



## 论 文

随机派系网络的渗流相变研究<sup>†</sup>丁益民<sup>①②</sup>, 樊京芳<sup>②③</sup>, 叶方富<sup>③</sup>, 陈晓松<sup>②\*</sup>

① 湖北京大学物理与电子科学学院, 武汉 430062;

② 中国科学院理论物理研究所, 理论物理国家重点实验室, 北京 100190;

③ 中国科学院物理研究所, 软物质与生物物理重点实验室, 北京 100190

\*联系人, E-mail: chenxs@itp.ac.cn

<sup>†</sup>陈晓松编委供稿

收稿日期: 2015-09-15; 接受日期: 2015-10-08; 网络出版日期: 2016-04-25

理论物理国家重点实验室开放式课题基金(编号: Y3KF321CJ1)和国家自然科学基金(批准号: 11274102)资助项目

**摘要** 现实的复杂网络往往具有小世界特征和模块化层次结构, 随机派系(Clique)网络不仅有高的聚类系数和短的平均路径长度(小世界特征), 而且具有模块化层次结构, 可以较好地描述现实世界中许多复杂网络的结构特征。本文采用蒙特卡罗模拟方法和临界现象有限尺度标度理论对该网络的渗流相变进行了研究。在网络的演化过程中, 其最大团簇单时间步的最大尺度跳跃及对应的时间步可以用来确立临界行为和临界点。我们的模拟研究表明: 随机派系网络的渗流相变都为连续相变, 不同派系大小  $k$  的相变点发生的时间步不同, 但约化边数相同; 网络最大团簇的最大尺度跳跃  $\Delta$  与网络大小  $N$  呈幂律关系, 幂指数对应于渗流相变的序参量临界指数, 且不随派系大小  $k$  变化; 与  $\Delta$  相关的另外三个临界指数也不随  $k$  值变化, 与 ER 随机网络的临界指数相等。这些结果表明随机派系网络的渗流相变与 ER 网络渗流相变同属一个普适类。我们的研究加深了对复杂网络模块化层次结构产生机理的认识, 有助于进一步认识复杂网络的渗流相变。

**关键词** 复杂网络, 派系, 渗流相变, 有限尺度标度性**PACS:** 89.75.Hc, 89.75.-k, 02.50.-r, 05.10.-a

## 1 引言

复杂网络是 21 世纪蓬勃发展的一门多学科的交叉性学科, 也是统计物理学的一个重要的研究方向。早在 20 世纪 60 年代, 数学家 Erdős 和 Rényi<sup>[1]</sup>将图论与概率论有机地结合在一起并建立了一套完整随机图理论(Random Graph Theory), 根据随机图理论, 复

杂网络的度分布服从 Poisson 分布, 其特征是网络中绝大多数节点的度分布在均值附近, 即复杂网络是均质网络<sup>[2]</sup>。1999 年, Barabási-Albert<sup>[3]</sup>提出了无标度网络模型(Scale-Free Networks)并揭示了许多异质网络(如万维网)的度分布服从幂律分布特征。与此同时, Watts 和 Strogatz<sup>[4]</sup>构造出了拓扑结构介于完全规则与完全随机之间的网络, 它具有较高的聚集系数

**引用格式:** 丁益民, 樊京芳, 叶方富, 等. 随机派系网络的渗流相变研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 060502  
Ding Y M, Fan J F, Ye F F, et al. Percolation of random clique networks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2016, 46: 060502, doi: 10.1360/SSPMA2015-00463

和较短的平均路径长度, 这种特殊结构的网络被称为小世界网络(Small-World Networks). 这些网络模型较好地解释了现实网络中的度分布的异质性和小世界特性. 2002年, Milo 等人<sup>[5]</sup>发现许多网络(如蛋白质网络)还具有模块化的结构特征. 2005年, Palla 等人<sup>[6]</sup>指出自然界和人类社会中的许多复杂网络都可描述为具有重叠连接的社团结构. 如果两个  $k$ -派系(Clique)共享  $k-1$  个节点, 则它们是连通的, 如此定义的社团称为派系(Clique)社团. 通过寻找网络中的  $k$ -派系社团即可实现对网络社团的划分<sup>[7]</sup>. 在此基础上, Takemoto 等人<sup>[8]</sup>提出了一个基于派系结构的网络模型(Evolving Networks by Merging Cliques), 该模型可以解释复杂网络的幂律度分布、高聚类和层次结构等特征. 2008年, Clauset 等人<sup>[9]</sup>在 Nature 上发表论文指出模块化层次结构是建构复杂网络最基本的组织原则之一, 进一步揭示了复杂网络具有层次结构和社团结构的特征. 随后许多学者相继对具有高聚类的随机网络进行了研究<sup>[10-17]</sup>, 它已成为复杂网络领域研究的一个热点问题.

