中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 2 期: 281～288
SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

多 Clifford 分析的 Cauchy-Riemann 方程

王海燕

天津职业技术师范大学理学院, 天津 300222
E-mail: whaiyan@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2016-01-04; 接受日期: 2017-07-18; 网络出版日期: 2017-12-29
国家自然科学基金 (批准号: 11601390 和 11526154) 和天津职业技术师范大学校级项目 (批准号: KYQD14041 和 KJ15-18) 资助项目

摘要 多 Clifford 变量的分析理论是多复变函数论在非交换领域的推广. 本文给出了非齐次 Cauchy-Riemann 方程具有紧支集解的微分相容条件及解的具体积分表达式, 并证明了多 Clifford 分析理论中的正则函数具有 Hartogs 现象. 这些结果将推广多复变中相应结果.

关键词 多变量 Clifford 分析 Cauchy-Riemann 方程 微分相容条件

MSC (2010) 主题分类 30G35, 32A26

1 引言

多 Clifford 分析是多复变理论向非交换领域的推广. 多 Clifford 分析研究函数

$$f : \Omega \subset \mathcal{H}^n \to (\mathbb{R}_{0,m})^k,$$

其中 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{m+1}$, Ω 是 $\mathcal{H}^n$ 中的开集. 多 Clifford 分析中正则函数是指被一族经典的 Dirac 算子 D_j 所零化的函数, 其中 D_j $(j = 1, \dots, n)$ 是 $\mathcal{H}^n$ 中第 j 个 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{m+1}$ 中相应的 Dirac 算子. 特别地, 当 $m = 1$ 时, $\mathcal{H} = \mathbb{R}_{0,1} = \mathbb{C}$, 所研究的函数是

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k,$$

而相应的 Dirac 算子为

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}.$$

在多 Clifford 分析中, 我们将研究非齐次 Cauchy-Riemann 方程组. 正如单复变在高维空间的推广产生了四元数理论和 Clifford 分析, 多复变[1] 在高维的推广产生了多四元数理论和多 Clifford 分析. 在多四元数和多 Clifford 分析函数论中, Cauchy-Riemann 方程组是超定的方程组, 其解产生 Hartogs

英文引用格式: Wang H Y. The Cauchy-Riemann equation in Clifford analysis of several variables (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 281–288, doi: 10.1360/N012016-00006

现象, 相应的非齐次 Cauchy-Riemann 方程组是研究的核心内容. 研究方法有两种. 第一种方法是经典的方法, 来自于代数几何. 该方法利用 Hilbert Syzygy 定理构造 Cauchy-Riemann 复形, 给出多 Dirac 算子的分解表达式和 Cauchy-Riemann 方程组所满足的相容性条件. 例如, 文献 [2–8] 给出了多四元数、低维多 Clifford 分析中 Cauchy-Riemann 方程组所满足的相容性条件. 利用代数几何的方法, 文献 [9,10] 深入地研究了多四元数分析, 该方法需要借助于 Cauchy-Fueter 复形中的第三个算子. 第二种方法是将多复变的方法代入到多四元数理论和多 Clifford 分析. 该方法由 Pertici[11] 首先引入并给出了多四元数情形下的非齐次 Cauchy-Riemann 方程的相容性条件, 其不同于利用代数几何方法得到的相容性条件. 该方法的优点在于, 可直接写出非齐次 Cauchy-Riemann 方程具有紧支集解的相容条件而不需要借助于第三个算子. Marmolejo-Olea 和 Mitrea[12] 将 Pertici 的结果从四元数推广到向量情形. Ren 和本文作者在文献 [13] 中建立了多 Clifford 分析中的 Bochner-Martinelli 积分公式, 并运用 Pertici 的方法给出了多变量 Clifford 分析中非齐次 Cauchy-Riemann 方程具有紧支集解的积分相容性条件, 并由此导出相应正则函数的 Hartogs 现象.

本文继续研究多 Clifford 分析中的非齐次 Cauchy-Riemann 方程, 并给出了该方程具有紧支集解的具体表达式及微分相容条件, 在该条件下同样推导出相应正则函数的 Hartogs 定理. 这些结果将推广多复变中相应结果.

