



对称控制 Hamilton 系统约化理论的研究进展

献给胡和生教授 90 华诞

王红

南开大学数学科学学院, 教育部核心数学与组合数学重点实验室, 天津 300071

E-mail: hongwang@nankai.edu.cn

收稿日期: 2018-03-22; 接受日期: 2018-05-11; 网络出版日期: 2018-09-30

摘要 一个正则控制 Hamilton (regular controlled Hamiltonian, RCH) 系统是一个具有外力和控制的 Hamilton 系统, 在外力和控制作用下, 一般来讲, 这个 RCH 系统不是 Hamilton 系统. 然而, 它是一个与 Hamilton 系统密切相关的动力系统, 我们可以在 Hamilton 系统的研究中, 通过对外力和控制扩展的方法研究这种 RCH 系统. 本文从具有对称的 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 辛约化完备性和系统相空间几何结构变化出发, 简要介绍了最近几年控制 Hamilton 系统约化理论及其应用研究工作的研究进展情况.

关键词 几何结构 纤维丛 对称约化 完备性 动量映射

MSC (2010) 主题分类 53D20, 70H33, 70Q05

1 引言

对称性是自然界中的一个普遍的现象, 它在数学、物理和力学的研究中有着广泛的应用. 具有对称性的力学系统的约化理论起源于 Euler、Lagrange、Hamilton、Jacobi、Routh、Liouville 和 Poincaré 等著名数学家的经典工作, 而其在辛流形和等变动量映射这一背景下的现代几何表述, 是四十年前由著名数学家 Marsden 和 Weinstein 建立的, 参见文献 [1] 或 [2]. 约化理论的主要目标是利用守恒律和相关的对称性来减少描述一个力学系统所需的维数. 因此, 约化理论被视为简化和研究具体的力学系统的一个非常有效的工具. 约化虽然是一个很一般的过程, 但它可以适用于任意对称动力系统. 特别地, 对于守恒的系统, 当对称性是由一个动量映射导出时, Marsden-Weinstein 约化理论就更显出它的威力.

四十年来, 围绕 Marsden-Weinstein 辛约化方法, 在数学、物理和力学的理论研究和各种应用中都有巨大的发展, 获得了大量的深刻漂亮的结果. 在理论方面, 通过对约化 Hamilton 系统相空间的几何和拓扑结构的精细分析, 我们已建立了辛流形上对称 Hamilton 系统的正则点约化和正则轨道约化,

英文引用格式: Wang H. Some developments of reduction theory for controlled Hamiltonian system with symmetry (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1779–1790, doi: 10.1360/N012018-00070

奇异点约化和奇异轨道约化, 优化约化和 Hamilton 系统分阶段约化, 非完整约化, 和 Poisson 流形上对称 Hamilton 系统的优化点约化, 优化轨道约化和正则 Poisson 约化, 奇异 Poisson 约化, 以及利用变分原理给出的 Lagrange 约化, 非完整的 Lagrange 约化等. 参见 Abraham 等^[1,3], Arnold^[4], Bates 和 Śniatycki^[5], Bloch^[6], Bloch 等^[7], Cendra 等^[8], Libermann 和 Marle^[9], Marsden^[10], Marsden 等^[11,12], Marsden 和 Ratiu^[13], Meyer^[14], Ortega 和 Ratiu^[15]. 在应用方面, 将系统的各种约化理论应用于经典场论, 规范场论, 相对论引力理论, 可积与不可积的 Hamilton 系统的稳定性分析、分岔和混沌的理论研究和数值分析, 天体力学, 流体力学, 等离子物理, 以及卫星和飞船系统的飞行轨道设计和控制等. 参见 Bloch 等^[16], Chenciner 和 Montgomery^[17], Holm 等^[18], Koon 和 Marsden^[19], Leonard 和 Marsden^[20], Marsden 等^[12], Marsden 和 Ross^[21], Marsden 和 Scheurle^[22], Nijmeijer 和 Van der Schaft^[23], Van der Schaft^[24].

正是这些重要的发展, 使得 Marsden-Weinstein 约化理论及其应用已经成为现代分析力学和应用数学研究中最活跃的研究课题之一, 并且形成了当前一个重要的研究领域——几何力学, 它是微分几何、力学和现代控制理论的一个交叉研究课题. 因此, 几何力学的研究汇聚了诸如微分几何、力学和非线性控制理论等一些不同研究领域的重要的思想方法, 特别关注建立在微分流形和纤维丛之上的力学非线性(控制)系统的几何约化理论、稳定性分析和非线性控制等的综合研究. 而且, 这些研究首先从系统相空间的几何结构的分析和系统的运动方程的几何刻画入手, 对于系统的分析和设计是很有帮助的.

随着几何力学理论的深入发展, 人们开始关注具有控制的 Hamilton 系统的研究. 这类系统的研究有双重含义, 其一, 它是一类特殊的非线性控制系统, 可通过使用反馈控制和最优控制的方法来研究它; 其二, 它也是一类特殊的力学系统, 我们可以综合使用动力系统的分析理论及 Hamilton 系统和 Lagrange 系统的约化理论来研究它. 因此, 具有控制的 Hamilton 系统的研究介于经典的力学研究与现代非线性几何控制理论研究之间, 是非常重要和有意义的研究课题.

我们知道, 在力学中, Hamilton 系统的相空间通常是一个位移流形的余切丛. 但是, 在文献 [25] 中, 我们发现余切丛上定义的对称 Hamilton 系统在 Marsden-Weinstein 约化下的系统可以不是余切丛上的 Hamilton 系统, 也就是说, 余切丛上对称 Hamilton 系统的集合, 在 Marsden-Weinstein 约化下是不完备的. 因而, 在余切丛上具有控制的对称 Hamilton 系统, 在 Marsden-Weinstein 约化下的系统就可能不能定义了. 这是一个严重的问题. 以前, 在具有对称的力学系统和控制系统研究中, 求商系统的方法都出现了问题. 因为对称群的结构、相空间的结构、以及对称群在系统相空间上的不同作用, 可以使商系统不存在. 而且, 这种对称 Hamilton 系统的约化不完备性问题, 使得我们必须对约化后系统的相空间的几何和拓扑结构给出精确的刻画. 因此, 如何通过对系统的相空间的几何和拓扑结构进行精细分析, 建立和发展控制 Hamilton 系统的各种约化理论变成我们开始研究的重要课题. 本文从具有对称的 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 辛约化完备性和系统相空间几何结构变化出发, 简要介绍了最近几年控制 Hamilton 系统约化理论及其应用研究工作的研究进展情况.