在复杂网络的研究初期, 人们主要任务是建立合适的网络模型并研究网络的拓扑特性, 然而许多实际网络是随时间变化的, 这就需要了解网络动力学演化的性质. 在复杂网络的动力学演化中, 渗流问题是一个重要热点问题. 网络处于平均度比较低的状态时它不能形成全局结构, 而当平均度增大到一定程度以后, 网络开始形成全局结构, 这伴随着最大团簇的产生. 在渗流过程中, 最大团簇自临界点从微观尺寸连续地成长为可以和系统尺寸比拟的宏观尺寸, 因此, 渗流过程是典型的连续相变过程. 关于复杂网络中的渗流相变问题近年受到许多学者的关注<sup>[18]</sup>. 我们知道, 热力学系统不仅普遍存在连续相变, 也有种类繁多的非连续相变, 或者说一级相变. 人们曾试图通过修改网络构建规则从而导致渗流相变非连续. 2009年, 美国学者 Achlioptas 等人<sup>[19]</sup>在 Science 上发表论文提出所谓的 Achlioptas 过程并发现了被称为爆炸式渗流(Explosive Percolation)的现象. 他们通过一些分析声称在随机网络(Random Network)上获得了非连续的渗流相变过程, 认为爆炸式渗流是一种非连续相变. 在随后的研究中, 人们将 Achlioptas 过程应用于二维格点<sup>[20]</sup>和无标度网络(Scale Free Network)<sup>[21]</sup>等其他复杂网络, 并声称同样得到了爆炸式渗流和非连续相变的结论. 人们还提出了不同

的选择规则对复杂网络的渗流相变进行了研究<sup>[22,23]</sup>. 然而, Cost 等人<sup>[24]</sup>在一个修改了的 Achlioptas 过程中通过主方程的解析方法论述了该过程依然是连续相变, Radicchi 等人<sup>[25]</sup>通过数值模拟及有限尺度标度显示 Achlioptas 过程显示了连续相变的有限尺度标度性, Riordan 等人<sup>[26]</sup>用数学严格证明所有有限条边中选择一条边连接的规则都不能导致非连续相变.

近年来, 我们对复杂网络的相变行为进行了系统的探讨<sup>[27-29]</sup>. 为了更深入地研究 Achlioptas 过程对渗流相变的影响, 我们提出了广义的 Achlioptas 过程(GAP)<sup>[27]</sup>. 在 GAP 中, 大团簇增长的抑制通过概率参数  $p$  来控制. 当  $p = 0.5$  时, 对大团簇的增长既不抑制也不鼓励, 随机演化的网络将经历普通的渗流相变. 当  $p > 0.5$  时, 大团簇的增长受到抑制, 且  $p$  值越大, 抑制越强,  $p = 1.0$  时对应通常的 Achlioptas 过程. 当  $p < 0.5$  时, 大团簇的增长则被鼓励. 可靠的数值模拟和有限尺度标度性分析显示, GAP 下二维格点网络<sup>[27]</sup>和随机网络<sup>[28]</sup>都经历了连续相变, 而不是之前所声称不连续相变. 这些连续相变的临界指数随概率参数  $p$  变化, 这说明不同  $p$  值的渗流连续相变属于不同的普适类, 显示了网络临界行为对演化规则的依赖. 对渗流相变的研究并不局限于键渗流(Bond Percolation), Derényi 等人<sup>[7]</sup>研究了派系的渗流相变, 并声称该相变不连续. Fan 等人<sup>[29]</sup>进一步研究了广义派系的渗流相变, 对于一个  $(k, l)$  广义派系社团, 两个  $k$ -派系至少共享了  $l$  个节点就是连通的,  $l$  的取值从 1 到  $k-1$ . 当  $l=k-1$  时, 广义派系社团就成为 Derényi 等人<sup>[7]</sup>引入的派系社团. 通过有限尺度标度性分析, 发现 ER 网络在随机演化过程中经历了一系列的  $(k, l)$  派系渗流相变<sup>[29]</sup>, 这些渗流相变都是连续的, 且临界指数和普适类只依赖  $l$ .

近年来, 复杂网络中的渗流相变研究取得了不少进展, 但研究的网络基本局限在随机网络、小世界网络和无标度网络, 对现实社会中具有普遍意义的模体结构和社团网络涉及很少. 本文我们将对具有模块化层次结构特征的随机派系网络的渗流相变行为进行研究, 试图了解派系网络的动力学演化过程与渗流相变.

