中国科学: 数学 2014 年 第 44 卷 第 8 期: 899～928
link.springer.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

切波框架的存在充分条件及其稳定性

江慎铭[①②]*, 江泽涛[③]

① 南京航空航天大学计算机科学与技术学院, 南京 210016;
② 南昌航空大学数信学院, 南昌 330063;
③ 桂林电子科技大学计算机科学与工程学院, 广西 541004
E-mail: jsm3000@sohu.com, Zetaojiang@126.com

收稿日期: 2013-10-20; 接受日期: 2014-03-01; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 61272216 和 61163048)、江西省教育厅科技基金 (批准号: GJJ11513)、航空创新基金 (批准号: CASC201102)、江西省科学技术合作 (批准号: 2010EAB01700) 和江西自然科学基金 (批准号: 20114BAB201035) 资助项目

摘要 2011 年, Kittipoom 等人引入了一类新的切波生成函数空间, 并指出此空间拥有许多优秀的性质, 例如, 该空间在平方可积函数空间中稠密, 由该空间中元素生成的切波框架拥有强齐次逼近性质等. 本文的主要目的是研究由 Kittipoom 等人引入的切波生成函数空间中的元素生成切波框架的充分条件及由该空间中的元素生成的切波框架的稳定性. 具体而言, 首先参考由 Dahlke 等人引入的切波群的定义将 Kittipoom 等人引入的切波群的定义进行适当调整, 使得由 Kittipoom 等人引入的切波生成函数空间中每个元素都是可允许的; 其次得到由该切波生成函数空间中任意一个元素和任意一个相对分离的稠密点列可形成一个切波框架; 最后证明这些框架在时间、尺度和剪切参数或生成函数发生小扰动时仍然形成切波框架. 这些结论使得切波框架在工程应用方面有着极大的灵活性和实用性.

关键词 切波群 切波 切波变换 切波框架

MSC (2010) 主题分类 42C15, 94A12

1 引言及主要结果

经典小波仅能很好地处理点状奇异性, 高维空间中往往会出现复杂的奇异性, 例如, 包含曲线边缘比较多的图像, 这些边缘便具有线状奇异性, 而非点状奇异性. 因此用经典小波处理高维问题, 一般得不到很好的效果. 高维空间的方向性还要求有关函数具有方向敏感性, 而经典小波函数方向敏感性也很差, 为此人们提出了不少非经典小波, 包括最初的脊波[1]、曲线波[2–6]、轮廓波[7]、复小波[8] 和条带波[9] 等脊波以及最近的切波[10–15] (shearlet) 等, 其中的切波具有诸多方面的优越性, 除了具有方向敏感性和最优逼近性质, 还能与多分辨分析联系在一起. 但是与其他非经典小波一样, 切波也不具有经典小波那样的正交性. 为了让不具有正交性的函数列完成重构任务, 框架理论在切波理论中得到了系统的应用. 小波框架已经研究得相当透彻, 而切波框架也出现了不少优秀的论文 [16–21]. 2011 年, Kittipoom 等人[15] 引入了一类新的切波生成函数空间 B_0 并指出空间 B_0 拥有许多优秀的性质, 例如, B_0 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中稠密, 由 B_0 中元素生成的连续切波变换属于 Amalgam 空间, 由 B_0 中的元素生成的切波框架拥有强齐次逼近性质 (AHP) 等. 但遗憾的是, 在文献 [15] 中没有回答 B_0 中的元素是否可允许, 也没有给出由 B_0 中的元素生成切波框架的充分条件, 更没有研究由 B_0 中的元素生成的切波

英文引用格式: Jiang S M, Jiang Z T. On sufficient conditions and stability of shearlet frame (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 899–928, doi: 10.1360/N012013-00160

框架的稳定性, 而这些在切波分析中有着重要的作用. 因此, 本文的主要目的是研究由 B_0 中的元素生成切波框架的充分条件及由 B_0 中的元素生成的切波框架的稳定性. 具体来讲, 本文根据文献 [22–24] 中有关切波群及切波变换的定义将文献 [15] 中切波群及切波变换的定义进行适当调整, 使得 B_0 中每个元素都是可允许的; 其次借用文献 [15, 25] 中的证明方法得到由 B_0 中任意一个元素和 S 中任意一个 Q_h- 稠和相对 Q_h- 分离集可形成一个切波框架; 最后证明这些框架在时间、尺度、剪切参数和生成函数发生小扰动时仍然形成切波框架. 这些结论使得切波框架在工程应用方面有着极大的灵活性和实用性. 本文的主要结果如下.

定理 1.1 如果 $\varphi \in B_0$, 那么存在 $h > 0$, 使得对 S 中任意相对 Q_h- 分离的和 Q_h- 稠点列 Γ, $\{\sigma(\gamma)\varphi\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个切波框架.

定理 1.2 设 $\phi \in B_0$. 如果 $\{\sigma(\gamma_n)\phi : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个切波框架，那么存在 $h > 0$, 使得

$$\{\sigma({\gamma'}_n\}\varphi_{{\gamma'}_n\in Q_h(\gamma_n),n\in\mathbb{Z}}$$

也是的一个切波框架.

定理 1.3 设 $\phi \in B_0$. 如果 $\{\sigma(\gamma)\phi : \gamma \in \Gamma\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个切波框架, 那么存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\{\sigma(\gamma)\tilde{\phi} : \gamma \in \Gamma\}$$

也是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个切波框架, 其中 $\tilde{\phi}$ 满足

$$\|SH_\psi(\phi - \tilde{\phi})\|_{L^1(S)} + \|SH_{(\phi-\tilde{\phi})}\psi\|_{W_S(C,L^1)} < \varepsilon,$$

且 ψ 是 B_0 中的任意元素.

本文结构如下: 第 2 节给出相关的定义和一些已知结果; 第 3 节给出定理 1.1–1.3 的证明.

2 定义和一些已知结果

为了表述方便, 我们用 $\#E$ 表示集合 E 的基数, $|E|$ 表示集合 E 的 Lebesgue 测度. 为了研究切波框架存在充分性条件和稳定性, 我们先引入下面一些相关定义和引理.

定义 2.1 [15] B_0 表示由满足下列条件的 Schwartz 函数构成的空间,

(i) $|\phi(x)| \leqslant \frac{C}{(1+\|x\|_\infty^2)^\alpha}$, 其中 $C > 0$ 且 $\alpha > \frac{7}{2}$;

(ii) $\mathrm{supp}\hat{\phi} \in \{[-a_1, -a_0] \cup [a_0, a_1]\} \times [-b, b]$, $0 < a_0 < a_1$, $b > 0$ 且

$$|\hat{\phi}(\xi)| \leqslant \frac{\xi_1^{2\beta}}{(1 + \|\xi\|_\infty)^{2\beta}},$$

其中 $\beta > 4\alpha + 6$.