2 Clifford 分析

设 $e_1, e_2, \dots, e_m$ 是 m 维实向量空间 $\mathbb{R}^m$ 上的标准正交基. 在其中引入乘法运算满足

$$e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}e_0, \quad i,j = 1,\dots,m.$$

在该乘法下, 它们生成了可结合的 Clifford 代数[14] $\mathbb{R}_{0,m}$.

通常我们将 e_0 等同于实数 1, 因而实数空间 $\mathbb{R}$ 可以视为 Clifford 代数 $\mathbb{R}_{0,m}$ 的子空间, 而且 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的元素可以看成一个 Clifford 数:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \equiv \sum_{i=0}^{m} x_ie_i.$$

Clifford 代数中具有共轭运算满足

$$\begin{cases} \bar{e}_0 = e_0, \\ \bar{e}_i = -e_i, \quad i = 1,\dots,m, \\ \overline{e_ie_j} = \bar{e}_j\bar{e}_i. \end{cases}$$

对于任意元素 $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, 其共轭为

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{m} x_i\bar{e}_i.$$

由于

$$|x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x = \sum_{i=0}^{m} x_i^2,$$

因而, 任意 $x \in \mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$ 具有逆元素

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}.$$

Clifford 分析中研究的算子是 Dirac 算子[14,15]

$$D=\sum_{i=0}^{m}e_i\partial_i.$$

对于任意 Clifford 值函数 $f:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}_{0,m}$, 我们将其表示为

$$f(x)=\sum_{A}f_A(x)e_A,$$

其中 $f_A(x)$ 是实值函数, Dirac 算子作用在 f 上有如下定义:

$$Df(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{A}\partial_i f_A(x)e_ie_A,\quad f(x)D=\sum_{i=0}^{m}\sum_{A}\partial_i f_A(x)e_Ae_i.$$

相应的共轭算子定义为

$$\overline{D}=\sum_{i=0}^{m}\overline{e}_i\partial_i.$$

空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中 Dirac 算子将 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中 Laplace 算子线性化, 即

$$\Delta=D\overline{D}=\overline{D}D.$$

Dirac 算子 D 的基本解 (称为 Cauchy 核) 具有显示表达式

$$E(y-x)=\frac{\overline{y-x}}{\omega_{m+1}|y-x|^{m+1}},$$

其中,

$$\omega_{m+1}=\frac{2\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中单位球面的面积.

在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中, 体积测度记为

$$dv_y=dy_0\wedge\cdots\wedge dy_m.$$

3 非齐次 Cauchy-Riemann 方程

本节采用纯分析的方法给出多 Clifford 分析中非齐次 Cauchy-Riemann 方程具有紧支集解的微分相容性条件. Clifford 分析的非交换性导致该条件不同于多复变中相应条件.

在 $\mathcal{H}^n$ 中, 记

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathcal{H}^n,$$

其中,

$$x_l=(x_{l0},x_{l1},\dots,x_{lm})\in\mathbb{R}^{m+1}=\mathcal{H}.$$

现在引入一族 Dirac 算子

$$D_l=\sum_{i=0}^{m}e_i\partial_{x_{li}}.$$

定义 3.1 设 U 是 $\mathcal{H}^n$ 中的开集, $f\in C^1(U,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$. 若

$$D_1f=\cdots=D_nf=0,$$

则称 f 是 U 中的 (多) 正则函数.

本节以及下节所研究的函数为

$$f:\mathcal{H}^n\to(\mathbb{R}_{0,m})^k,$$

其中 $\mathcal{H}=\mathbb{R}^{m+1}$.

定理 3.1 设 $n>1$, $s\geqslant 3$, 并且 $g_1,g_2,\ldots,g_n\in C_0^s(\mathcal{H}^n,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$, 则下面的论断是等价的:

(1) 方程组

$$D_lf=g_l,\quad l=1,\ldots,n \tag{3.1}$$

有解 $f\in C_0^s(\mathcal{H}^n,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$, 并且解可表示为

$$f(x):=-\int_{\mathbb{R}^{m+1}}E(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1};$$

(2) 对任意 $p,j=1,\ldots,n$, 下式成立:

$$D_j\overline{D}_pg_p=\Delta_pg_j. \tag{3.2}$$

进一步, 当上面的任一条件成立时, 解在 $\mathcal{H}^n\setminus(\mathrm{supp}g_1\cup\cdots\cup\mathrm{supp}g_n)$ 的无界连通分支上为 0.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 若方程 (3.1) 有解 f, 即 $D_pf=g_p$, 则

$$D_j\overline{D}_pg_p=D_j\overline{D}_pD_pf=D_j\Delta_pf=\Delta_pD_jf=\Delta_pg_j.$$

(2)$\Rightarrow$(1) 令

$$f(x):=-\int_{\mathbb{R}^{m+1}}E(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}. \tag{3.3}$$

我们来验证其满足方程 (3.1).