## 2 随机派系网络模型

现实世界中的复杂网络, 尤其是生物网络和社会网络许多具有模块化层次结构, 这种结构特征与

网络产生的机理是分不开的, 就如同现实世界中的物质是由原子、分子构成的一样, 一个复杂网络也是由一些有一定结构特征的小模块组成. 这里, 我们将这种小模块看成为派系, 并依据随机选择的规则, 建立以下随机派系网络模型. 对于一个  $k$ -派系随机网络, 其构造算法如下:

(1) 初始化: 给定  $N$  个节点以及任意选择  $k$  个点并连接成为  $k$ -派系( $k$ -clique)的概率为  $p$ .

(2) 随机连边形成  $k$ -派系:

1) 选择  $k$  个点, 这  $k$  个点没有连接成为  $k$ -派系.

2) 生成一个随机数  $r$ .

3) 如果  $r < p$ , 那么在将选择的  $k$  个点两两相连, 连接成为一个新的  $k$ -派系, 否则就不连接.

4) 重复步骤 1)–3), 直到所有的  $k$  个点的组合都被选择过一次.

随机派系网络的演化过程可如图 1 表示. 这里, 网络从  $N=12$  个孤立节点开始, 以概率  $p$  随机地从  $N$  个节点中选择 3 个节点连接成一个新的 3-派系, 直到网络中所有的 3 个节点的组合都选择了一次, 这时便形成一个 3-派系随机网络. 当概率  $p$  较小时(如  $p=0.02$ ), 该网络的节点和派系社团是分离的, 当概率  $p$  大到一定数值时(如  $p=0.05$ ), 该网络形成一个最大的连通图.

在  $k=2$  特殊情况下, 随机派系网络退化为 ER 随机网络, 因此我们可以把随机派系网络看成是 ER 随机网络的推广. 然而随机派系网络在  $k > 2$  时表示出许多与 ER 随机网络明显不同的特性: 首先它有具有小的平均路径长度和高的聚类系数, 是一个小世界网络, 其次它还具有模块化的层次结构. 这些特性可以较好地反映现实世界中许多复杂网络(如生物网络和社会网络)的特性. 在下一节中, 我们将研究随机派系网络形成过程中的渗流相变行为, 从而进一

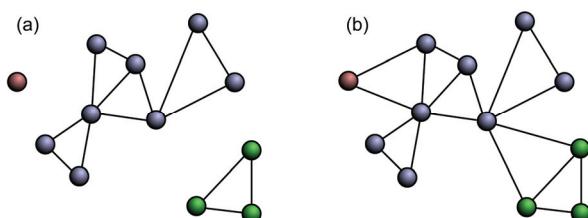


图 1 (网络版彩图)随机派系网络模型演化图( $k=3$ ). 其中, 网络总节点数为  $N=12$ , 连接概率  $p$  分别为: (a)  $p=0.02$ ; (b)  $p=0.05$

**Figure 1** (Color online) Sketches of two random clique graphs of  $N=12$  vertices and with edge probabilities  $p=0.02$  (a) and  $p=0.05$  (b).

步弄清该网络的动态演化过程.

### 3 随机派系网络的渗流相变

#### 3.1 最大团簇大小随演化的变化

对于前面提出的随机派系网络模型, 我们采用蒙特卡罗方法模拟其演化过程. 模拟从  $N$  个无连接节点开始, 在实现  $T$  演化时间步以后, 网络中排名为  $R$  团簇的大小为  $S_R(T, N; k)$ , 我们相应地定义它的约化大小为

$$s_r(r, N; k) = S_R(T, N; k) / N. \quad (1)$$

这里  $r=T/N$  为约化派系数. 对于排名第一的最大团簇, 即  $R=1$ , 我们有  $s_1=S_1/N$ . 网络中出现与系统大小可比拟的巨团簇标志着渗流相变的发生, 因而  $s_1$  便是我们研究渗流相变的序参量. 通过计算模拟, 对于派系大小分别取  $k=2, 3, 4, 5$  时, 我们获得了不同随机派系网络的  $s_1(r, N; k)$  随约化派系数  $r$  的变化关系(如图 2 所示). 在这些计算模拟中, 我们选取总节点数  $N=1000000$ , 每次计算结果进行了 1000 次的统计平均.