注 2.1 B_0 类似于 Feichtinger 等人 [26] 给出的关于 Gabor 系统的函数空间 S_0, 其中包含非常好的切波原子, 这在切波分析中非常有用 [15]. 为了使由 B_0 中任意一个元素与 $S = \mathbb{R}\backslash\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 中任意一个 Q_h- 稠和相对 Q_h- 分离集可形成一个切波框架, 本文将文献 [15] 中 B_0 定义中的 $\alpha > \frac{3}{2}, \beta > 4\alpha+2$ 调整为 $\alpha > \frac{7}{2}, \beta > 4\alpha + 6$.

定义 2.2 [20] 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 定义

$$C_\phi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\phi}(\xi_1, \xi_2)|^2}{\xi_1^2} d\xi_1 d\xi_2,$$

ϕ 称为是可允许的, 如果 $C_\phi < \infty$.

定义 2.3 如果在集合 $S = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 上定义运算

$$(a,s,t)\cdot(a',s',t') = (aa', s'+s\sqrt{|a'|}, t'+B_{s'}A_{a'}t),$$

那么 $(S,\cdot)$ 构成一个局部紧群, 称作切波群, 其中

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{sgn}(a)\sqrt{|a|} \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, $(1,0,0)$ 为群的单位元并且 (a,s,t) 的逆元为 $(\frac{1}{a}, \frac{-s}{\sqrt{|a|}}, -B_{\frac{-s}{\sqrt{|a|}}}A_{\frac{1}{a}}t)$.

注 2.2 为了使定义 2.1 中给出的 B_0 中任意元素是可允许的, 本文根据文献 [22–24] 中 S 的定义将文献 [15] 中 $S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 调整为 $S = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, 若无特别说明, 本文均约定 $S = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. 显然, 当 $a > 0$ 时, 本文定义 2.3 中定义的切波群与文献 [15] 中定义的切波群是一致的.

定义 2.4 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的函数族

$$\{\sigma(a,s,t)\phi = |a|^{\frac{3}{4}}\phi(B_sA_a\cdot - t) : (a,s,t) \in S\}$$

称为切波系统. 函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 关于 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 的连续切波变换 $SH_\phi f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 定义为

$$SH_\phi f(a,s,t) = \langle f, \sigma(a,s,t)\phi \rangle.$$

注 2.3 当 $S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$,

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

时, 定义 2.4 与文献 [15] 中的相应定义一致.

定义 2.5 对任意 $h > 0$, 如果定义 $Q_h = \{[\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{h}{2}}) \cup [-\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}, -\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}})\} \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})^2$, 那么, 对任意 $(x,y,z) \in S$ 关于 Q_h 的邻域 $Q_h(x,y,z)$ 定义如下:

$$Q_h(x,y,z) = (x,y,z)\cdot Q_h = \{(ax, s+y\sqrt{|a|}, t+B_sA_az) : (a,s,t) \in Q_h\}.$$

注 2.4 为了叙述方便，本文用 $E^h_{j,k,m}$ 表示 $Q_h(\mathrm{e}^{jh}, hk\mathrm{e}^{-h/4}, h\mathrm{e}^{-h/2}m)$.

定义 2.6 设 $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i\in I}$ 为 S 中点列,

(i) 对任意 $h > 0$, Γ 称作在 S 中 Q_h- 稠, 如果 $\bigcup_{i\in I} Q_h(\gamma_i) = S$;

(ii) 对任意 $h > 0$, Γ 称作 Q_h- 分离的, 如果

$$Q_h(\gamma_i) \cap Q_h(\gamma_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Γ 称作相对 Q_h- 分离的, 如果 Γ 可以表示有限个 Q_h- 分离集的并.

注 2.5 当 $Q_h = [\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{h}{2}}) \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})^2, S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 时, 定义 2.5 和 2.6 与文献 [15] 中的相应定义是一致的.

定义 2.7 Hilbert 空间 H 中的点列 $\{f_j : j \in J\}$ 称作 H 的一个框架, 如果存在 $0 < A \leqslant B < \infty$, 使得对任意 $f \in H$, 有

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

A 和 B 分别称为框架下界和框架上界.

因为

$$\mu(Q_h) = \int_{\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}} \leqslant |a| \leqslant \mathrm{e}^{\frac{h}{2}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} dsdt \frac{1}{|a|} da = 2h^4,$$

所以, 由文献 [15] 中有关上 (下) 切波密度的论述, 我们给出 $S = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 上的上 (下) 切波密度的定义.

定义 2.8 如果 Γ 是 S 中一个离散子集, 那么, Γ 的上切波密度定义为

$$D^+(\Gamma) = \limsup_{h\to+\infty} \sup_{(x,y,z)\in S} \frac{\#(\Gamma \cap Q_h(x,y,z))}{2h^4},$$

Γ 的下切波密度被定义为

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{h\to+\infty} \inf_{(x,y,z)\in S} \frac{\#(\Gamma \cap Q_h(x,y,z))}{2h^4}.$$

定义 2.9 关于 S 上左不变 Haar 测度 $d\mu_S(a,s,t) = \frac{da}{|a|}dsdt$ 的空间 $L^1(S)$ 定义为

$$L^1(S) = \left\{ f : \iiint_S |f(a,s,t)| d\mu_S(a,s,t) < \infty \right\}.$$

参考文献 [15, 定义 3.1], 下面给出 $W_S(L^\infty, L^1)$ 和 $W_S(C, L^1)$ 的定义.

定义 2.10 Amalgam 空间 $W_S(L^\infty, L^1)$ 和 $W_S(C, L^1)$ 定义如下:

$$W_S(L^\infty, L^1) = \{f \in L^1(S) : \|f\|_{W_S(L^\infty,L^1)} < \infty\},$$

其中范数 $\|f\|_{W_S(L^\infty,L^1)}$ 定义如下:

$$\|f\|_{W_S(L^\infty,L^1)} := \sum_{(j,k,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^2} \|f \cdot \chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty.$$

Amalgam 空间 $W_S(C, L^1) = W_S(L^\infty, L^1) \cap C(S)$.

注 2.6 当 $Q_1 = [\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, $S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 时, 定义 2.10 与文献 [15, 定义 3.1] 是一致的.

由定义 2.5 可知, 当 $(a,s,t) \in Q_h$ 时, $|a| \in [\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{h}{2}})$. 这与文献 [15, 引理 2.6] 中 $(a,s,t) \in Q_h$ 时, $a \in [\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}}, \mathrm{e}^{\frac{h}{2}})$ 形式上是一致的, 因此, 通过观察我们只要适当添加绝对值就能运用文献 [15, 引理 2.6] 中相同的证明方法, 并且证明过程几乎逐句相同得到下面的引理 2.1.

引理 2.1 如果 $h > 0$, $h' > 0$ 且令

$$X = \{(\mathrm{e}^{jh}, hk\mathrm{e}^{-h/4}, h\mathrm{e}^{-h/2}m) : j,k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2\},$$

那么, 下列说法均成立,

(i) X 在 S 中是 Q_h- 稠的;

(ii) $Q_{h'}(x,y,z)$ 至多与

$$C_h^{h'}=\left(\frac{h'}{h}+2\right)\left[\left(\frac{h'}{h}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}+1\right]\left[\left(\frac{h'}{h}+1\right)\mathrm{e}^{h}+1\right]\left[\left(\frac{h'}{h}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{3h}{4}}+1\right]$$

个形如 $E_{j,k,m}^h$ 的不同元素相交.