2 余切丛上的 Marsden-Weinstein 约化

首先, 我们给出一个光滑流形的余切丛上对称 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 辛约化空间的分类, 参见文献 [11,26]. 设 Q 是一个光滑流形, TQ 是它的切丛, T^*Q 是它的具有典则辛形式 ω_0 的余切丛. 假设 Lie 群 G 在流形 Q 上光滑的左作用为 $\Phi: G \times Q \rightarrow Q$, 并且, 该作用在 T^*Q 上的余切提升为 $\Phi^{T^*}: G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$, 其由下式给出:

$$g \cdot \alpha_q = (T\Phi_{g^{-1}})^* \cdot \alpha_q, \quad \forall \alpha_q \in T_q^*Q, \quad q \in Q.$$

我们知道, 任何恰当的 (或自由的) G - 作用的余切提升也是恰当的 (或自由的). 假设该余切提升作用关于典则辛形式 ω_0 是辛的, 并且具有一个 Ad^* - 等变的动量映射 $\mathbf{J}: T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$, 其由下式给出:

$$\langle \mathbf{J}(\alpha_q), \xi \rangle = \alpha_q(\xi_Q(q)),$$

其中 $\xi \in \mathfrak{g}$, $\xi_Q(q)$ 是 G - 作用的无穷小生成子 ξ_Q 在点 $q \in Q$ 处的取值, $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 与它的对偶 $\mathfrak{g}^*$ 之间的配对. 假设 $\mu \in \mathfrak{g}^*$ 是动量映射 $\mathbf{J}$ 的一个正则值, 并且 $G_\mu = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \mu = \mu\}$ 是余伴随 G - 作用在 μ 点的迷向子群. 由于 G_μ 也是自由并且恰当地作用在 $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset T^*Q$ 上, 所以, 空间 $(T^*Q)_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ 是一个辛流形, 并具有辛形式 ω_μ , 由下列关系唯一确定:

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega, \quad (2.1)$$

其中, 映射 $i_\mu: \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow T^*Q$ 是包含映射, $\pi_\mu: \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow (T^*Q)_\mu$ 是投影映射, $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 称为 Marsden-Weinstein 辛约化空间.

下面进一步给出余切丛 T^*Q 的辛约化空间的几何结构的精确分析. 从文献 [11, 26] 可知, 余切丛 T^*Q 的辛约化空间的分类如下:

(1) 如果 $\mu = 0$, 那么余切丛 T^*Q 在 $\mu = 0$ 的辛约化空间由下式给出:

$$((T^*Q)_\mu, \omega_\mu) = (T^*(Q/G), \omega_0),$$

其中, ω_0 是约化余切丛 $T^*(Q/G)$ 的典则辛形式. 因此, 辛约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 在 $\mu = 0$ 处是一个辛向量丛;

(2) 如果 $\mu \neq 0$, 并且 Lie 群 G 是可交换的, 那么 $G_\mu = G$, 在这种情形下, 辛约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 辛微分同胚于辛向量丛 $(T^*(Q/G), \omega_0 - B_\mu)$, 其中 B_μ 是一个磁力项;

(3) 如果 $\mu \neq 0$, 并且 Lie 群 G 不是可交换的, $G_\mu \neq G$, 在这种情形下, 辛约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 辛微分同胚于 $T^*(Q/G_\mu)$ 上的辛纤维丛, 其纤维是余伴随轨道 $\mathcal{O}_\mu$, 参见文献 [26], 以及文献 [11] 中丛版本的余切丛约化定理.

总之, 从上述讨论我们知道, 一个余切丛的 Marsden-Weinstein 辛约化空间可以不是一个余切丛. 这样, 定义在余切丛 T^*Q 上的一个对称 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 约化系统可以不是一个余切丛上的 Hamilton 系统, 也就是说, 余切丛 T^*Q 上定义的对称 Hamilton 系统的集合在 Marsden-Weinstein 约化下不是完备的.

3 控制 Hamilton 系统和 RCH- 等价性

为了统一地处理 CH (controlled Hamiltonian) 系统和 Marsden-Weinstein 约化了的 CH 系统, 我们必须给 CH 系统一个恰当的定义. 在文献 [25] 中, 我们的想法是, 首先在 T^*Q 上利用辛形式定义一个 CH 系统, 并且这样的系统称为一个正则控制 Hamilton (RCH) 系统, 然后, 将 T^*Q 上的 Hamilton 系统看作一个没有外力和控制的 RCH 系统的特殊情形. 这样, T^*Q 上 Hamilton 系统的集合是 T^*Q 上 RCH 系统的集合的子集合. 另一方面, 由于余切丛上的辛约化空间在 Marsden-Weinstein 约化下不是完备的, 并且余切丛 T^*Q 上定义的对称 Hamilton 系统的辛约化系统也可以不是一个余切丛上的 Hamilton 系统. 因此, 我们不能在余切丛 T^*Q 上直接定义 RCH 系统. 然而, 从 T^*Q 的辛约化空间分

类, 我们知道, Marsden-Weinstein 辛约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 辛微分同胚于 $T^*(Q/G_\mu)$ 上的一个辛纤维丛, 并且具有纤维是余伴随轨道 $\mathcal{O}_\mu$. 这样, 如果在一个辛纤维丛上定义 RCH 系统, 那么可以统一刻画 T^*Q 上的 RCH 系统和相应约化空间上的正则点约化了的 RCH 系统, 并且可以研究对称 RCH 系统的正则约化理论, 作为对称 Hamilton 系统辛约化理论在正则控制 Hamilton 等价条件下的一种扩展. 这就是为什么 Marsden 等^[25] 从 Marsden-Weinstein 辛约化完备性的观点出发, 利用动量映射和相应的约化辛形式, 在辛纤维丛上建立对称 RCH 系统正则约化理论的原因.

设 (E, M, N, π, G) 是一个纤维丛, 并且 (E, ω_E) 是一个辛纤维丛. 如果函数 $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ 有一个 Hamilton 向量场 X_H , 其由方程 $\mathbf{i}_{X_H}\omega_E = \mathbf{d}H$ 确定, 那么, (E, ω_E, H) 是一个 Hamilton 系统. 进一步, 如果考虑到外力和控制, 那么, 我们可以定义辛纤维丛 (E, ω_E) 上一种正则控制 Hamilton (RCH) 系统如下:

定义 3.1 (RCH 系统) 辛纤维丛 (E, ω_E) 上一个 RCH 系统是一个五元组 (E, ω_E, H, F, W) , 其中, (E, ω_E, H) 是一个 Hamilton 系统, $H : E \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 Hamilton 函数, 保纤维映射 $F : E \rightarrow E$ 称为外力映射, E 的纤维子流形 W 称为控制子集.