从图 2 可以看出, 不同  $k$ -派系网络的渗流相变临界点  $r_c$  是不相同的, 临界点  $r_c$  随  $k$  值增大而减小. 我们还发现,  $k$  值较大的派系渗流相变过程会变得越陡峭, 说明在具有模块结构网络的演化过程中, 模块大小对出现渗流有促进作用, 模块越大, 渗流相变出现

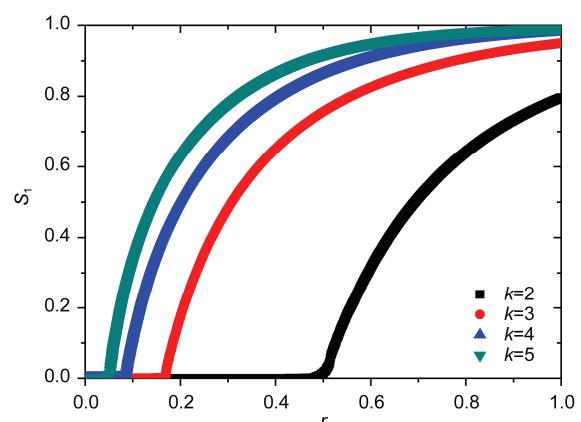


图 2 (网络版彩图)最大约化团的大小  $s_1$  随约化派系数  $r$  的变化图. 网络的总节点数  $N=1000000$ , 派系的大小分别取  $k=2, 3, 4, 5$

**Figure 2** (Color online) Reduced sizes of the largest cluster as a function of the reduced clique number  $r$  in the network with node number  $N=1000000$  and different sizes of the clique  $k$ .

越早, 相变过程也越强.

### 3.2 渗流相变的临界点和临界行为

在复杂网络的渗流相变研究中, 确定其相变点及特性是最重要的任务. 文献[29]提出了一种确定网络渗流相变的相变点及其特性的新方法. 在我们跟踪网络的演化过程时, 网络中最大团簇的尺寸随演化时间步而变化, 最大团簇的尺寸在每一个时间步  $T$  经历一个跳跃, 其中的最大跳跃与相变点相对应, 被定义为

$$\Delta \equiv \frac{1}{N} \max(S_i(T) - S_i(T-1)). \quad (2)$$

将对应最大尺度跳跃的时间步标记为  $T_c$ , 即为相变点, 则约化相变点为  $r_c = T_c/N$ . 在每一个网络演化的蒙特卡罗模拟, 我们可获得  $\Delta$ ,  $T_c$  和  $r_c$  的一个值. 将多次蒙特卡罗模拟的结果取平均以后, 我们可得到最大团簇的最大尺度跳跃的平均值  $\bar{\Delta}$ , 以及相变点的平均值  $\bar{T}_c$  和  $\bar{r}_c$ . 我们模拟的网络系统尺度有限, 我们预言  $\bar{\Delta}$  和  $\bar{r}_c$  应满足以下有限尺度幂律关系

$$\bar{\Delta}(N) \sim N^{-\beta_1}, \quad (3)$$

$$\bar{r}_c(N) - r_c(\infty) \sim N^{-1/\nu_1}, \quad (4)$$

其中, 幂律指数  $\beta_1$  与序参量临界指数有关, 而  $\nu_1$  与关联长度临界指数相关. 相变的类型由指数  $\beta_1$  确定, 当  $0 < \beta_1 < 1$  时, 网络最大团簇的最大尺度跳跃  $\Delta$  随着  $N \rightarrow \infty$  而趋于零, 相变是连续的. 如果  $\beta_1=0$ ,  $\Delta$  随网络尺度增大而趋于一个有限值, 最大团簇的约化尺度出现不连续跳跃, 网络渗流相变不连续. 利用公式(4), 我们还可确定渗流相变的临界点  $r_c(\infty)$ .

对于  $k=2, 3, 4, 5$  的随机派系网络, 我们分别进行了蒙特卡罗模拟计算, 最大跳跃的平均值  $\bar{\Delta}$  与网络节点总数  $N$  的依赖关系显示在图 3, 图中每个数据都是取 10000 次模拟计算的平均后得到.

图 3 中的模拟数据显示, 最大跳跃  $\Delta$  的对数与网络总节点数  $N$  的对数之间基本满足直线关系, 因而  $\Delta$  与  $N$  呈幂律关系, 与公式(3)的理论相符. 由图 3 中不同直线的斜率, 我们可计算不同  $k$  派系网络的幂指数  $\beta_1$  值, 分别为:  $\beta_1=0.330(k=2)$ ,  $0.335(k=3)$ ,  $0.336(k=4)$ ,  $0.338(k=5)$ , 在误差范围之内, 这些  $\beta_1$  值相等. 由于  $k=2$  时, 随机派系网络就退化为 ER 网络, 因而不  $k$  值随机派系网络的渗流相变都是连续的, 且其临界指数  $\beta_1$  与 ER 网络的相同.