设 $K(y_1-x_1)$ 为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中 Laplace 算子 Δ_{y_1} 的基本解, 也就是,

$$K(y_1-x_1)=\frac{1}{(1-m)\omega_{m+1}|y_1-x_1|^{m-1}}.$$

由 $\overline{D}_{y_1}K(y_1-x_1)=E(y_1-x_1)$ 可得

$$\begin{aligned}f(x)&=-\int_{\mathbb{R}^{m+1}}\overline{D}_{y_1}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}\\&=\int_{\mathbb{R}^{m+1}}\overline{D}_{x_1}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}.\end{aligned}$$

现在考虑 g_1 的 Newton 位势

$$w(x_1,x'):=\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}.$$

由 Newton 位势的性质 (参见文献 [16, 第 54 页]) 得到

$$\partial_{x_{1i}}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}=\int_{\mathbb{R}^{m+1}}\partial_{x_{1i}}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}.$$

这就意味着

$$f(x)=\overline{D}_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)g_1(y_1,x')dv_{y_1}. \tag{3.4}$$

另外, 我们还知道 $g_1(x_1,x')$ 的 Newton 位势 $w(x_1,x')$ 是 Poisson 方程的解, 即

$$\Delta_1 w(x_1,x')=g_1(x_1,x'),$$

这就有

$$D_1f(x)=D_1\overline{D}_1w(x_1,x')=g_1(x). \tag{3.5}$$

现在只需要说明对任意 $j=2,\dots,n$, $D_jf=g_j$ 成立. 对任意 $p\in\{2,\dots,n\}$, Δ_p 和 $K(y_1-x_1)$ 均为标量值并且 g_1 具有紧支集, 对 (3.4) 两边同时作用 Δ_p 便得到

$$\Delta_pf(x)=\overline{D}_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)(\Delta_pg_1(y_1,x'))dv_{y_1}.$$

再由假设 $D_1\overline{D}_pg_p=\Delta_pg_1$ 可推出

$$\Delta_pf(x)=\overline{D}_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)((D_1\overline{D}_pg_p)(y_1,x'))dv_{y_1}.$$

利用 $g_p,p=1,\dots,n$ 具有紧支集和

$$K(y_1-x_1)D_{y_1}=-K(y_1-x_1)D_{x_1}=-D_{x_1}K(y_1-x_1)$$

可得到

$$\begin{aligned}\Delta_pf(x)&=-\overline{D}_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}(K(y_1-x_1)D_{y_1})(\overline{D}_pg_p(y_1,x'))dv_{y_1}\\&=\overline{D}_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}(D_{x_1}K(y_1-x_1))(\overline{D}_pg_p(y_1,x'))dv_{y_1}\\&=\overline{D}_{x_1}D_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{m+1}}K(y_1-x_1)(\overline{D}_pg_p(y_1,x'))dv_{y_1}\\&=\overline{D}_pg_p(x).\end{aligned}$$

上式的最后一步利用的是 $\overline{D}_{x_1}D_{x_1}=\Delta_{x_1}$ 以及最后的积分刚好是由 $\overline{D}_pg_p$ 的 Newton 位势得到的. 这样对任意 $p=1,\dots,n$ 有 $\Delta_pf=\overline{D}_pg_p$, 再结合假设 $D_j\overline{D}_pg_p=\Delta_pg_j$ 可推出

$$\Delta_p(D_jf-g_j)=D_j\Delta_pf-\Delta_pg_j=D_j\overline{D}_pg_p-\Delta_pg_j=0.$$

对上式关于 p 进行求和, 可推出对任意 $j=1,\dots,n$, D_jf-g_j 在 $\mathcal{H}^n$ 中是调和的. 由

$$g_j\in C_0^s(\mathcal{H}^n,(\mathbb{R}_{0,m})^k),$$

通过 f 的定义式 (3.3) 可得到当 x' 足够大时, f 具有紧支集, 进而有 $D_jf-g_j\in C_0^s(\mathcal{H}^n,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$. 由于调和函数 D_jf-g_j 在 x' 足够大的开集上为 0, 我们推知, 对任意 $j=1,\dots,n$, $D_jf=g_j$ 在 $\mathcal{H}^n$ 上成立.

