科 学 通 报
第38卷 第7期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1993年4月

Theta 级数与 Jacobi 形式的迹公式

李 云 峰
(中国科学技术大学数学系，合肥 230026)

关键词 Jacobi 形式、theta 级数、Siegel 模形式、迹公式

1 引 言

Jacobi 形式是 Jacobi theta 级数和 Siegel 模形式的 Fourier-Jacobi 展开系数概念的一般化，对它的系统的研究是近几年才开始的，已经在模形式理论、数论等领域取得了很好的应用．

Ziegler[1] 研究了一般情况下的 Jacobi 形式，有关 Jacobi 形式的概念和结论请参阅文献[1]．如无特殊说明，记号的使用也与文献[1]相同．为方便起见，对方阵 X，以 $e\{X\}$ 表示 $e^{2\pi i\,\mathrm{tr}X}$；$\mathbf{Z}^{(l,n)}$ 表 $\mathbf{Z}$ 上的 $l\times n$ 矩阵全体，$\mathbf{Z}^{2(l,n)}$ 表示 $\mathbf{Z}^{(l,n)}\times\mathbf{Z}^{(l,n)}$．

与文献[1]一样，设 $G_{\mathbf{Q}}^{(n,l)}$ 为 $\mathbf{Q}$ 上的 Jacobi 群，$H_{\mathbf{Z}}^{(n,l)}$ 为 $\mathbf{Z}$ 上的 Heisenberg 群，对 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{Z})$ 的一个有限指标子群 Γ，

$$\Gamma^J=\Gamma\ltimes H_{\mathbf{Z}}^{(n,l)}.$$

对 l 阶正定、半整，对称矩阵 S 和整数 k，以 $J_{k,S}(\Gamma)$ 表 Γ 上权 k．指标为 S 的 Jacobi 形式全体构成的有限维线性空间．$J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma)$ 表 $J_{k,S}(\Gamma)$ 中尖点形式 (cusp form) 全体构成的一个子空间，它关于 Petersson 内积构成-Hilbert 空间．

设 $\Delta\subseteq G_{\mathbf{Q}}^{(n,l)}$ 为 Γ^J 的有限个双边陪集之并．定义算子：

$$H_{k,S,\Gamma}(\Delta):\phi\longmapsto\phi|H_{k,S,\Gamma}(\Delta)=\sum_{\zeta\in\Gamma^J\backslash\Delta}\phi|_{k,S}\zeta,$$

其中 $\phi\in J_{k,S}(\Gamma)$．我们可以证明

命题1 $H_{k,S,\Gamma}(\Delta)$ 是 $J_{k,S}(\Gamma)$ 上线性算子，且映 $J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma)$ 到 $J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma)$．

研究 $H_{k,S,\Gamma}(\Delta)$ 的迹是 Jacobi 形式理论中一个非常重要的问题．在 $n=l=1$ 时，Skoruppa 和 Zagier[2,3] 和 Eichler[4] 已进行了研究，在 $n=1$ 时，Arakawa[5] 采用 Selberg zeta 函数方法也得到了一些结果．本文将对一般的 n 和 l 进行讨论．

2 Theta 级数

设 $\mathcal{N}=(2S)^{-1}\mathbf{Z}^{(l,n)}/\mathbf{Z}^{(l,n)}$，对 $a\in\mathcal{N}$，定义

$$\theta_{S,a}(\tau,z)=\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}^{(l,n)}}e\{S[(\lambda+a)\tau{}^t(\lambda+a)+2(\lambda+a){}^tz]\}.$$

1992-06-27 收稿．

$\{\theta_{S,a} \mid a \in \mathcal{N}\}$ 生成了一个线性空间 Th。关于它的一些基本性质参见文献[1]。

对 $\zeta \in G_{\mathbb{Q}}^{(n,l)}$，设 L 为 $\mathbf{Z}^{(l,n)} \times \mathbf{Z}^{(l,n)}$ 的一个有限阶子群，且使得

$$\zeta L \zeta^{-1} \subseteq \mathbf{Z}^{(l,n)} \times \mathbf{Z}^{(l,n)},$$

于是对任意 $\theta \in Th$，定义算子：

$$\theta | U_S(\zeta) = |L \backslash \mathbf{Z}^{2(l,n)}|^{-1} \sum_{(\lambda,\mu) \in L \backslash \mathbf{Z}^{2(l,n)}} \theta \Big|_{\frac{l}{2},S} J[E_{2n},(\lambda,\mu),-\mu^{t}\lambda].$$

可以证明 $U_S(\zeta)$ 的定义是合理的，并且有

定理1 对任意 $\zeta \in G_{\mathbb{Q}}^{(n,l)}$，算子 $U_S(\zeta)$ 是空间 Th 上的一个线性算子。进一步，$\mathrm{tr} U_S(\zeta)$ 是可以计算的。