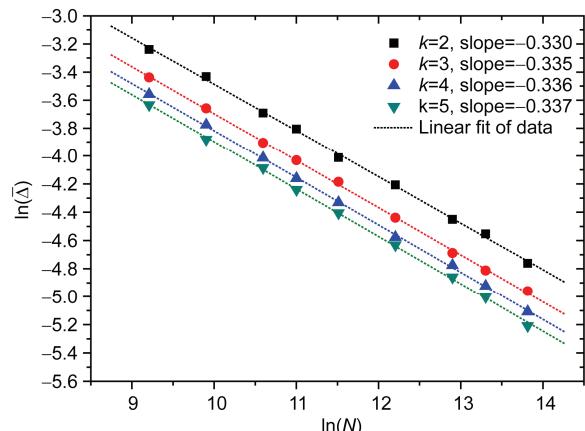


图 3 (网络版彩图)最大跳跃  $\bar{\Delta}$  随网络总节点数  $N$  变化关系图. 网络的总节点数  $N=10000-1000000$ , 派系的大小分别取  $k=2, 3, 4, 5$

**Figure 3** (Color online) The largest gap as a function of the sizes of the network  $N$  for different sizes of the clique  $k$ , double-logarithmic plot of the largest gap  $\bar{\Delta}$  vs.  $N$ , where, the node number  $N$  from 10000 to 1000000.

通过蒙特卡罗模拟, 我们同样可得到  $k=2, 3, 4, 5$  派系网络的  $\bar{r}_c$ . 根据公式(4)的理论预言, 我们对  $r_c(\infty)$  进行拟合, 然后将  $\bar{r}_c(N) - r_c(\infty)$  对网络节点总数  $N$  的依赖关系用双对数形式展示在图 4. 可以看出,  $\bar{r}_c(N) - r_c(\infty)$  的对数与网络总节点数  $N$  的对数之间近似满足直线关系, 因而  $\bar{r}_c(N) - r_c(\infty)$  与  $N$  也呈幂律关系. 由直线的斜率可计算出幂指数  $\nu_1$  的值, 它们分别为:  $1/\nu_1=0.337(k=2)$ ,  $0.334(k=3)$ ,  $0.333(k=4)$ ,  $0.335(k=5)$ , 在误差范围内相等.

随机派系网络渗流相变点  $r_c(\infty)$  在不同  $k$  值的拟合值被集中展示在表 1. 通过下面的分析, 我们也可得到  $r_c(\infty)$  的理论值. 当  $k=2$  时, 随机派系网络实际就是 ER 随机网络, 其相变点  $r_c^{(ER)}=1/2$ , 因而  $r_c^{(k=2)}=1/2$ . 对于随机 3-派系网络, 每一个时间步  $T$  需选择 3 个点连成一个 3-派系. 渗流相变发生之前, 加入的边还不是很多, 网络还是稀疏的, 网络此时的演化过程基本可以忽略重边的情况. 此时的一个时间步, 形成一个 3-派系时将同时产生 3 条边, 这将会使网络发生渗流相变的时间只是  $k=2$  情形下的  $1/3$ . 因此, 随机 3-派系网络的相变点为  $r_c^{(k=2)}/3=1/6$ . 同样的道理, 我们可以得到对于  $k=4, 5$  时相变点分别为  $r_c^{(k=2)}/6=1/12$  和  $r_c^{(k=2)}/10=1/20$ . 对于一般的情况, 我们可以得出

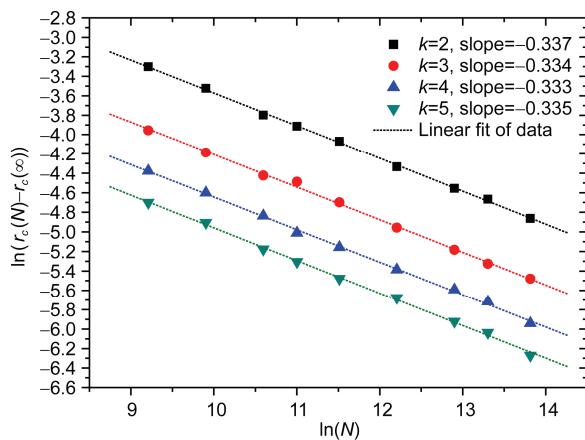


图 4 (网络版彩图)  $\bar{r}_c(N) - r_c(\infty)$  随网络总节点数  $N$  变化关系图. 网络的总节点数  $N=10000-1000000$ , 派系的大小分别取  $k=2, 3, 4, 5$

**Figure 4** (Color online) The corresponding step  $r_c = T_c/N$  as a function of the sizes of the network  $N$  for different sizes of the clique  $k$ , double-logarithmic plot of corresponding step  $r_c = T_c/N$  vs.  $N$ , where, the node number  $N$  from 10000 to 1000000.