最后, 我们来说明方程组 (3.1) 的解具有紧支集. 由 (3.1) 可知,

$$D_pf\mid_{\mathcal{H}^n\setminus(\mathrm{supp}g_1\cup\cdots\cup\mathrm{supp}g_n)}=0.$$

所以, f 在 $\mathrm{supp}g_1\cup\cdots\cup\mathrm{supp}g_n$ 的外面是多正则函数, 当然也是调和函数. 再从 f 的定义 (3.3), 我们发现当 $|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2$ 足够大时,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0.$$

由调和函数的唯一性定理便得到 f 在 $\mathcal{H}^n\setminus(\mathrm{supp}g_1\cup\cdots\cup\mathrm{supp}g_n)$ 的无界连通分支上为 0, 这就完成了定理的证明. □

4 Hartogs 定理

Hartogs 现象是多复变函数论的本质性质. 它说明, 在一个域中挖一个洞, 则全纯函数全部可以开拓到这个洞中, 所以, 在多复变函数论中, 不存在孤立奇点. 换句话说, 一个函数的奇点若存在, 则必成片, 且到边界点上. Hartogs [17] 定理最早由 Hartogs 于 1906 年利用多复变中 Cauchy 积分公式给出. 现在, 通常的证明是利用 Bochner-Martinelli-Koppelman 公式、非齐次 Cauchy-Riemann 方程具有紧支集解的可解性定理以及 Ehrenpreis 基本原理 (参见文献 [18,19]).

多 Clifford 分析可看成是多复变向非交换空间的推广. 正如多复变中的全纯函数、多 Clifford 分析中的正则函数一样具有 Hartogs 现象, 该定理强烈依赖于非齐次 Cauchy-Riemann 方程解的存在性定理.

定理 4.1 (Hartogs 定理) 设 $n>1$, U 为 $\mathcal{H}^n$ 中的连通开集, $M\subset U$ 为一个紧集并且 $U\setminus M$ 是连通的, 这样 $U\setminus M$ 上的任意多正则函数都可多正则地开拓到更大的域 U 上.

证明 假设 f 为 $U\setminus M$ 上的多正则函数, $\varphi\in C^\infty(U,\mathbb{R})$ 具有紧支集并且在 M 的一个邻域内为 1. 令

$$f_0:=(1-\varphi)f,\quad 在\ U\ 内. \tag{4.1}$$

显然, $f_0\in C^\infty(U,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$ 并且在 $U\setminus\mathrm{supp}\varphi$ 上为多正则函数. 再令

$$h_p:=\begin{cases}D_pf_0, & 在\ U\ 内,\\ 0, & 在\ \mathcal{H}^n\setminus U\ 内.\end{cases} \tag{4.2}$$

由 f_0 的定义, h_p 也可写成如下形式:

$$h_p=\begin{cases}D_pf_0, & 在\ \mathrm{supp}\varphi\ 内,\\ 0, & 在\ \mathcal{H}^n\setminus\mathrm{supp}\varphi\ 内.\end{cases} \tag{4.3}$$

显然, $h_p\in C_0^\infty(\mathcal{H}^n,(\mathbb{R}_{0,m})^k)$ 并且 $\mathrm{supp}h_p\subset\mathrm{supp}\varphi$.