有时, W 也表示从 E 到 W 的保纤维映射的集合. 当反馈控制律 $u : E \rightarrow W$ 选定时, 五元组 (E, ω_E, H, F, u) 表示一个闭环动力系统. 特别地, 当 Q 是一个光滑流形, T^*Q 是它的具有辛形式 ω (不必是典则的) 的余切丛, 那么 (T^*Q, ω) 是一个辛向量丛. 如果取 $(E, \omega_E) = (T^*Q, \omega)$, 那么从上述定义可以得到余切丛 T^*Q 上一个 RCH 系统, 即五元组 (T^*Q, ω, H, F, W) . 为了方便起见, 假设本文中出现的控制都是允许控制.

为刻画一个 RCH 系统的动力, 利用一个向量沿着一个纤维垂直提升映射的记号, 我们将给出这个 RCH 系统的动力向量场一个好的表达式, 参见文献 [25]. 对于一个给定的 RCH 系统 (T^*Q, ω, H, F, W) , 相应的 Hamilton 系统 (T^*Q, ω, H) 的动力向量场 X_H 满足 Hamilton 方程 $\mathbf{i}_{X_H}\omega = \mathbf{d}H$. 如果考虑到保纤维的外力映射 $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$, 利用一个向量沿着一个纤维垂直提升映射的记号, 在 F 作用下 X_H 的改变量为

$$\text{vlift}(F)X_H(\alpha_x) = \text{vlift}((TFX_H)(F(\alpha_x)), \alpha_x) = (TFX_H)_\gamma^v(\alpha_x),$$

其中

$$\alpha_x \in T_x^*Q, \quad x \in Q,$$

并且, 测地线 γ 是 T_x^*Q 中连接点 $F_x(\alpha_x)$ 和 α_x 的直线. 同样, 当反馈控制律 $u : T^*Q \rightarrow W$ 选定, 在 u 作用下 X_H 的改变量为

$$\text{vlift}(u)X_H(\alpha_x) = \text{vlift}((TuX_H)(F(\alpha_x)), \alpha_x) = (TuX_H)_\gamma^v(\alpha_x).$$

这样, 我们可以给出这个 RCH 系统的动力向量场一个好的表达式如下:

定理 3.2 具有控制律 $u \in W$ 的 RCH 系统 (T^*Q, ω, H, F, W) 的动力向量场是 Hamilton 向量场 X_H 与它在外力 F 和控制 u 作用下的改变量的综合, 即

$$X_{(T^*Q, \omega, H, F, u)}(\alpha_x) = X_H(\alpha_x) + \text{vlift}(F)X_H(\alpha_x) + \text{vlift}(u)X_H(\alpha_x),$$

其中, $\alpha_x \in T_x^*Q, x \in Q$. 为了方便起见, 上式简写为

$$X_{(T^*Q, \omega, H, F, u)} = X_H + \text{vlift}(F) + \text{vlift}(u). \quad (3.1)$$

我们也可以表示

$$\text{vlift}(W) = \bigcup \{\text{vlift}(u)X_H \mid u \in W\}.$$

从一个 RCH 系统的动力向量场的表达式 (3.1) 可知, 在外力 F 和控制 u 作用下, 一般来讲, 这个动力向量场不是 Hamilton 的, 因此, 这个 RCH 系统也不是 Hamilton 系统. 然而, 它是一个与 Hamilton 系统密切相关的动力系统, 我们可以在 Hamilton 系统的研究中, 通过对外力和控制扩展的方法研究这种 RCH 系统. 另一方面, 注意到, 当一个 RCH 系统给定时, 外力映射 F 是确定的, 但是, 反馈控制律 $u: T^*Q \rightarrow W$ 是可以选择的. 为了在 RCH 系统研究中显示强调外力和控制的影响, 利用 RCH 系统的动力向量场的好的表达式, 我们可以刻画反馈控制律如何修正 RCH 系统的结构, 给出正则控制 Hamilton (RCH) 等价性如下:

定义 3.3 (RCH- 等价性) 假设给定两个 RCH 系统 $(T^*Q_i, \omega_i, H_i, F_i, W_i)$, $i = 1, 2$, 称它们是 RCH- 等价的, 简记为

$$(T^*Q_1, \omega_1, H_1, F_1, W_1) \stackrel{\text{RCH}}{\sim} (T^*Q_2, \omega_2, H_2, F_2, W_2),$$

如果存在一个微分同胚 $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$, 使得下列控制 Hamilton 匹配条件成立:

- (1) RCH-1: φ 的余切提升映射, 即 $\varphi^* = T^*\varphi: T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ 是辛的, 并且 $W_1 = \varphi^*(W_2)$;
- (2) RCH-2: $\text{Im}[X_{H_1} + \text{vlift}(F_1) - T\varphi^*(X_{H_2}) - \text{vlift}(\varphi^*F_2\varphi_*)] \subset \text{vlift}(W_1)$, 其中, 映射 $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*: T^*Q_1 \rightarrow T^*Q_2$, 并且 $T\varphi^*: TT^*Q_2 \rightarrow TT^*Q_1$, Im 表示括号中映射的逐点的像.

进一步, 下面定理解释了上述 RCH- 等价性关系的意义, 其证明可参见文献 [25].