表 1 随机派系网络渗流相变点  $r_c$  理论值与模拟值

**Table 1** Critical reduced clique number  $r_c(\infty)$  of random  $k$ -clique networks

$r_c$ 理论与数值	k 值			
	2	3	4	5
$r_c(\infty)$ (Theoretical value)	1/2	1/6	1/12	1/20
$r_c(\infty)$ (Numerical value)	0.4996	0.1665	0.0833	0.0500

$$r_c(\infty) = \frac{r_c^{(ER)}(\infty)}{C_k^2} \quad (5)$$

不同  $k$  值的随机派系网络渗流相变点理论值也被列在表 1 中. 可以看出, 拟合值与理论值之间完全吻合. 我们还可用约化边数来描述网络的状态, 若网络中加入了  $M$  条边, 那么约化边数  $m=M/N$ . 任意一个  $k$  值派系网络的约化边数与约化派系数之间满足一个简单的关系  $m=C_k^2 r$ , 那么, 任意  $k$  值派系网络渗流相变点的约化边数相同、且为 1/2.

综合以上分析, 我们得到如下结论: 不同  $k$  值随机派系网络渗流相变都是连续的, 其临界指数  $\beta_1, \nu_1$  不随派系大小  $k$  值变化. 在渗流相变的临界点, 不同  $k$  值派系网络的约化派系数随  $k$  值减小, 但其约化边数保持不变.

### 3.3 临界指数与普适类

在上一节, 我们研究了派系网络最大尺度跳跃的平均值及跳跃点的平均值, 以及与这两个平均值相关的临界指数  $\beta_1, \nu_1$ , 发现它们与派系大小无关. 在此, 我们研究网络最大尺度跳跃及跳跃点的涨落, 以及相关的另外两个临界指数. 在一个网络演化的蒙特卡罗模拟中, 我们得到最大尺度跳跃  $\Delta$  和跳跃点  $r_c$ , 相应地有涨落  $\delta\Delta = \Delta - \bar{\Delta}(N)$  和  $\delta r_c = r_c - \bar{r}_c(N)$ . 这两个涨落的均方根分别为

$$\chi_\Delta = \sqrt{\langle [\delta\Delta]^2 \rangle}, \quad (6)$$

$$\chi_r = \sqrt{\langle [\delta r_c]^2 \rangle}. \quad (7)$$

我们预言, 它们与系统大小  $N$  也呈代数关系

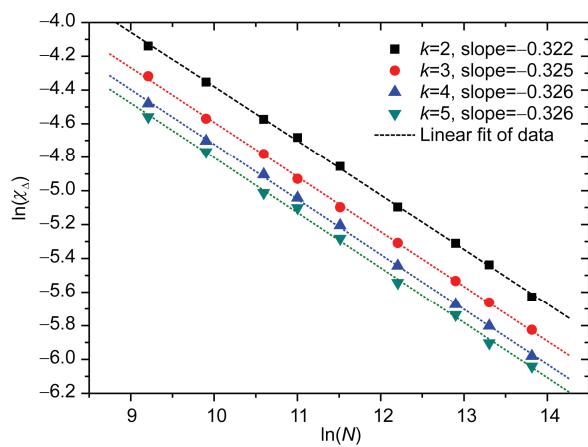
$$\chi_\Delta \sim N^{-\beta_2}, \quad (8)$$

$$\chi_r \sim N^{-1/\nu_2}, \quad (9)$$

从而引入了两个新的临界指数  $\beta_2$  和  $\nu_2$ . 4 个临界指数  $\beta_1, \nu_1, \beta_2, \nu_2$  一起确立了渗流相变的普适类, 不同的普适类具有不同的临界指数, 反之亦然. 普适类概念在统计物理学中具有非常重要的地位, 它使得我们对产生机制完全不同的临界现象, 能够采用统一的方式来理解和描述. 按照传统的观点, 普适类只依赖于系统的空间维数  $d$  和序参量的维数  $n$ , 而不依赖于微观细节. 最近, 在随机网络的爆炸式渗流以及二维格点网络的爆炸式渗流<sup>[27,28]</sup>研究中发现, 渗流相变的临界指数及普适类与网络的演化规则有关, 确定渗流相变的临界指数及普适类与网络那些性质有关, 值得我们做进一步的探讨.

在图 5 和 6 中, 我们显示了  $\chi_\Delta$  和  $\chi_r$  对网络总节点数  $N$  大小的变化关系图. 模拟数据显示,  $\chi_\Delta$  和  $\chi_r$  的对数与网络总节点数  $N$  的对数之间满足直线关系, 因而它们与  $N$  呈幂律关系, 与公式(8)和(9)的理论预言相符. 由图 5 和 6 中直线的斜率, 我们可以确定的随机派系网络的临界指数  $\beta_2, \nu_2$ , 所有 4 个临界指数在  $k=2, 3, 4, 5$  的结果被总结在表 2.