引理 2.2　设 $h>0$. 如果 $Q_h(x,y,z)\cap Q_h(x',y',z')\neq\emptyset$, 那么,

$$(x,y,z)\subset Q_{(2h+h^2)\mathrm{e}^{h/2}}(x',y',z').$$

证明　如果取 $(b,c,d)\in Q_h(x,y,z)\cap Q_h(x',y',z')$, 那么, 存在 $(a,s,t),(a',s',t)\in Q_h$ 使得

$$(b,c,d)=(x,y,z)\cdot(a,s,t)=(x',y',z')\cdot(a',s',t').$$

因此, 我们有

$$(x',y',z')^{-1}\cdot(x,y,z)=(a',s',t')\cdot(a,s,t)^{-1}=\left(\frac{a'}{a},\frac{s'-s}{\sqrt{|a|}},B_{-s/\cdot\sqrt{|a|}}A_{1/a}(t'-t)\right)\subseteq Q_{(2h+h^2)\mathrm{e}^{h/2}}.$$

这表明, $(x,y,z)\subset Q_{(2h+h^2)\mathrm{e}^{h/2}}(x',y',z')$. 证毕. □

引理 2.3　如果 Γ 是 S 中的离散子集, 那么, 下列说法等价,

(i) $D^+(\Gamma)<\infty$;

(ii) 存在 $h>0$ 使得 $\sup_{x,y,z)\in S}\#(\Gamma\cap Q_h(x,y,z))<\infty$;

(iii) 对任意 $h>0$, 我们有 $\sup_{(x,y,z)\in S}\#(\Gamma\cap Q_h(x,y,z))<\infty$;

(iv) 存在 $h>0$, 使得 Γ 是相对 Q_h- 分离的;

(v) 对任意 $h>0$, Γ 是相对 Q_h- 分离的.

证明　我们先证明 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). 与证明引理 2.1 的理由一样, 我们能运用文献 [15, 命题 2.7] 中完全相同的证明方法容易证得 (i) $\Leftrightarrow$ (ii). (iii) $\Rightarrow$ (ii) 是显然的.

下证 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 设存在 $h>0$ 使得

$$R=\sup_{(x,y,z)\in S}\#(\Gamma\cap Q_h(x,y,z))<\infty.$$

则由引理 2.1(ii) 可知, 对任意 $h'>0$, 存在 $C_h^{h'}>0$ 使得 $Q_{h'}(x,y,z)$ 至多被 $C_h^{h'}$ 个形如 $E_{j,k,m}^h$ 的不同元素的并所覆盖. 因此,

$$\sup_{(x,y,z)\in S}\#(\Gamma\cap Q_{h'}(x,y,z))\leqslant C_h^{h'}\sup_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\#(\Gamma\cap E_{j,k,m}^h)\leqslant C_h^{h'}R<\infty.$$

其次证明 (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v). (v) $\Rightarrow$ (iv) 显然.

下证 (i) $\Rightarrow$ (v). 如果 $D^+(\Gamma)<\infty$ 和 $h>0$, 那么, 我们有

$$R=\sup_{(x,y,z)\in S}\#(\Lambda\cap Q_h(x,y,z))<\infty.$$

对任意固定的 $(x,y,z)\in\Gamma$, 如果满足 $(x',y',z')\in\Gamma$,

$$Q_h(x,y,z)\cap Q_h(x',y',z')\neq\emptyset.$$

那么, 由引理 2.2, 我们有

$$(x',y',z')\subset Q_{(2h+h^2)e^{h/2}}(x,y,z).$$

由引理 2.1(ii) 可知, 存在 N 使得 $Q_{(2h+h^2)e^{h/2}}(x,y,z)$ 至多被 N 个形如 $E^h_{j,k,m}$ 不同元素所覆盖. 然而, 每个 $E^h_{j,k,m}$ 至多包含 Γ 中 R 个点. 因此, $Q_{(2h+h^2)e^{h/2}}(x,y,z)$ 至多包含 Γ 中 NR 个点.

因此, 对任意 $(x,y,z)\in\Gamma$, $Q_h(x,y,z)$ 至多与 NR 个 $Q_h(x',y',z')$ 相交, 这里 $(x',y',z')\in\Gamma$. 由 Feichtinger 和 Grobner 不相交原则 (参见文献 [27, 引理 2.9]), Γ 至多能被分成 NR 个点列 $\Gamma_1,\dots,\Gamma_{NR}$, 其中每个 Γ_i 是 Q_h- 分离的.

下证 (iv) $\Rightarrow$ (i). 设 $\Gamma=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N$, 其中每个 Γ_i 是 Q_h- 分离的. 选择 $\delta>0$ 使得 $0<((2\delta+\delta^2)\delta)<h$. 如果 $(a,s,t),(a',s',t')\in\Gamma_i$ 被包含在 $Q_\delta(x,y,z)$ 中, 那么, 由引理 2.2, 我们有

$$\begin{aligned}&(x,y,z)\in Q_{(2\delta+\delta^2)\delta}(a,s,t)\subset Q_h(a,s,t),\\&(x,y,z)\in Q_{(2\delta+\delta^2)\delta}(a',s',t')\subset Q_h(a',s',t').\end{aligned}$$

因此, 根据 Γ_i 是 Q_h- 分离的, 我们有 $(a,s,t)=(a',s',t')$, 这表明, 每个 $Q_\delta(x,y,z)$ 至多包含 Γ_i 中一个点. 由此可知,

$$\sup_{(x,y,z)\in S}\#(\Gamma\cap Q_\delta(x,y,z))\leqslant N<\infty,$$

即 $D^+(\Gamma)<\infty$. 证毕. □

与证明引理 2.1 的理由一样, 我们能运用文献 [15, 定理 5.1(i)、引理 3.3 和 3.4] 中的证明方法, 并且证明过程几乎逐句相同得到下面的引理 2.4–2.6.

引理 2.4 如果 $f,\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 且满足定义 2.1(i) , 那么,

$$|SH_\phi(a,s,t)|\leqslant C|a|^{\frac34}\frac{\max\{1,d^2\}}{[1+\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\|_\infty^2]^{\alpha-\frac12}},\quad\forall\,(a,s,t)\in S,$$

其中

$$d^2=\left(2+\frac{s^2}{|a|}\right)\cdot\max\left\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{a^2}\right\}.$$

引理 2.5 如果 $f,\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 且满足定义 2.1(ii), 那么,

$$|SH_\phi(a,s,t)|\leqslant C|a|^{\frac34}\frac{|a|^{\frac{3\beta}{2}}}{(1+|a|^2)^\beta(\sqrt{|a|}+|s|)^\beta},\quad\forall\,(a,s,t)\in S.$$

引理 2.6 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 是一个非零函数且 Γ 是 S 中的离散子集. 如果 $\{\sigma(\gamma)\phi,\gamma\in\Gamma\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一个 Bessel 点列, 那么, $D^+(\Gamma)<\infty$.

为了证明本文的结果, 我们还需要下面两个引理.