在 $n = l = 1$ 时，此结论亦见于文献[2]。这一结果对下面迹公式的研究很有帮助。

3 迹 公 式

设 $\phi \in J_{k,S}(\Gamma)$，则存在一组函数 $\{f_a(\tau)\}$，使得

$$\phi(\tau, z) = \sum_{a \in \mathcal{N}} f_a(\tau) \theta_{S,a}(\tau, z).$$

Shimura[6] 研究了这一关系式，对 $f_a(\tau)$ 的性质有精细的刻画。我们以 $M_t(\Gamma')$和 $S_t(\Gamma')$分别表示 $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{Z})$之子群 Γ' 上权 t 的 Siegel 模形式和 Siegel 尖点形式空间（t 为整数或半整数），又设 m 为二次型 $2S$ 的 level，则对 Γ 的任意有限指标子群 $\Sigma \subseteq \Gamma(4m) \cap \Gamma$，由 Shimura 的结论出发可以证明下面同构关系：

$$J_{k,S}(\Sigma) \approx M_{k-\frac{l}{2}}(\Sigma) \otimes Th,$$

$$J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Sigma) \approx S_{k-\frac{l}{2}}(\Sigma) \otimes Th.$$

由此结合 Siegel 模形式空间上 Hecke 算子的研究及 $H_{k,S,\Gamma}(\Delta)$ 之性质，可以得到

命题2 设 $k > 2n + l$，则在 $J_{k,S}(\Sigma)$ 上有

$$H_{k,S,\Sigma}(\Delta) = \sum_{A \in \Sigma \backslash p(\Delta)/\Sigma} T_{k-\frac{l}{2},\Sigma}(A) \otimes \sum_{\zeta \in \mathbf{Z}^{2(l,n)}/p^{-1}(A) \cap \Delta/\mathbf{Z}^{2(l,n)}} |\mathbf{Z}^{2(l,n)} \backslash \mathbf{Z}^{2(l,n)} \zeta \mathbf{Z}^{2(l,n)}| U_S(\zeta),$$

其中 $T_{k-\frac{l}{2},\Sigma}(A)$ 为$M_{k-\frac{l}{2}}(\Sigma)$上与双边陪集 $\Sigma A \Sigma$ 对应的 Hecke 算子。

$$P: (A, x, K) \longmapsto A$$

为从 Jacobi 群 $G_{\mathbb{Q}}^{(n,l)}$ 到辛群 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Q})$ 的典则投影。

由此利用 $H_{k,S,\Gamma}(\Delta)$ 的一些性质可得

定理2（迹公式） 设 $k > 2n + l$，

$$\mathrm{tr}(H_{k,S,\Gamma}(\Delta), J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma))$$

$$= |\Sigma \backslash \Gamma|^{-1} \sum_{A \in \Sigma \backslash P(\Delta)/\Sigma} \varepsilon_l(A)^{-1} \mathrm{tr}(T_{k-\frac{l}{2},\Sigma}(A), S_{k-\frac{l}{2}}(A)) g_S(\Delta, A),$$

其中 $\varepsilon_l(A)$ 为一个仅与 A, l 有关的常数，它与 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Q})$ 的双覆盖（见文献[6]）有关，特别当 $2 | l$ 时，$\varepsilon_l(A) = 1$。

$$g_S(\Delta, A) = \sum_{\zeta \in \mathbf{Z}^{2(l,n)} \backslash p^{-1}(A) \cap \Delta/\mathbf{Z}^{2(l,n)}} |\mathbf{Z}^{2(l,n)} \backslash \mathbf{Z}^{2(l,n)} \zeta \mathbf{Z}^{2(l,n)}| \varepsilon_l(A) \mathrm{tr}(U_S(\zeta), Th).$$

由于 $\mathrm{tr}U_3(\zeta)$ 是可计算的，这个公式将 Jacobi 形式迹公式的计算转化为对 Siegel 模形式迹公式的计算，这就大大简化了问题的复杂性．而且利用 Siegel 模形式的许多研究结果推出相应的有关 Jacobi 形式的结果． 这从另一个侧面也反映了 Jacobi 形式与 Siegel 模形式之间密切联系．

注　在 $n = l = 1$ 时，文献[2]也有同样的结果．

作为定理的一个推论，有下面维数公式:

推论　设 $\Gamma \subseteq \Gamma(4m)$ 且 $k > 2n + l$，则

$$\dim J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma) = (\det 2S)^n \dim S_{k-\frac{l}{2}}(\Gamma).$$

对 $\dim S_{k-\frac{l}{2}}(\Gamma)$ 的研究已有了许多结果，因此这个推论使得我们在很多情况下可给出 $J_{k,S}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma)$. 的精确维数．

致谢　作者深深地感谢导师陆洪文教授所给予的精心指导和热情帮助．

参 考 文 献

[1] Ziegler, C., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1989, 59: 191—224.
[2] Skoruppa, N. P., Zagier, D., *J. für Math.*, 1989, 393: 168—198.
[3] Skoruppa, N. P., Zagier, D., *Invent. Math.*, 1988, 94: 113—146.
[4] Eichler, M., *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1984, 54: 35—48.
[5] Arakawa, T., *RIMS Kokyuroku*, 1984, (513): 154—165.
[6] Shimura, G., *Acta Math.*, 1978, 141: 35—71.