表 2 的模拟结果显示, 在误差范围内, 对于派系大小  $k$  分别取 2, 3, 4, 5 的随机派系网络的渗流相变, 它们的 4 个临界指数  $\beta_1, \nu_1, \beta_2, \nu_2$  相等, 与派系大小没有关系. 这表明不同随机派系网络的渗流相变属于同一个普适类. 而且, 最大尺度跳跃的临界指数  $\beta_1$  与  $\beta_2$  相等, 相变点的临界指数  $\nu_1$  与  $\nu_2$  相等.



**图5** (网络版彩图) $\chi_{\Delta}$ 随网络总节点数 $N$ 变化关系图. 网络的总节点数 $N=10000-1000000$ , 派系的大小分别取 $k=2, 3, 4, 5$

**Figure 5** (Color online)  $\chi_{\Delta}$  as a function of the sizes of the network  $N$  for different sizes of the clique  $k$ , double-logarithmic plot of  $\chi_{\Delta}$  vs.  $N$ , where, the node number  $N$  from 10000 to 1000000.

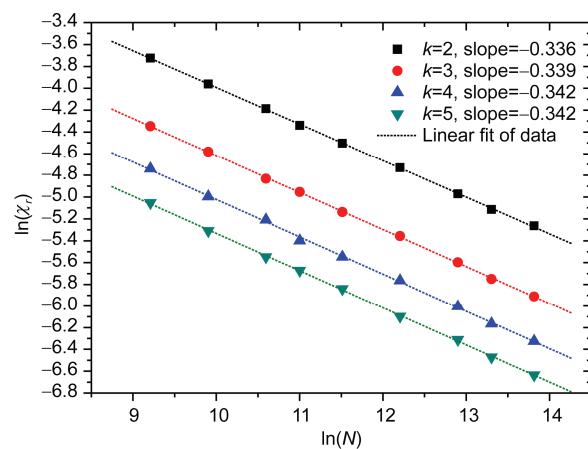
**表2** 不同随机派系网络渗流相变的临界指数

**Table 2** Critical exponent of random  $k$ -clique networks

临界指数	$k$ 值			
	2	3	4	5
$\beta_1$	0.330	0.335	0.336	0.338
$1/\nu_1$	0.337	0.334	0.333	0.335
$\beta_2$	0.322	0.325	0.326	0.326
$1/\nu_2$	0.336	0.339	0.342	0.342

## 4 结论

$k$ 个节点完全连通后形成的网络单元被称为 $k$ -派系, 以派系作为基本单元、随机连接而成的网络被称为随机派系网络, 它是一种介于随机网络与规则网络之间的网络. 在派系大小 $k=2$ 时, 它回归为ER随机网络, 而当 $k>2$ 时, 随机派系网络具有小世界性质



**图6** (网络版彩图) $\chi_r$ 随网络总节点数 $N$ 变化关系图. 网络的总节点数 $N=10000-1000000$ , 派系的大小分别取 $k=2, 3, 4, 5$

**Figure 6** (Color online)  $\chi_r$  as a function of the sizes of the network  $N$  for different sizes of the clique  $k$ , double-logarithmic plot of  $\chi_r$  vs.  $N$ , where, the node number  $N$  from 10000 to 1000000.

和模块结构. 本文中, 我们用蒙特卡罗模拟方法研究了随机派系网络的渗流相变, 通过追踪网络的演化过程, 确定网络最大团簇的最大尺度跳跃, 以及所对应的时间演化步. 我们的模拟结果显示, 最大尺度跳跃及对应时间演化步的平均值和涨落均方根均满足幂率的有限尺度标度规律, 由幂率指数可得到不同派系随机网络的四个临界指数 $\beta_1$ ,  $\nu_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\nu_2$ . 在模拟计算的误差范围内, 派系随机网络的四个临界指数不随派系大小 $k$ 变化, 与ER随机网络的临界指数相同, 它们属于同一个普适类. 随机派系网络渗流相变点的约化派系数 $r_c$ 随着 $k$ 值的增大而减小, 其约化边数保持不变. 这些研究表明, 在随机演化的情况下, 复杂网络模块的大小对渗流相变的性质不产生影响.

## 参考文献

- 1 Erdős P, Rényi A. On the evolution of random graphs. *Publ Math Inst Hung Acad Sci*, 1960, 5: 17–61
- 2 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2004, 74: 47–97
- 3 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- 4 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- 5 Milo R, Shen-Orr S, Itzkovitz S, et al. Network motifs: Simple building blocks of complex networks. *Science*, 2002, 298: 824–827
- 6 Palla G, Derényi I, Farkas I, et al. Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *Nature*, 2005, 435: 814–818
- 7 Dérenyi I, Palla G, Vicsek T. Clique percolation in Random networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 160202