引理 2.7 如果 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 是可允许的且 $f,g\in L^2(\mathbb{R}^2)$, 那么,

$$\iiint_S SH_\phi f(a,s,t)\overline{SH_\phi g(a,s,t)}d\mu_S(a,s,t)=C_\phi\langle f,g\rangle.\tag{2.1}$$

注 2.7 由极化恒等式, (2.1) 等价于

$$\iiint_S|SH_\phi f(a,s,t)|^2d\mu_S(a,s,t)=C_\phi\|f\|_2^2.$$

证明

$$\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d\mu_S(a,s,t) = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} |\langle \hat{f}, \hat{\phi}_{ast}\rangle|^2 d\mu_S(a,s,t)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} |a|^{-\frac{3}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\langle \xi, A_a^{-1}B_s^{-1}t\rangle} d\xi \right|^2 \frac{da}{|a|} ds dt.$$

设 $F_{as}(\xi) = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)}$, 则

$$\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 \frac{da}{|a|} ds dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |a|^{-\frac{3}{2}} |\overset{\vee}{F}_{as}(A_a^{-1}B_s^{-\mathrm{T}}t)|^2 dt \right] \frac{da}{|a|} ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\overset{\vee}{F}_{as}(t)|^2 dt \right] \frac{da}{|a|} ds = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |F_{as}(t)|^2 dt \right] \frac{da}{|a|} ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)|^2 d\xi \right] \frac{da}{|a|} ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)|^2 \frac{da}{|a|} ds \right] d\xi.$$

当 $\xi_1 \neq 0$ 时, 设 $u_2 = -\frac{s\xi_1}{|a|} + \frac{\xi_2}{\sqrt{|a|}}$, 则 $ds = -\frac{|a|}{\xi_1} du_2$. 因此, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)|^2 \frac{da}{|a|} ds = \int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\xi_1}{a}, -\frac{s\xi_1}{|a|} + \frac{\xi_2}{\sqrt{|a|}} \right) \right|^2 ds \frac{da}{|a|} = \int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\phi}(\frac{\xi_1}{a}, u_2)|^2 du_2 da}{|\xi_1|}.$$

又设 $u_1 = \frac{\xi_1}{a}$, 则 $da = -\frac{a^2}{\xi_1} du_1$. 因此, 我们也有

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\phi}(B_s^{-\mathrm{T}}A_a^{-1}\xi)|^2 \frac{da}{|a|} ds = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\phi}(u_1,u_2)|^2 du_2 du_1}{u_1^2} = C_\phi, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}^2.$$

这表明,

$$\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d\mu_S(a,s,t) = C_\phi \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = C_\phi \|f\|_2^2.$$

引理 2.8 [25] 设 $\{g_n : n \in I\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个框架且框架上下界分别为 B 和 A. 如果 $\{h_n : n \in I\} \subset H$ 且满足

$$\sum_{n\in I} |\langle f, g_n - h_n\rangle|^2 \leqslant \Delta \|f\|_2^2,$$

其中 $\Delta < A$ 是常数, 那么, $\{h_n : n \in I\}$ 也是 Hilbert 空间 H 的一个框架且框架上下界分别为 $(B^{\frac{1}{2}} + \Delta^{\frac{1}{2}})^2$ 和 $(A^{\frac{1}{2}} - \Delta^{\frac{1}{2}})^2$.

3 主要结果的证明

为了证明本文的主要结果, 我们还需要引理 3.1–3.11.

引理 3.1 (i) 如果 $f, \phi \in B_0$, 那么, $SH_\phi f \in L^1(S)$;

(ii) 每个 B_0 中的元素都是可允许的;

(iii) 如果 $f, \phi \in B_0$, 那么, $SH_\phi f \in W_S(C, L^1)$;

(iv) 如果 $f, \phi \in B_0$, 那么, 我们有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|)^2 (1+\|m\|_\infty)^2 \left(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}\right)^3 (1+\mathrm{e}^j) \|SH_\varphi f \cdot \chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty < \infty.$$

证明 (i) 的证明. 事实上, 由引理 2.4 和 2.5, 我们有

$$|SH_\phi f(a,s,t)| \leqslant C|a|^{\frac{3}{4}} \frac{(\max\{1,d^2\})^{\frac{1}{2}}}{[1+\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\|_\infty^2]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3\beta}{4}}}{(1+|a|^2)^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}}, \quad \forall\,(a,s,t)\in S.$$

因此,

$$\begin{aligned}\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)| d\mu_S(a,s,t) &\leqslant C\iiint_S \frac{(\max\{1,d^2\})^{\frac{1}{2}}}{[1+\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\|_\infty^2]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{(1+|a|^2)^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} d\mu_S(a,s,t)\\ &=: I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{0<|a|\leqslant 1} \frac{(\max\{1,d^2\})^{\frac{1}{2}}}{[1+\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\|_\infty^2]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{(1+|a|^2)^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} d\mu_S(a,s,t),\\ I_2 &= C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{1<|a|} \frac{(\max\{1,d^2\})^{\frac{1}{2}}}{[1+\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\|_\infty^2]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{(1+|a|^2)^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} d\mu_S(a,s,t).\end{aligned}$$

I_1 的估计. 因为 $0<|a|\leqslant 1$, 所以, 我们有

$$d^2 = \left(2+\frac{s^2}{|a|}\right)\cdot\max\left\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{a^2}\right\} = \frac{2a^2+s^2}{|a|^3} > 1.$$

因此,

$$\begin{aligned}1+\left\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\right\|_\infty^2 &\geqslant 1+\frac{\|t\|_\infty^2}{d^2\|A_a\|_\infty^2\|B_s\|_\infty^2} \geqslant 1+\frac{|a|^3\|t\|_\infty^2}{(2a^2+s^2)|a|(1+|s|)^2}\\ &\geqslant 1+\frac{a^2\|t\|_\infty^2}{(2a^2+s^2)(1+|s|)^2} \geqslant 1+\frac{a^2\|t\|_\infty^2}{2(1+|s|)^4}.\end{aligned}$$

这表明,

$$\begin{aligned}I_1 &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{0<|a|\leqslant 1} \frac{(\frac{2a^2+s^2}{|a|^3})^{\frac{1}{2}}}{[1+\frac{a^2\|t\|_\infty^2}{2(1+|s|)^4}]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{(1+|a|^2)^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} \frac{da}{|a|}dsdt\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{0<|a|\leqslant 1} \frac{\sqrt{2}(1+|s|)|a|^{-\frac{3}{2}}}{[1+\frac{a^2\|t\|_\infty^2}{2(1+|s|)^4}]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{(\sqrt{|a|}+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} \frac{da}{|a|}dsdt\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{0<|a|\leqslant 1} \frac{\sqrt{2}(1+|s|)|a|^{-\frac{3}{2}}[2(1+|s|)^4]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{[2(1+|s|)^4+a^2\|t\|_\infty^2]^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{|a|^{\frac{\beta}{4}}(1+\frac{|s|}{\sqrt{a}})^{\frac{\beta}{2}}} \frac{da}{|a|}dsdt\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{0<|a|\leqslant 1} \frac{2^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}|a|^{-\frac{3}{2}}(1+|s|)^{2\alpha}}{|a|^{a-\frac{1}{2}}(1+\|t\|_\infty^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}} \frac{|a|^{\frac{3(\beta+1)}{4}}}{|a|^{\frac{\beta}{4}}(1+|s|)^{\frac{\beta}{2}}} \frac{da}{|a|}dsdt\\ &= C2^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+\|t\|_\infty^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}dt\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|s|)^{\frac{\beta}{2}-2\alpha}}ds\int_{0<|a|\leqslant 1}|a|^{\frac{\beta}{2}-\alpha-\frac{5}{4}}da<\infty. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