定理 3.4 假设两个 RCH 系统 $(T^*Q_i, \omega_i, H_i, F_i, W_i)$ ($i = 1, 2$) 是 RCH- 等价的, 那么存在两个控制律 $u_i: T^*Q_i \rightarrow W_i$, $i = 1, 2$, 使得两个闭环动力系统有相同的运动方程, 即

$$X_{(T^*Q_1, \omega_1, H_1, F_1, u_1)} \cdot \varphi^* = T(\varphi^*)X_{(T^*Q_2, \omega_2, H_2, F_2, u_2)},$$

其中, 映射 $T(\varphi^*): TT^*Q_2 \rightarrow TT^*Q_1$ 是 φ^* 的切映射. 进一步, 两个控制律 u_i ($i = 1, 2$) 之间的显式关系由下式给出, 即

$$\text{vlift}(u_1) - \text{vlift}(\varphi^*u_2\varphi_*) = -X_{H_1} - \text{vlift}(F_1) + T\varphi^*(X_{H_2}) + \text{vlift}(\varphi^*F_2\varphi_*). \quad (3.2)$$

4 RCH 系统的正则点约化

我们知道当一个 RCH 系统 (T^*Q, ω, H, F, W) 没有外力和控制时, 这个 RCH 系统恰好是一个 Hamilton 系统 (T^*Q, ω, H) . 这样, 余切丛 T^*Q 上一个 Hamilton 系统可以看作没有外力和控制的 RCH 系统的一个特殊情形. 于是, T^*Q 上具有对称的 Hamilton 系统的集合是 T^*Q 上具有对称的 RCH 系统的一个子集合. 如果我们承认具有对称的 Hamilton 系统的正则辛约化, 那么, 我们可以研究具有对称的 RCH 系统的正则约化作为在正则控制 Hamilton 等价条件下, 具有对称的 Hamilton 系统的正则辛约化的一种扩展. 为此, 利用 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 辛约化, 我们可以先给出正则点可约化的 RCH 系统的定义.

假设 $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 G - 不变的 Hamilton 函数, Hamilton 向量场 X_H 的流 F_t 保持 $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ 的连通分支不变, 并且与 G - 作用可交换, 所以, 流 F_t 在 Marsden-Weinstein 约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 上诱导了流 f_t^μ , 其由 $f_t^\mu \cdot \pi_\mu = \pi_\mu \cdot F_t \cdot i_\mu$ 给出, 并且, 在 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 上, 由流 f_t^μ 生成的 Hamilton 向量场为 X_{h_μ} , 其中, 相应的 Marsden-Weinstein 约化的 Hamilton 函数 $h_\mu: (T^*Q)_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ 由 $h_\mu \cdot \pi_\mu = H \cdot i_\mu$ 给出, 并且, Hamilton 向量场 X_H 与 X_{h_μ} 是 π_μ - 相关的. 既然 Marsden-Weinstein 约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 辛微分同胚于一个辛纤维丛, 考虑到外力和控制, 那么, 我们可以定义一种正则点可约化的 RCH 系统如下:

定义 4.1 (正则点可约化的 RCH 系统) 一个六元组 $(T^*Q, G, \omega, H, F, W)$, 其中 T^*Q 上的 Hamilton 函数 $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ 、保纤维映射 $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$ 和纤维子流形 W 都是 G - 不变的, 称为正则点可约化的 RCH 系统, 如果存在动量映射 $\mathbf{J}$ 的一个正则值 $\mu \in \mathfrak{g}^*$, 使得正则点约化后的系统, 即五元组 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu, h_\mu, f_\mu, W_\mu)$ 是一个 RCH 系统, 其中, $(T^*Q)_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$, $\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega$, $h_\mu \cdot \pi_\mu = H \cdot i_\mu$, $F(\mathbf{J}^{-1}(\mu)) \subset \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, $f_\mu \cdot \pi_\mu = \pi_\mu \cdot F \cdot i_\mu$, $W \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu) \neq \emptyset$, $W_\mu = \pi_\mu(W \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu))$. 我们简记这个约化的系统为 Rp (regular point)- 约化的 RCH 系统, 并且, $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 称为 Rp- 约化空间, 函数 $h_\mu : (T^*Q)_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 Rp- 约化的 Hamilton 函数, 保纤维映射 $f_\mu : (T^*Q)_\mu \rightarrow (T^*Q)_\mu$ 称为 Rp- 约化的外力映射, $(T^*Q)_\mu$ 的纤维子流形 W_μ 称为 Rp- 约化的控制子集.

值得注意的是, 对于正则点可约化的 RCH 系统 $(T^*Q, G, \omega, H, F, W)$, G - 不变的外力映射 $F : T^*Q \rightarrow T^*Q$ 必须满足条件 $F(\mathbf{J}^{-1}(\mu)) \subset \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ 和 $f_\mu \cdot \pi_\mu = \pi_\mu \cdot F \cdot i_\mu$, 使得我们可以定义 Rp- 约化的外力映射 $f_\mu : (T^*Q)_\mu \rightarrow (T^*Q)_\mu$. 在上述定义中, 条件 $W \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu) \neq \emptyset$, 使得 G - 不变的控制子集 $W \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ 可以被约化, 并且 Rp- 约化的控制子集为 $W_\mu = \pi_\mu(W \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu))$. 如果控制子集 W 不能被约化, 那么我们不能获得 Rp- 约化的 RCH 系统.

下面考虑具有对称和动量映射的 RCH 系统, 对于正则点可约化的 RCH 系统给出 RpCH (regular point-reducible controlled Hamiltonian)- 等价性定义, 并且证明正则点约化定理. 记具有控制律 u 的正则点可约化的 RCH 系统 $(T^*Q, G, \omega, H, F, W)$ 的动力向量场为 $X_{(T^*Q, G, \omega, H, F, u)}$, 那么,

$$X_{(T^*Q, G, \omega, H, F, u)} = X_H + \text{vlift}(F) + \text{vlift}(u). \quad (4.1)$$

进一步地, 利用上述表达式, 我们可以给出正则点可约化的控制 Hamilton 等价性 (即 RpCH- 等价性) 如下:

定义 4.2 (RpCH- 等价性) 假设给定两个正则点可约化的 RCH 系统 $(T^*Q_i, G_i, \omega_i, H_i, F_i, W_i)$, $i = 1, 2$, 称它们是 RpCH- 等价的, 简记为

$$(T^*Q_1, G_1, \omega_1, H_1, F_1, W_1) \stackrel{\text{RpCH}}{\sim} (T^*Q_2, G_2, \omega_2, H_2, F_2, W_2),$$

如果存在一个微分同胚 $\varphi : Q_1 \rightarrow Q_2$, 使得下列控制 Hamilton 匹配条件成立:

- (1) RpCH-1: φ 的余切提升映射, 即 $\varphi^* = T^*\varphi : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ 是辛的;
- (2) RpCH-2: 对于 $\mu_i \in \mathfrak{g}_i^*$ 和正则点可约化的 RCH 系统 $(T^*Q_i, G_i, \omega_i, H_i, F_i, W_i)$, $i = 1, 2$, 映射

$$\varphi_\mu^* = i_{\mu_1}^{-1} \cdot \varphi^* \cdot i_{\mu_2} : \mathbf{J}_2^{-1}(\mu_2) \rightarrow \mathbf{J}_1^{-1}(\mu_1)$$