- 8 Takemoto K, Oosawa C. Evolving networks by merging cliques. *Phys Rev E*, 2005, 72: 046116
- 9 Clauset A, Moore C, Newman M E J. Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks. *Nature*, 2008, 453: 98–101
- 10 Newman M E J. Random graphs with clustering. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 058701
- 11 Karrer B, Newman M E J. Random graphs containing arbitrary distributions of subgraphs. *Phys Rev E*, 2010, 82: 066118
- 12 Zlatić V, Garlaschelli D, Caldarelli G. Networks with arbitrary edge multiplicities. *Europhys Lett*, 2012, 97: 28005
- 13 Newman M E J. Communities, modules and large-scale structure in networks. *Nat Phys*, 2012, 8: 25–31
- 14 Liu D, Trajanovski S, Mieghem P V. Random line graphs and a linear law for assortativity. *Phys Rev E*, 2013, 87: 012816
- 15 Ding Y M, Ding Z, Yang C P. The network model of urban subway networks with community structure (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2013, 62: 098901 [丁益民, 丁卓, 杨昌平. 基于社团结构的城市地铁网络模型研究. *物理学报*, 2013, 62: 098901]
- 16 Ding Y M, Fan J F, Zhou B, et al. Random clique evolving network model and their communicability (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2014, 44: 299–304 [丁益民, 樊京芳, 周斌, 等. 随机派系生长网络模型及其传输能力研究. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2014, 44: 299–304]
- 17 Ding Y, Zhou B, Chen X. Hybrid evolving clique-networks and their communicability. *Phys A*, 2014, 407: 198–203
- 18 Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F. Critical phenomena in complex networks. *Rev Mod Phys*, 2008, 80: 1275
- 19 Achlioptas D, D'sousa R M, Spencer J. Explosive percolation in random networks. *Science*, 2009, 323: 1453–1455
- 20 Ziff R M. Explosive growth in biased dynamic percolation on two-dimensional regular lattice networks. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 045701
- 21 Radicchi F, Fortunato S. Explosive percolation in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 168701
- 22 D'souza R M, Mitzenmacher M. Local cluster aggregation models of explosive percolation. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 195702
- 23 Aráujo N A M, Herrmann H J. Explosive percolation via control of the largest cluster. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 035701
- 24 Costa R A da, Dorogovtsev S N, Goltsev A V et al. Explosive percolation transition is actually continuous. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 255701
- 25 Radicchi F, Fortunato S. Explosive percolation: A numerical analysis. *Phys Rev E*, 2010, 81: 036110
- 26 Riordan O, Warnke L. Explosive percolation is continuous. *Science*, 2011, 333: 322–324
- 27 Liu M X, Fan J F, Li L S et al. Continuous percolation phase transitions of two-dimensional lattice networks under a generalized Achlioptas process. *Eur Phys J B*, 2012, 85: 132
- 28 Fan J F, Liu M X, Li L S, et al. Continuous percolation phase transitions of random networks under a generalized Achlioptas process. *Phys Rev E*, 2012, 85: 061110
- 29 Fan J F, Chen X S. General clique percolation in network evolution. *Europhys Lett*, 2014, 107: 28005

## Percolation of random clique networks

DING YiMin<sup>1,2</sup>, FAN JingFang<sup>2,3</sup>, YE FangFu<sup>3</sup> & CHEN XiaoSong<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Physics and Electronic, Hubei University, Wuhan 430062, China;

<sup>2</sup> State Key Laboratory of Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

<sup>3</sup> Laboratory of Soft Matter and Biological Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

We propose a random clique network (RCN), which is constructed by adding cliques randomly. In a  $k$ -clique, there are  $k$  nodes which are connected each other completely. The RCN possesses some characters of the small world network and the modular hierarchical structure. At  $k=2$ , the RCN becomes the Erdős-Rényi (ER) random network. In this paper, we study the percolation transition of RCN by investigating the biggest size gap  $\Delta$  of the largest cluster in the network and the corresponding evolution step, which is taken as the transition point. From the Monte Carlo simulations of RCN at  $k=2, 3, 4, 5$ , we can calculate the mean values and the mean square root of fluctuations for  $\Delta$  and the transition point. They all show a power-law dependence on the network size  $N$ . This leads to the conclusion that the percolation transitions of RCN at  $k=2, 3, 4, 5$  are continuous. From the exponents of power-law behaviors, the critical exponents  $\beta_1, \nu_1$  of  $\Delta$  and the critical exponents  $\beta_2, \nu_2$  of the transition points can be obtained. These critical exponents of different RCN are shown to be independent of the clique size  $k$ . The percolation transitions of RCN belong to the same universality class as the ER random network.

**complex networks, clique, percolation transition, finite-size scaling**

**PACS:** 89.75.Hc, 89.75.-k, 02.50.-r, 05.10.-a

**doi:** 10.1360/SSPMA2015-00463