I_2 的估计. 当 $|a|>1$ 且 $d^2=(2+\frac{s^2}{|a|})\cdot\max\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{a^2}\}=\frac{2|a|+s^2}{a^2}\leqslant 1$ 时, 我们有

$$1+\left\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\right\|_\infty^2 \geqslant 1+\frac{\|t\|_\infty^2}{\|A_a\|_\infty^2\|B_s\|_\infty^2} \geqslant 1+\frac{\|t\|_\infty^2}{a^2(1+|s|)^2},$$

这表明,

$$I_2 \leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+\|t\|_\infty^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}dt\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|s|)^{\frac{\beta}{2}-\alpha+\frac{1}{2}}}ds\int_{1<|a|}\frac{1}{|a|^{\frac{\beta}{4}-\alpha+\frac{3}{4}}}da<\infty. \tag{3.2}$$

当 $|a|>1$ 且 $d^2=(2+\frac{s^2}{|a|})\cdot\max\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{a^2}\}>1$ 时, 我们有

$$1+\left\|\frac{A_a^{-1}B_s^{-1}t}{\max\{1,d\}}\right\|_\infty^2\geqslant 1+\frac{\|t\|_\infty^2}{(2|a|+s^2)(1+|s|)^2},$$

这也表明,

$$I_2 \leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+\|t\|_\infty^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}dt\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|s|)^{\frac{\beta}{2}-2\alpha}}ds\int_{1<|a|}\frac{2^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{|a|^{\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+1}}da<\infty. \tag{3.3}$$

因此, 由 (3.1)–(3.3), 我们有 $SH_\phi f\in L^1(S)$.

(ii) 的证明. 事实上对任意 $\psi\in B_0$, 我们可以用 (i) 中的类似证明方法可证得

$$\iiint_S |SH_\psi\psi(a,s,t)|^2 d\mu_S(a,s,t)<\infty.$$

因此, 运用引理 2.7 中的证明方法易知是可允许的.

(iii) 的证明. 任取 $f,\phi\in B_0$, 由后面的引理 3.7 易知, $SH_\phi f\in C(S)$. 下面证明, 如果 $f,\phi\in B_0$, 那么,

$$\|SH_\phi f\|_{W_S(C,L^1)}=\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty=:T_1+T_2+T_3+T_4<\infty,$$

其中

$$T_1=\sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,$$

$$T_2=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,$$

$$T_3=\sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty\leqslant\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,$$

$$T_4=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty\leqslant\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty.$$

事实上, 如果任取 $(a,s,t)\in Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}m)$, 那么存在

$$(x,y,z)\in Q_1=\{[-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})\cup[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})\}\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2,$$

使得

$$(a,s,t)=(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}},\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}m)\cdot(x,y,z)=(x\mathrm{e}^j,y+k\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\sqrt{|x|},z+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}B_yA_am).$$

这表明,

$$\mathrm{e}^{j-\frac{1}{2}}\leqslant|a|\leqslant\mathrm{e}^{j+\frac{1}{2}},$$

$$
\begin{aligned}
&|k|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\leqslant |s|\leqslant |k|+\frac{1}{2},\\
&\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\|B_yA_xm\|_\infty-\frac{1}{2}\leqslant \|t\|_\infty\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\|B_yA_xm\|_\infty+\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

由此可知, 上面三个不等式与文献 [15, 定理 3.5] 证明过程中的三个关键不等式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{j-\frac{1}{2}}\leqslant a\leqslant \mathrm{e}^{j+\frac{1}{2}},\\
&|k|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\leqslant |s|\leqslant |k|+\frac{1}{2},\\
&\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\|B_yA_xm\|_\infty-\frac{1}{2}\leqslant \|t\|_\infty\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\|B_yA_xm\|_\infty+\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

相比较可知, 第二个和第三个不等式完全相同, 只是第一个不等式 a 中变为 $|a|$. 因此, 通过观察我们可以运用文献 [15, 定理 3.5] 中相同的证明方法, 并且证明过程几乎逐句相同得到下面的结果 (其中的 C 是引理 2.4 和 2.5 中的常数 C):

$$
\begin{aligned}
T_1&\leqslant C\Bigg(\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8})j}+1\Bigg)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&=C\Bigg(\frac{1}{\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8})}-1}+1\Bigg)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}},\\
T_2&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta+1}{4}j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\quad+C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta-2\alpha-1}{4}j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha+2)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{C}{\mathrm{e}^{\frac{\beta+1}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\frac{C}{\mathrm{e}^{\frac{\beta-2\alpha-1}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha+2)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{1}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}},\\
T_3&\leqslant C(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{2}+\frac{3}{8})j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}+C(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}\\
&=\frac{C(3\mathrm{e}+1)^2}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}+\frac{3}{8}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}+C(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}},\\
T_4&\leqslant C(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4})j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}=\frac{C(3\mathrm{e}+1)^2}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}.
\end{aligned}
$$

因此, 易知引理 3.1(iii) 的结论成立.

(iv) 的证明. 设

$$
\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|)^2(1+\|m\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\cdot\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty=:T_1'+T_2'+T_3'+T_4',
$$

其中

$$
T_1'=\sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}(1+|k|)^2(1+\|m\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,
$$

$$T_2' = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}(1+|k|)^2(1+\|m\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,$$

$$T_3' = \sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty\leqslant\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}(1+|k|)^2(1+\|m\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty,$$

$$T_4' = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty\leqslant\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}(1+|k|)^2(1+\|m\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty.$$

我们可以用前面证明 T_1, T_2, T_3 和 T_4 完全一样的方法得到下面的结果:

$$\begin{aligned}
T_1' &\leqslant C\bigg(\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8})j}(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)+(1+\mathrm{e}^0)^3(1+\mathrm{e}^0)\bigg)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\\
&\quad\times\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\leqslant 16C\bigg(\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8})j}+1\bigg)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&= 16C\bigg(\frac{1}{\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{8})}-1}+1\bigg)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\mathrm{e}\frac{1}{2}}},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
T_2' &\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta+1}{4}j}(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\quad+C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta-2\alpha-1}{4}j}(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\leqslant 16C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta-15}{4}j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\quad+16C\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta-2\alpha-17}{4}j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{16C}{\mathrm{e}^{\frac{\beta-15}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\frac{16C}{\mathrm{e}^{\frac{\beta-2\alpha-17}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{(\beta-4\alpha+2)/2}}\sum_{\{m\in\mathbb{Z}^2,\|m\|_\infty>\frac{3\mathrm{e}}{2}\}}\frac{(1+\|m\|_\infty)^2}{\|m\|_\infty^{\alpha-\frac{1}{2}}},
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
T_3' &\leqslant C\bigg(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\bigg)^2(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{2}+\frac{3}{8})j}(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^\beta}+C\bigg(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\bigg)^2\\
&\quad\times(3\mathrm{e}+1)^2(1+\mathrm{e}^0)^3(1+\mathrm{e}^0)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^\beta}\\
&\leqslant 16C\bigg(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\bigg)^2(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{(\frac{\beta}{2}+\frac{3}{8})j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^\beta}+16C\bigg(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\bigg)^2(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^\beta}
\end{aligned}$$