是 $(G_{2\mu_2}, G_{1\mu_1})$ - 等变的, 并且

$$W_1 \cap \mathbf{J}_1^{-1}(\mu_1) = \varphi_\mu^*(W_2 \cap \mathbf{J}_2^{-1}(\mu_2)),$$

其中, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, 对于映射 $i_{\mu_1} : \mathbf{J}_1^{-1}(\mu_1) \rightarrow T^*Q_1$, 用 $i_{\mu_1}^{-1}(S)$ 表示子集 $S \subset T^*Q_1$ 的原像;

- (3) RpCH-3: $\text{Im}[X_{H_1} + \text{vlift}(F_1) - T\varphi^*(X_{H_2}) - \text{vlift}(\varphi^*F_2\varphi_*)] \subset \text{vlift}(W_1)$, 其中, Im 表示括号中映射的逐点的像.

值得注意的是, 对于正则点可约化的 RCH 系统, 诱导的等价映射 φ^* 不仅保持辛结构, 而且保持约化点处 G - 作用的等价性. 若选定了反馈控制律

$$u_\mu : (T^*Q)_\mu \rightarrow W_\mu,$$

则 Rp- 约化的 RCH 系统 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu, h_\mu, f_\mu, u_\mu)$ 是一个具有控制律 u_μ 的闭环动力系统. 假设该系统的动力向量场 $X_{((T^*Q)_\mu, \omega_\mu, h_\mu, f_\mu, u_\mu)}$ 可以表示为

$$X_{((T^*Q)_\mu, \omega_\mu, h_\mu, f_\mu, u_\mu)} = X_{h_\mu} + \text{vlift}(f_\mu) + \text{vlift}(u_\mu), \quad (4.2)$$

这里 X_{h_μ} 是 Rp- 约化的 Hamilton 函数 h_μ 的 Hamilton 向量场,

$$\text{vlift}(f_\mu) = \text{vlift}(f_\mu)X_{h_\mu}, \quad \text{vlift}(u_\mu) = \text{vlift}(u_\mu)X_{h_\mu},$$

并且满足条件

$$X_{((T^*Q)_\mu, \omega_\mu, h_\mu, f_\mu, u_\mu)} \cdot \pi_\mu = T\pi_\mu \cdot X_{(T^*Q, G, \omega, H, F, u)} \cdot i_\mu, \quad (4.3)$$

那么, 我们可以证明下面正则点约化定理, 其证明参见文献 [25].

定理 4.3 两个正则点可约化的 RCH 系统 $(T^*Q_i, G_i, \omega_i, H_i, F_i, W_i)$ ($i = 1, 2$) 是 RpCH- 等价的, 当且仅当相应的 Rp- 约化了的 RCH 系统 $((T^*Q_i)_{\mu_i}, \omega_{i\mu_i}, h_{i\mu_i}, f_{i\mu_i}, W_{i\mu_i})$ ($i = 1, 2$) 是 RCH- 等价的.

该定理解释了正则点可约化的 RCH 系统的 RpCH- 等价性与相应的 Rp- 约化的 RCH 系统的 RCH- 等价性之间的关系. 因此, 该定理可以看作在正则控制 Hamilton 等价条件下, 具有对称 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 辛约化的一种扩展.

5 从几何结构出发的一些推广和发展

文献 [25] 首先建立了具有辛结构的对称控制 Hamilton 系统的正则辛约化理论. 该文献有许多创新点, 并且该文献已经成为研究控制 Hamilton 系统理论及其应用的坚实基础. 围绕这项工作, 我们和合作者从几何结构出发开展了各种推广.

5.1 RCH 系统的正则轨道约化

对称 Hamilton 系统的轨道约化是另一种不同于 Marsden-Weinstein 约化的辛约化方法, 可参见文献 [27, 28]. 假设余切提升作用 $\Phi^{T^*}: G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$ 是自由、恰当和辛的, 并且具有一个 Ad^* - 等变的动量映射 $\mathbf{J}: T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$. 如果 $\mu \in \mathfrak{g}^*$ 是动量映射 $\mathbf{J}$ 的一个正则值, 并且 $\mathcal{O}_\mu = G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$ 是通过 μ 点的余伴随 G - 作用的轨道, 那么商空间 $(T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu} = \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$ 是一个商辛流形, 具有辛形式 $\omega_{\mathcal{O}_\mu}$, 由下列关系式唯一确定:

$$i_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega = \pi_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega_{\mathcal{O}_\mu} + \mathbf{J}_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega_{\mathcal{O}_\mu}^+, \quad (5.1)$$

其中, $\mathbf{J}_{\mathcal{O}_\mu}$ 是动量映射 $\mathbf{J}$ 到集合 $\mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$ 上的限制, 即

$$\mathbf{J}_{\mathcal{O}_\mu} = \mathbf{J} \cdot i_{\mathcal{O}_\mu},$$

并且 $\omega_{\mathcal{O}_\mu}^+$ 是轨道 $\mathcal{O}_\mu$ 上的 $+$ - 辛结构, 其定义如下:

$$\omega_{\mathcal{O}_\mu}^+(\nu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = \langle \nu, [\xi, \eta] \rangle, \quad \forall \nu \in \mathcal{O}_\mu, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \quad (5.2)$$

其中映射 $i_{\mathcal{O}_\mu}: \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu) \rightarrow T^*Q$ 是自然的包含映射, 而 $\pi_{\mathcal{O}_\mu}: \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu) \rightarrow (T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu}$ 是自然的投影映射, $((T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu}, \omega_{\mathcal{O}_\mu})$ 称为 (T^*Q, ω) 在 μ 点的正则轨道约化空间.

一般情况下, 我们也许会认为正则轨道约化空间 $((T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu}, \omega_{\mathcal{O}_\mu})$ 的结构要比正则点约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 的结构复杂. 但是, 从正则约化图^[15] 知道, 正则轨道约化空间是辛微分同胚于正则点约化空间的, 因而也是辛微分同胚于一个辛纤维丛. 这样, 我们可以定义一种正则轨道可约化的 RCH 系统和 RoCH- 等价性, 并且证明正则轨道约化定理. 值得注意的是, 正则点约化空间 $((T^*Q)_\mu, \omega_\mu)$ 与正则轨道约化空间 $((T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu}, \omega_{\mathcal{O}_\mu})$ 是不同的, 其中的辛形式也是不同的, 因此, 在相应的定义和定理中的假设条件也是不同的, 参见文献 [25].

