给出了三边固支一边自由的层合板在均布载荷作用下的中心挠度值. 此例中的层合板是由纤维对称正交铺设而成的, 每一层具有相同的厚度, 层合板的弹性常数之比为

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25,$$

且有 $G_{13} = G_{12}$, $\nu_{13} = \nu_{12}$.

表 1 方板中心无量纲挠度 $\bar{W} = 1000 WE_2 h^3 / P_0 a^4 \cdot ([0^\circ/90^\circ/0^\circ])$

$\frac{a}{h}$	5	10	15	20	30	40	50
挠度							
$\bar{W}_i$	8.600	2.185	0.949	0.538	0.239	0.126	0.086
$\bar{W}_b$	13.754	8.991	6.984	6.299	6.119	5.861	5.617
$\bar{W}$	22.354	11.126	7.933	6.837	6.358	5.987	5.703
$(\bar{W}_i/\bar{W}) \times 100\%$	38.47	19.19	11.96	7.87	3.76	2.10	1.51

在计算时, 只取用了级数前二项. 剪切修正系数取为 $K = 5/6^{[6]}$.

从上面的计算过程中可以看到, 只要应用广义简支边的概念, 选择好基本解(基本解的选择不是唯一的), 然后, 利用线性叠加原理将各个基本解进行相应地叠加, 并使其满足原问题的边界条件, 这样获得的叠加解是原问题的解. 用这种方法可以求解具有任意边界条件的层合板的弯曲问题.

参 考 文 献

- [1] S. 铁摩辛柯, S. 沃诺斯基著, 板壳理论, 科学出版社, 1977.
- [2] 张福范, 应用数学和力学, 1(1980), 349—362.
- [3] 张福范, 弹性薄板, 第二版, 科学出版社, 1984.
- [4] 叶开沅, 邓梁波, 复合材料层合板的分析, 应用数学和力学, 9(1988), 114.
- [5] 叶开沅, 邓梁波, 复合材料层合板的弯曲(待发表).
- [6] Reissner, E., J. Appl. Mech., 12(1945), 69.