$$= 16C\left(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\right)^2(3\mathrm{e}+1)^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}+\frac{3}{8}}-1}+1\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|)^2}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}T_4' &\leqslant C\left(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\right)^2(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4})j}(1+\mathrm{e}^{\frac{j}{2}})^3(1+\mathrm{e}^j)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}\\ &\leqslant 16C\left(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\right)^2(3\mathrm{e}+1)^2\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{\beta}{2}-\frac{19}{4})j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta}}\\ &= 16C(3\mathrm{e}+1)^2\left(1+\frac{3\mathrm{e}}{2}\right)^2\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}-\frac{19}{4}}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2|k|+\sqrt{\mathrm{e}})^{\beta-1}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此, 由 (3.4)–(3.7) 易知, 引理 3.1(iv) 的结论成立. □

引理 3.2 如果 $g\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 是可允许的且 $f,\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$, 那么,

$$\begin{aligned}C_gSH_\phi f(x,y,z) &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)SH_\phi g((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\overline{SH_g\phi((x,y,z)^{-1}\cdot(a,s,t))}d\mu_S(a,s,t).\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}&\iiint_S SH_gf(a,s,t)SH_\phi g((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\langle g,\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\phi\rangle d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\langle g,\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\phi\rangle d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\langle\sigma(a,s,t)g,\sigma(x,y,z)\phi\rangle d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\overline{\langle\sigma(x,y,z)\phi,\sigma(a,s,t)g\rangle}d\mu_S(a,s,t)\\ &= \iiint_S SH_gf(a,s,t)\overline{SH_g(\sigma(x,y,z)\phi)(a,s,t)}d\mu_S(a,s,t).\end{aligned}$$

因此, 由引理 2.7 可知,

$$\begin{aligned}&\iiint_S SH_gf(a,s,t)SH_\phi g((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))d\mu_S(a,s,t)\\ &= C_g\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\xi)\overline{\sigma(x,y,z)\hat{\phi}(\xi)}d\xi = C_gSH_\phi f(x,y,z).\end{aligned}$$

同理可证,

$$C_gSH_\phi f(x,y,z) = \iiint_S SH_gf(a,s,t)\overline{SH_g\phi((x,y,z)^{-1}\cdot(a,s,t))}d\mu_S(a,s,t).$$

证毕. □

引理 3.3 设 $\phi\in B_0$. 如果 $\Gamma\subset S$ 是 Q_h- 分离集, 那么, 对任意 $\psi\in B_0$, 我们有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|SH_\phi\psi(\gamma)|\leqslant 3(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1)(2\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}+1)\|SH_\phi\psi\|_{W_S(C,L^1)}.$$

证明 任取 $1 \geqslant \delta > 0$ 满足 $0 < (2\delta+\delta^2)\delta < h$. 因为 Γ 是 Q_h- 分离的, 那么, 我们可以采用引理 2.3 中同样的证明方法可证得 Γ 中至多只有一个点包含在 $E^{\delta}_{j,k,m}$ 中. 因此,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|SH_\phi\psi(\gamma)| \leqslant \sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^{\delta}_{j,k,m}}\|_\infty. \tag{3.8}$$

再由引理 2.1 和 (3.8) 可知,

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}|SH_\phi\psi(\gamma)| &\leqslant (\delta+2)[(\delta+1)\mathrm{e}^{\frac12}+1][(\delta+1)\mathrm{e}^{1}+1][(\delta+1)\mathrm{e}^{\frac34}+1]\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^{1}_{j,k,m}}\|_\infty\\ &\leqslant 3(2\mathrm{e}^{\frac12}+1)(2\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}^{\frac34}+1)\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\|SH_\phi f\cdot\chi_{E^{\delta}_{j,k,m}}\|_\infty\\ &= 3(2\mathrm{e}^{\frac12}+1)(2\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}^{\frac34}+1)\|SH_\phi\psi\|_{W_S(C,L^1)}.\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.4 设 $\phi\in B_0$. 如果 $\Gamma\subset S$ 是 Q_h- 分离集, 那么, $\{\sigma(\gamma)\phi:\gamma\in\Gamma\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的 Bessel 列.

证明 任取 $\gamma\in\Gamma$, $\psi\in B_0$, $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$, 则由引理 3.2, 我们有

$$\begin{aligned}|SH_\phi f(\gamma)|^2 &= \left|\frac{1}{C_\psi}\iiint_S SH_\psi f(a,s,t)SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)d\mu_S(a,s,t)\right|^2\\ &\leqslant \frac{1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)|d\mu_S(a,s,t)\\ &\quad\times\iiint_S|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)|d\mu_S(a,s,t)\\ &= \frac{1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)|d\mu_S(a,s,t)\\ &\quad\times\iiint_S|SH_\psi\phi(\gamma^{-1}\cdot(a,s,t))|d\mu_S(a,s,t)\\ &= \frac{\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)|d\mu_S(a,s,t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

因为 Γ 是 Q_h- 分离的, 所以, $(a,s,t)^{-1}\cdot\Gamma$ 也是 Q_h- 分离的. 于是, 由引理 3.3 和 (3.9) 可知,

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}|SH_\phi f(\gamma)|^2 &\leqslant \frac{\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2\sum_{\gamma\in\Gamma}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma)|d\mu_S(a,s,t)\\ &\leqslant \frac{3(2\mathrm{e}^{\frac12}+1)(2\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}^{\frac34}+1)\|SH_\phi\psi\|_{L^1(S)}\|SH_\phi\psi\|_{W_S(C,L^1)}}{C_\psi}\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

因此, $\{\sigma(\gamma)\phi:\gamma\in\Gamma\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的 Bessel 列. □

引理 3.5 设 $1\geqslant h>0$, 则对任意固定的 $j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2$, $E^h_{j,k,m}$ 的 Lebesgue 测度满足

$$\begin{aligned}|E^h_{j,k,m}| &= 2h^3|\mathrm{e}^{h(j+\frac12)}-\mathrm{e}^{h(j-\frac12)}|(1+|k|-|k|\mathrm{e}^{-h/2})(1+(\mathrm{e}^{-h/4}-\mathrm{e}^{-3h/4})|m_2|)\\ &\quad\times(1+(1-\mathrm{e}^{-h})|m_1|+h\mathrm{e}^{-h/4}|m_2|).\end{aligned}$$

证明 因为对任意 $j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2$,

$$E^h_{j,k,m}=\left\{(a\mathrm{e}^{jh},s+hk\mathrm{e}^{-h/4}\sqrt{|a|},t+h\mathrm{e}^{-h/2}B_sA_am):|a|\in[\mathrm{e}^{-\frac h2},\mathrm{e}^{\frac h2}),s\in\left[-\frac h2,\frac h2\right),t\in\left[-\frac h2,\frac h2\right)^2\right\},$$

所以,

$$|E^h_{j,k,m}| = 2h^3|\mathrm{e}^{h(j+\frac{1}{2})} - \mathrm{e}^{h(j-\frac{1}{2})}|(1+|k|-|k|\mathrm{e}^{-h/2})(1+(\mathrm{e}^{-h/4}-\mathrm{e}^{-3h/4})|m_2|)$$
$$\times (1+(1-\mathrm{e}^{-h})|m_1| + h\mathrm{e}^{-h/4}|m_2|).$$

证毕. □

引理 3.6 设 $h_0 > 0$. 如果 $\gamma' \in Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma)$, 那么 $Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma') \subseteq Q_{h_0}(\gamma)$.