5.2 非等变动量映射情形的推广

如果 (T^*Q, ω) 是一个连通的辛流形, 并且 $\mathbf{J} : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 不是一个余伴随等变的动量映射, 但是带有一个非等变的群的一阶上循环 $\sigma : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, 其定义为

$$\sigma(g) := \mathbf{J}(g \cdot z) - \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbf{J}(z),$$

其中, $g \in G, z \in T^*Q$, 那么, σ 产生一个新的仿射作用 $\Theta : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, 其定义为

$$\Theta(g, \mu) := \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mu + \sigma(g),$$

其中, $\mu \in \mathfrak{g}^*$. 关于这个仿射作用, 动量映射 $\mathbf{J}$ 是等变的. 假设群 G 自由并且恰当地作用于 T^*Q 上, μ 是动量映射 $\mathbf{J}$ 的正则值, 用 $\tilde{G}_\mu$ 表示关于这个仿射作用 Θ 在 $\mu \in \mathfrak{g}^*$ 点处的迷向子群, 用 $\mathcal{O}_\mu = G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$ 表示 Θ 在 μ 点处的 G - 轨道, 那么, 商空间 $(T^*Q)_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/\tilde{G}_\mu$ 是一个辛流形, 其辛形式 ω_μ 由 (2.1) 唯一确定; 而商空间 $(T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu} = \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$ 也是一个辛流形, 其辛形式 $\omega_{\mathcal{O}_\mu}$ 由 (5.1) 唯一确定, 参见文献 [15]. 进一步, 在这种情形下, 对于给定的正则点或正则轨道可约化的 RCH 系统 $(T^*Q, G, \omega, H, F, W)$, 利用上述类似的方法, 我们也能证明正则点或正则轨道约化定理.

5.3 RCH 系统的奇异约化

注意到, 当 Lie 群 G 仅是恰当地而非自由地作用于 Q 上, 那么, 约化空间 $(T^*Q)_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ (或者, $(T^*Q)_{\mathcal{O}_\mu} = \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$) 不必是一个光滑流形, 但恰好是一个商拓扑空间, 并且它可以是一个 Whitney 辛分层空间. 在这种情形下, 利用动量映射和分层相空间中的奇异约化辛形式, 我们研究了具有对称的 RCH 系统的奇异约化理论, 证明了奇异点和奇异轨道约化定理, 并且说明了奇异可约化 RCH 系统的 SpCH (singular point-reducible controlled Hamiltonian)- 等价性和 SoCH (singular orbit-reducible controlled Hamiltonian)- 等价性与奇异约化了的 RCH 系统的 RCH- 等价性之间的关系. 对于奇异约化了的 RCH 系统的分层相空间的复杂结构, 这不是容易研究的问题.

5.4 CH 系统的优化约化

如果考虑的余切丛 T^*Q 具有 Poisson 结构, 并且对于这样的 T^*Q 上定义的控制 Hamilton 系统, 上述 Marsden 等^[25] 给出的正则约化方法不能有效地工作, 我们应该怎么办? Wang 和 Zhang^[29] 利用优化动量映射和约化的 Poisson 张量 (或者约化的辛形式), 建立了具有 Poisson 结构的 T^*Q 上对称 CH 系统的优化约化理论, 对于对称 CH 系统证明了优化点约化、优化轨道约化和正则 Poisson 约化定理, 解释了优化可约化的 CH 系统的 OpCH- 等价性、OoCH- 等价性和 RPR-CH- 等价性与相应的优化约化了的 CH 系统的 CH- 等价性之间的关系^[29]. 过世的 Marsden 教授生前也参加了这项研究工作. 当该文献接近完成的时候, 他离开了我们. 我们感到非常悲痛. 王红和张振兴非常感谢 Marsden 教授在两年多合作中的理解、指导、支持和帮助.

5.5 CH 系统的能控性 Poisson 约化

值得注意的是, 当我们考虑的对称控制 Hamilton 系统, 其对应的 Lie 群作用没有动量映射, 那么在文献 [25, 29] 中给出的约化方法都不能用. 我们必须寻找新的方法. 另一方面, 受到文献 [30] 中 Poisson 流形的分布 Poisson 约化方法的影响, 再注意到 CH 系统的相空间 T^*Q 也是一个 Poisson 流形, 并且控制子集 $W \subset T^*Q$ 是一个纤维子流形. 如果假设 $D \subset TT^*Q|_W$ 是 CH 系统的一个能控性分布, 那么自然可以研究 CH 系统的能控性分布 Poisson 约化. 进一步, 对于对称 CH 系统, 它的控制子集 $W \subset T^*Q$ 是一个 G -不变的纤维子流形. 如果假设 $D \subset TT^*Q|_W$ 是对称 CH 系统的一个 G -不变的能控性分布, 那么可以给出这个对称 CH 系统的能控性 Poisson 可约化的条件, 并且证明它在 CH-等价性下不变的 Poisson 可约化的性质. 我们也研究了正则 (或者奇异) Poisson 可约化的 CH 系统的关于 G -不变能控性分布的 Poisson 约化与相应的约化了的 CH 系统的关于约化了的能控性分布的 Poisson 约化之间的关系. 此外, 我们也发展了具有对称 CH 系统的奇异 Poisson 约化和 SPR-CH-等价性, 证明了这种 CH 系统的奇异 Poisson 约化定理, 参见文献 [31] 中更多的细节.

5.6 Heisenberg 群对称的控制磁力 Hamilton 系统的正则约化

一个控制磁力 Hamilton (controlled magnetic Hamiltonian, CMH) 系统是一个具有磁力辛形式的正则控制 Hamilton 系统. 我们研究了具有 Heisenberg 群 $\mathcal{H}$ 对称的 CMH 系统 $(T^*Q, \mathcal{H}, \omega_Q, H, F, C)$ 的正则点约化. 这里, 位形空间 $Q = \mathcal{H} \times V$, $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, 并且 V 是一个 k -维向量空间, 而且余切丛 T^*Q 具有磁力辛形式 $\omega_Q = \Omega_0 - \pi_Q^* \bar{B}$, 其中, Ω_0 是通常 T^*Q 上的典则辛形式, $\bar{B} = \pi_1^* B$ 是 Q 上的闭的 2-形式, B 是 $\mathcal{H}$ 上的闭的 2-形式. 投影映射 $\pi_1: Q = \mathcal{H} \times V \rightarrow \mathcal{H}$ 诱导了映射 $\pi_1^*: T^*\mathcal{H} \rightarrow T^*Q$.