由 (4.2) 可知, 在 U 上成立下式:

$$D_j\overline{D}_p h_p = D_j\overline{D}_p D_p f_0 = D_j\Delta_p f_0 = \Delta_p D_j f_0 = \Delta_p h_j.$$

显然, 在 U 外, $D_j\overline{D}_p h_p = \Delta_p h_j$ 也成立. 这就说明, h_p 满足相容性条件 (3.2). 由定理 3.1 可知方程组

$$D_p g = h_p, \quad p = 1, 2, \ldots, n$$

有解 $g \in C_0^\infty(\mathcal{H}^n, (\mathbb{R}_{0,m})^k)$, 并且 g 在 $\mathcal{H}^n \setminus (\mathrm{supp} h_1 \cup \cdots \cup \mathrm{supp} h_n)$ 的无界连通分支上成立. 由 (4.3) 可得

$$\mathrm{supp} h_p \subset \mathrm{supp}\varphi, \quad p = 1, \ldots, n,$$

这样

$$\mathcal{H}^n \setminus \mathrm{supp}\varphi \subset \mathcal{H}^n \setminus (\mathrm{supp} h_1 \cup \cdots \cup \mathrm{supp} h_n).$$

因此, g 在 $\mathcal{H}^n \setminus \mathrm{supp}\varphi$ 的无界连通分支 M_0 上为 0. □

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见与建议, 衷心感谢中国科学技术大学任广斌教授的良好建议.

参考文献

1 Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003
2 Eelbode D. Arbitrary complex powers of the Dirac operator on the hyperbolic unit ball. Ann Acad Sci Fenn Math, 2004, 29: 367–381
3 Palamodov V P. Hartogs phenomenon for systems of differential equations. J Geom Anal, 2014, 24: 667–686
4 Colombo F, Sabadini I, Sommen F, et al. Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra. Progress in Mathematical Physics, vol. 39. Boston: Birkhäuser, 2004
5 Colombo F, Souček V, Struppa D C. Invariant resolutions for several Fueter operators. J Geom Phys, 2006, 56: 1175–1191
6 Adams W W, Loustaunau P, Palamodov V P, et al. Hartog's phenomenon for polyregular functions and projective dimension of related modules over a polynomial ring. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1997, 47: 623–640
7 Adams W W, Berenstein C A, Loustaunau P, et al. Regular functions of several quaternionic variables and the Cauchy-Fueter complex. J Geom Anal, 1999, 9: 1–15
8 Sabadini I, Struppa D C, Sommen F, et al. Complexes of Dirac operators in Clifford algebras. Math Z, 2002, 239: 293–320
9 Wang W. On non-homogeneous Cauchy-Fueter equations and Hartogs' phenomenon in several quaternionic variables. J Geom Phys, 2008, 58: 1203–1210
10 王伟. 多四元变量的 k-Cauchy-Fueter 算子. 中国科学: 数学, 2015, 45: 1791–1810
11 Pertici D. Funzioni regolari di piú variabili quaternioniche. Ann Mat Pura Appl (4), 1988, 151: 39–65
12 Marmolejo-Olea E, Mitrea M. Harmonic analysis for general first order differential operators in Lipschitz domains. In: Progress in Mathematical Physics, vol. 34. Boston: Birkhäuser, 2004, 34: 91–114
13 Ren G B, Wang H Y. Theory of several paravector variables: Bochner-Martinelli formula and Hartogs theorem. Sci China Math, 2014, 57: 2347–2360
14 Brackx F, Delanghe R, Sommen F. Clifford Analysis. Research Notes in Mathematics, vol. 76. Boston: Pitman, 1982
15 Huang S, Qiao Y Y, Wen G C. Real and Complex Clifford Analysis. New York: Springer, 2005
16 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001
17 Hartogs F. Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen. Bayer Akad Wiss Philos-Hist Kl Sitzungsber, 1906, 36: 223–242
18 Hörmander L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. North-Holland Mathematical Library, vol. 7. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1990
19 Ehrenpreis L. A new proof and an extension of Hartog's theorem. Bull Amer Math Soc (NS), 1961, 67: 507–510

The Cauchy-Riemann equation in Clifford analysis of several variables

Haiyan Wang

Abstract The aim of this article is to extend the theory of several complex variables to the non-commutative realm. In this paper, we solve the non-homogeneous Cauchy-Riemann equation under the differential compatibility condition, find the explicit integral representation of the solution and derive the Hartogs theorem in Clifford analysis of several variables. This will generalize the corresponding results in several complex variables.

Keywords **Clifford analysis of several variables, Cauchy-Riemann equations, differential compatibility condition**

MSC(2010) **30G35, 32A26**

doi: 10.1360/N012016-00006