证明 由 $\gamma' \in Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma) = \gamma \cdot Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}$ 和 $Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma') = \gamma' \cdot Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}$ 可知,

$$Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma') \subseteq \gamma \cdot Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0} \cdot Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0} \subseteq \gamma \cdot Q_{h_0} = Q_{h_0}(\gamma).$$

证毕. □

引理 3.7 对任意 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(a,s,t) \mapsto \sigma(a,s,t)\phi$ 是从 S 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一致连续映射.

证明 我们只需要证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $h > 0$ 使得对任意满足 $\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}} < \frac{a_1}{a_2} < \mathrm{e}^{\frac{h}{2}}$, $|s_1 - s_2| < \frac{h}{2}$ 和 $\|t_1 - t_2\|_\infty < \frac{h}{2}$ 的 (a_1, s_1, t_1) 和 $(a_2, s_2, t_2) \in S$,

$$\|\sigma(a_1,s_1,t_1)\phi - \sigma(a_2,s_2,t_2)\phi\|_2 < \varepsilon.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(a_2,s_2,t_2)\phi - \sigma(a_1,s_1,t_1)\phi\|_2 \\
&\quad \leqslant \|\sigma(a_2,s_2,t_2)\phi - \sigma(a_1,s_1,t_2)\phi\|_2 + \|\sigma(a_1,s_1,t_2)\phi - \sigma(a_1,s_1,t_1)\phi\|_2 \\
&\quad = \|\phi - \sigma((a_2,s_2,t_2)^{-1}\cdot(a_1,s_1,t_2))\phi\|_2 + \|\phi - \sigma((a_1,s_1,t_2)^{-1}\cdot(a_1,s_1,t_1))\phi\|_2 \\
&\quad = \left\|\phi - \sigma\left(\frac{a_1}{a_2}, s_1 - s_2\frac{\sqrt{|a_1|}}{\sqrt{|a_2|}}, (I - B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2})t_2\right)\phi\right\|_2 + \|\phi - \sigma(1,0,t_1-t_2)\phi\|_2 \\
&\quad = \left[\int_{\mathbb{R}^2}\left|\phi(x) - \left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{3}{4}}\phi(B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2}x - (B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2} - I)t_2)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left[\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(x-(t_1-t_2))|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqslant \left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{3}{4}}\left[\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2}x - (B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2} - I)t_2)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left[\int_{\mathbb{R}^2}\left|\phi(x) - \left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{3}{4}}\phi(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(x-(t_1-t_2))|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad = \left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{-\frac{3}{4}}\left[\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2}x - (B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2} - I)t_2)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left(1 - \left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{3}{4}}\right)\|\phi\|_2 + \left[\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(x-(t_1-t_2))|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

当 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^2)$ 时, 这里 $C_c(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上具有紧支集的连续函数空间, 我们可以选择 h 充分接近 0 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x) - \phi(B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2}x - (B_{s_1-s_2(\sqrt{|a_1|}/\sqrt{|a_2|})}A_{a_1/a_2} - I)t_2)|^2 dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\phi(x)-\phi(x-(t_1-t_2))|^2dx$$

任意小. 因此, 对任意 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^2)$, 存在 $h>0$ 使得对任意满足 $\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}}<\frac{a_1}{a_2}<\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}$, $|s_1-s_2|<\frac{h}{2}$ 和 $\|t_1-t_2\|_\infty<\frac{h}{2}$ 的 (a_1,s_1,t_1) 和 $(a_2,s_2,t_2)\in S$, 有

$$\|\sigma(a_1,s_1,t_1)\phi-\sigma(a_2,s_2,t_2)\phi\|_2<\varepsilon,$$

即对任意 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^2)$, $(a,s,t)\mapsto\sigma(a,s,t)\phi$ 是从 S 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一致连续映射.

又因为 $C_c(\mathbb{R}^2)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中稠密, 所以, 对任意 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(a,s,t)\mapsto\sigma(a,s,t)\phi$ 也是从 S 到 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一致连续映射. 这就完成了引理 3.7 的证明. □

引理 3.8 对任意 $1\geqslant h>0, N>0$, 设

$$\Lambda_N^h=\{(j,k,m):Q_N\cap E_{j,k,m}^h\neq\emptyset\},$$

则

(i) 当 $(j,k,m)\notin\Lambda_N^h$ 时, 我们有 $|j|\geqslant\frac{N+1}{2}$ 或 $|k|\geqslant\frac{N-1}{2}$ 或 $\|m\|_\infty\geqslant\frac{N-1}{3}$.

(ii) 当 $(j,k,m)\in\Lambda_N^h$ 时, 我们有

$$|j|\leqslant\frac{N}{2h}+\frac{1}{2},\quad |k|\leqslant\left(\frac{N}{2h}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{h}{2}},\quad |m_1|\leqslant\left(\frac{N}{2h}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{h}+\frac{h+N}{4}\mathrm{e}^{\frac{3h}{4}},\quad |m_2|\leqslant\left(\frac{N}{2h}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3h}{4}}.$$

证明 (i) 的证明. 因为 $(j,k,m)\notin\Lambda_N^h$, 所以, 对任意的 $(p,q,r)\in E_{j,k,m}^h$, 我们有 $(p,q,r)\notin Q_N$. 又因为

$$(p,q,r)\in E_{j,k,m}^h=\left\{(u\mathrm{e}^j,v+k\mathrm{e}^{-1/4}\sqrt{u},w+\mathrm{e}^{-1/2}B_vA_um):|u|\in[\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}},\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}),\right.$$
$$\left.v\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right),w\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^2\right\},$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{h(j-\frac{1}{2})}\leqslant|p|\leqslant\mathrm{e}^{h(j+\frac{1}{2})},\\
&h\left(|k|\mathrm{e}^{-h/2}-\frac{1}{2}\right)\leqslant|q|\leqslant h\left(|k|+\frac{1}{2}\right),\\
&h\mathrm{e}^{-h}|m_1|-\frac{h^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{h}{4}}|m_2|-\frac{h}{2}\leqslant|r_1|\leqslant h|m_1|+\frac{h^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{h}{4}}|m_2|+\frac{h}{2}\leqslant|m_1|+\frac{1}{2}|m_2|+\frac{1}{2},\\
&h\left(|m_2|\mathrm{e}^{-\frac{3h}{4}}-\frac{1}{2}\right)\leqslant|r_2|\leqslant h\left(|m_2|\mathrm{e}^{-\frac{h}{4}}+\frac{1}{2}\right)\leqslant|m_2|+\frac{1}{2}.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