值得注意的是, Heisenberg 群 $\mathcal{H}$ 的余切丛上有一个磁力项, 它与 $\mathcal{H}$ 的中心作用约化确定的力学联络的曲率 2-形式有关, 参见文献 [32]. 这样, 我们可以定义一个具有 Heisenberg 群 $\mathcal{H}$ 对称的 CMH 系统. 虽然一个 CMH 系统也是一个 RCH 系统, 并且, CMH 系统的集合是 RCH 系统的集合的一个子集合. 但是, 在 RCH 系统的正则点约化下, 这个子集合不是完备的. 不同于具有典则辛形式的余切丛上定义的 RCH 系统的正则点约化, CMH 系统的正则点约化反映了 RCH 系统的内蕴几何结构的深层关系, 参见文献 [33] 中更多的细节.

5.7 Hamilton-Jacobi 理论

在数学和力学的研究中, Hamilton 方程的求解以及 Hamilton-Jacobi 理论也是一个非常重要而且复杂的研究课题, 并且有着非常广泛的应用. 从几何的观点来看, 这一问题的经典表述是由文献 [1] 给出的, 其刻画了余切丛上某种时变 (或者时不变) 的典则变换的生成函数的性质, 使得所确定的 Hamilton 方程的解通过约化到平衡态的方式变得很容易求出, 也可参见文献 [4, 13]. 此外, Hamilton-Jacobi 理论也是量子化理论中研究经典 - 量子关系的基础, 并且也在保结构数值积分方法和随机动力系统理论研究中起着重要的作用. 正因为这些理由, Hamilton-Jacobi 理论在 Hamilton 系统理论研究发展中也是一种强有力的工具. 参见文献 [34–37].

由于余切丛 T^*Q 上定义的对称 Hamilton 系统的集合在 Marsden-Weinstein 约化下不是完备的, 并且定义在余切丛 T^*Q 上的一个对称 Hamilton 系统的 Marsden-Weinstein 约化了的系统可以不是一个余切丛上的 Hamilton 系统. 这样, 我们不能给出 Marsden-Weinstein 约化了的系统的 Hamilton-Jacobi 定理, 就像在文献 [1] 中那样给出 T^*Q 上 Hamilton 系统的 Hamilton-Jacobi 定理. 我们必须寻找新的方法. 最近, Wang^[38] 修正了文献 [1] 中的一个引理, 利用辛形式、约化了的辛形式、以及系统

的动力向量场, 证明了 T^*Q 上 Hamilton 系统和 Marsden-Weinstein 约化了的系统, 以及正则轨道约化了的系统的两种类型几何 Hamilton-Jacobi 定理. 作为理论结果的应用, 也导出了正则点约化了的刚体和重摆系统的两种类型的 Lie-Poisson 的 Hamilton-Jacobi 方程.

由于 T^*Q 上 Hamilton 系统的 Hamilton-Jacobi 理论是基于动力的 Hamilton 刻画而发展起来的. 一个自然的想法是对于 RCH 系统和各种约化了的 RCH 系统, 以及具有非完整约束的 Hamilton 系统和各种非完整约化了的分布 Hamilton 系统扩展 Hamilton-Jacobi 理论. 我们已经开展了这方面的研究, 参见文献 [39, 40].

5.8 飞船和 underwater 探测器

我们上述深入的理论研究成果是否可以应用于实际问题的研究, 这是一个应用和工程领域非常关注的问题. 文献 [25] 将具有外力作用的刚体、具有内部转子的刚体和具有内部转子的重摆考虑为正则点可约化的 RCH 系统, 通过仔细地计算, 在 Lie 群推广的辛叶面上导出了约化系统的方程, 并且说明了它们彼此之间的 RCH- 等价性. 此外, 通过对具有外力作用的刚体、具有内部转子的刚体和具有内部转子的重摆的大量复杂的计算, 提炼出的对于推广的 Lie 群上控制 Hamilton 系统的统一的对称约化方法, 不仅给出了抽象的理论结果的应用, 而且这种统一的对称约化方法已经成为后继研究飞船系统和水下装置系统, 以及流体力学、等离子物理系统的对称约化的标准方法, 参见文献 [41, 42] 中更多的细节. 进一步, 对于实际系统的各种约束和控制, 以及在流体力学和相对论场论中的刚体 - 气体、刚体 - 流体耦合系统的研究中, 为了导出各种约化的系统方程, 还需要进行大量的复杂而又困难的计算和论证.

总之, 我们知道一个新理论的建立和发展是极其困难的事情, 除了需要引入新的思想, 建立许多新的概念和表述, 还要探讨它与已有的 Hamilton 系统的约化理论和 Hamilton-Jacobi 理论的相容性及完备性, 以及理论结果对实际系统的应用. 最近几年来, 在国际同行的帮助下, 我们关于控制 Hamilton 系统的约化理论与应用的研究取得了一定的成果. 但是, 围绕这一课题的研究还有更多艰巨和困难的任务. 具体地, 主要有以下三个方面: (1) 从约化空间的几何和拓扑结构来看, 还需要发展 Poisson 约化和 Dirac 约化, 以及各种奇异约化理论; (2) 从系统的约束限制条件来看, 还需要发展非完整 Hamilton 约化、Poisson 约化和 Lagrange 约化, 以及各种奇异约化理论; (3) 从约化系统的应用方面来看, 还需要发展刚体 - 气体、刚体 - 流体等耦合系统, 等离子物理、完美复杂流体和相对场论中各种系统的对称约化、Hamilton-Jacobi 理论和稳定化理论. 在所有这些问题的研究中, 各种约化的完备性, 也就是各种约化空间的几何和拓扑结构的精确刻画, 是最大的困难. 而且, 在各种应用中出现的各种奇怪的空间, 还无法用目前已有的数学理论解释, 需要发展更先进的数学理论工具. 总之, 该课题是具有很强挑战性的国际前沿研究课题, 是很值得深入发展的. 更重要的是需要更多热爱数学和几何的人投入该课题的研究.

致谢 此文献给导师胡和生院士 90 华诞, 作者希望表达对她的尊敬、崇拜、爱戴和感谢.

参考文献

- 1 Abraham R, Marsden J E. Foundations of Mechanics, 2nd ed. New York: Addison-Wesley, 1978
- 2 Marsden J, Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. Rep Math Phys, 1974, 5: 121-130
- 3 Abraham R, Marsden J E, Ratiu T S. Manifolds, Tensor Analysis and Applications. Applied Mathematical Science, vol. 75. New York: Springer-Verlag, 1988
- 4 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 60. New York: Springer-Verlag, 1989

- 5 Bates L, Śniatycki J. Nonholonomic reduction. *Rep Math Phys*, 1993, 32: 99–115
- 6 Bloch A M. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Interdisciplinary Mathematics Series, vol. 24. New York: Springer-Verlag, 2003
- 7 Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, et al. Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry. *Arch Ration Mech Anal*, 1996, 136: 21–99
- 8 Cendra H, Marsden J E, Ratiu T S. *Lagrangian Reduction by Stages*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 152. Providence: Amer Math Soc, 2001
- 9 Libermann P, Marle C M. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987
- 10 Marsden J E. *Lectures on Mechanics*. London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 174. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 11 Marsden J E, Misiolek G, Ortega J P, et al. *Hamiltonian Reduction by Stages*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1913. New York: Springer, 2007
- 12 Marsden J E, Montgomery R, Ratiu T S. *Reduction, Symmetry and Phases in Mechanics*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 88. Providence: Amer Math Soc, 1990
- 13 Marsden J E, Ratiu T S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed. Texts in Applied Mathematics, vol. 17. New York: Springer-Verlag, 1999
- 14 Meyer K R. Symmetries and integrals in mechanics. In: *Dynamical Systems*. Amsterdam: Academic Press, 1973, 259–273
- 15 Ortega J P, Ratiu T S. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*. Progress in Mathematics, vol. 222. Basel: Birkhäuser, 2004
- 16 Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, et al. Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques. *Automatica*, 1992, 28: 745–756
- 17 Chenciner A, Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann of Math (2)*, 2000, 152: 881–901
- 18 Holm D D, Marsden J E, Ratiu T, et al. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys Rep*, 1985, 123: 1–116
- 19 Koon W S, Marsden J E. Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction. *SIAM J Control Optim*, 1997, 35: 901–929
- 20 Leonard N E, Marsden J E. Stability and drift of underwater vehicle dynamics: Mechanical systems with rigid motion symmetry. *Phys D*, 1997, 105: 130–162
- 21 Marsden J E, Ross S D. New methods in celestial mechanics and mission design. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2006, 43: 43–73
- 22 Marsden J E, Scheurle J. Lagrangian reduction and the double spherical pendulum. *Z Angew Math Phys*, 1993, 44: 17–43
- 23 Nijmeijer H, Van der Schaft A J. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1990
- 24 Van der Schaft A J. Port-Hamiltonian systems: An introductory survey. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Madrid: European Mathematical Society, 2006, 1339–1365
- 25 Marsden J E, Wang H, Zhang Z X. Regular reduction of controlled Hamiltonian system with symplectic structure and symmetry. *Differential Geom Appl*, 2014, 33: 13–45
- 26 Marsden J E, Perlmutter M. The orbit bundle picture of cotangent bundle reduction. *C R Math Acad Sci Soc R Can*, 2000, 22: 33–54
- 27 Marle G M. Symplectic manifolds, dynamical groups and Hamiltonian mechanics. In: *Differential Geometry and Relativity*. Dordrecht: Springer, 1976, 249–269
- 28 Kazhdan D, Kostant B, Sternberg S. Hamiltonian group actions and dynamical systems of calogero type. *Comm Pure Appl Math*, 1978, 31: 481–507
- 29 Wang H, Zhang Z X. Optimal reduction of controlled Hamiltonian system with Poisson structure and symmetry. *J Geom Phys*, 2012, 62: 953–975
- 30 Marsden J E, Ratiu T. Reduction of Poisson manifolds. *Lett Math Phys*, 1986, 11: 161–169
- 31 Ratiu T S, Wang H. Poisson reduction by controllability distribution for a controlled Hamiltonian system. *ArXiv:1312.7047*, 2013
- 32 Marsden J E, Misiolek G, Perlmutter M, et al. Symplectic reduction for semidirect products and central extensions. *Differential Geom Appl*, 1998, 9: 173–212
- 33 Wang H. Regular reduction of a controlled magnetic Hamiltonian system with symmetry of the Heisenberg group. *ArXiv:1506.03640*, 2015
- 34 Zhong G, Marsden J E. Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators. *Phys Lett A*, 1988, 133:

- 134–139
- 35 Lázaro-Camí J A, Ortega J P. The stochastic Hamilton-Jacobi equation. *J Geom Mech*, 2009, 1: 295–315
 - 36 Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numer*, 2001, 357–514
 - 37 Woodhouse N M J. *Geometric Quantization*, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1992
 - 38 Wang H. Hamilton-Jacobi theorems for regular reducible Hamiltonian systems on a cotangent bundle. *J Geom Phys*, 2017, 119: 82–102
 - 39 Wang H. Hamilton-Jacobi theorems for regular controlled Hamiltonian system and its reduced systems. *ArXiv*: 1305.3457, 2013
 - 40 de León M, Wang H. Hamilton-Jacobi theorems for nonholonomic reducible Hamiltonian systems on a cotangent bundle. *ArXiv*:1508.07548, 2015
 - 41 Wang H. Symmetric reduction and Hamilton-Jacobi equation of rigid spacecraft with a rotor. *J Geom Symmetry Phys*, 2013, 32: 87–111
 - 42 Wang H. Symmetric reduction and Hamilton-Jacobi equation of underwater vehicle with internal rotors. *ArXiv*:1310.3014, 2013

Some developments of reduction theory for controlled Hamiltonian system with symmetry

Hong Wang

Abstract A regular controlled Hamiltonian (RCH) system is a Hamiltonian system with external force and control. In general, an RCH system under the action of external force and control is not Hamiltonian, however, it is a dynamical system closely related to a Hamiltonian system, and it can be explored and studied by extending the methods for external force and control in the study of Hamiltonian systems. In this paper, we introduce briefly some recent developments in the study of reduction theory for the RCH systems with symmetries and applications, in terms of the completeness of Marsden-Weinstein reduction and the change of geometrical structures.

Keywords geometrical structure, fiber bundle, symmetric reduction, completeness, momentum map

MSC(2010) 53D20, 70H33, 70Q05

doi: 10.1360/N012018-00070