因此, 由 (3.10) 可知, 满足 $(p,q,r)\in E_{j,k,m}^h$, $(p,q,r)\notin Q_N$ 的 (j,k,m) 至少可为以下几种情形之一:

情形 1

$$|p|\notin\left[\mathrm{e}^{-\frac{N}{2}},\mathrm{e}^{\frac{N}{2}}\right),\quad \mathrm{e}^{j-\frac{1}{2}}\leqslant|p|\leqslant\mathrm{e}^{j+\frac{1}{2}}\Rightarrow|j|\geqslant\frac{N+1}{2};$$

情形 2

$$q\notin\left[-\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right),\quad |q|\leqslant\frac{1}{2}+|k|\Rightarrow|k|\geqslant\frac{N-1}{2};$$

情形 3

$$r_1 \notin \left[-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}\right), \quad |r_1| \leqslant |m_1| + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{2}|m_2| + \frac{1}{2} \Rightarrow |m_1| + \frac{1}{2}|m_2| + \frac{1}{2} \geqslant \frac{N}{2} \Rightarrow \|m\|_\infty \geqslant \frac{N-1}{3};$$

情形 4

$$r_2 \notin \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right), \quad |r_2| \leqslant |m_2| + 1 \Rightarrow |m_2| + 1 \geqslant \frac{N}{2} \Rightarrow \|m\|_\infty \geqslant \frac{N-1}{2}.$$

这表明, 当 $(j,k,m) \notin \Lambda_N^h$ 时, 我们有 $|j| \geqslant \frac{N+1}{2}$ 或 $|k| \geqslant \frac{N-1}{2}$ 或 $\|m\|_\infty \geqslant \frac{N-1}{3}$.

(ii) 的证明. 任取 $(p,q,r) \in Q_N \cap E_{j,k,m}^h$, 则同样由 (3.10) 可知, 当 $(p,q,r) \in Q_N$ 且 $(p,q,r) \in E_{j,k,m}^h$ 时, 我们有

$$|j| \leqslant \frac{N}{2h} + \frac{1}{2}, \quad |k| \leqslant \left(\frac{N}{2h} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}, \quad |m_1| \leqslant \left(\frac{N}{2h} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^h + \frac{h+N}{4}\mathrm{e}^{\frac{3h}{4}}, \quad |m_2| \leqslant \left(\frac{N}{2h} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3h}{4}}.$$

证毕. □

为了叙述方便, 如果令

$$N_{j,k,m}^h = (1 + |k| - |k|\mathrm{e}^{-h/2})(1 + (\mathrm{e}^{-h/4} - \mathrm{e}^{-3h/4})|m_2|)(1 + (1 - \mathrm{e}^{-h})|m_1| + h\mathrm{e}^{-h/4}|m_2|),$$

那么, 我们可以得到下面的引理 3.9–3.11.

引理 3.9 设 $1 \geqslant d > 0, (x,y,z) \in S$, 则当 $E_{j',k',m'}^1 \cap (x,y,z)^{-1} \cdot E_{j,k,m}^d \neq \emptyset$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} N_{j,k,m}^d \leqslant\, & 16\mathrm{e}^4(d + 1 - \mathrm{e}^{-d/2})^2(d + \mathrm{e}^{-d/4} - \mathrm{e}^{-3d/4})(1 + |k'|)^2(1 + \|m'\|_\infty)^2(1 + |y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}) \\ & \times (1 + \mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|)^2[1 + (|z_1| + |y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}]. \end{aligned}$$

证明 取 $(u,v,w) \in E_{j',k',m'}^1 \cap (x,y,z)^{-1} \cdot E_{j,k,m}^d$, 则存在 $(a,s,t) \in Q_1, (p,q,r) \in Q_d$, 使得

$$\begin{aligned} (u,v,w) &= (x,y,z)^{-1} \cdot (\mathrm{e}^{jd}, dk\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m) \cdot (p,q,r) \\ &= \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{\sqrt{|x|}}, -B_{\frac{-y}{\sqrt{|x|}}}A_{\frac{1}{x}}z\right) \cdot (\mathrm{e}^{jd}, dk\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m) \cdot (p,q,r) \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{jd}}{x}, dk\mathrm{e}^{-d/4} - \frac{y}{\sqrt{|x|}}\mathrm{e}^{jd/2}, d\mathrm{e}^{-d/2}m - B_{dk\mathrm{e}^{-d/4}}A_{\mathrm{e}^{jd}}B_{\frac{-y}{\sqrt{|x|}}}A_{\frac{1}{x}}z\right) \cdot (p,q,r) \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^{jd}p}{x}, q + \left(dk\mathrm{e}^{-d/4} - \frac{y}{\sqrt{|x|}}\mathrm{e}^{jd/2}\right)\sqrt{|p|}, r + B_qA_p(d\mathrm{e}^{-d/2}m - B_{dk\mathrm{e}^{-d/4}}A_{\mathrm{e}^{jd}}B_{\frac{-y}{\sqrt{|x|}}}A_{\frac{1}{x}}z)\right), \\ (u,v,w) &= (\mathrm{e}^{j'}, k'\mathrm{e}^{-1/4}, \mathrm{e}^{-1/2}m') \cdot (a,s,t) = (a\mathrm{e}^{j'}, s + k'\mathrm{e}^{-1/4}\sqrt{|a|}, t + B_sA_a\mathrm{e}^{-1/2}m'). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{dj} = \mathrm{e}^{j'}\frac{|ax|}{|p|}, q + \left(dk\mathrm{e}^{-d/4} - \frac{y}{\sqrt{|x|}}\mathrm{e}^{jd/2}\right)\sqrt{|p|} = s + k'\mathrm{e}^{-1/4}\sqrt{|a|}, \\ &t + B_sA_a\mathrm{e}^{-1/2}m' = r + B_qA_q(d\mathrm{e}^{-d/2}m - B_{dk\mathrm{e}^{-d/4}}A_{\mathrm{e}^{jd}}B_{\frac{-y}{\sqrt{|x|}}}A_{\frac{1}{x}}z). \end{aligned}$$

从而, 由 $d \in (0,1]$, $(a,s,t) \in Q_1$, $(p,q,r) \in Q_d$ 可知,

$$|k| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{d/4}}{d}\left(\frac{1+d}{2}\mathrm{e}^{\frac{d}{4}} + |k'|\mathrm{e}^{\frac{d}{4}} + |y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}\mathrm{e}^{\frac{d+1}{4}}\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{d}(1 + |k'| + |y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}), \tag{3.11}$$

$$|m_2| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{d}(|m_2'| + \mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2| + 1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{d}(\|m'\|_\infty + \mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2| + 1), \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}|m_1| &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{d}\left[|m_1'| + |m_2'| + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}|z_1|\mathrm{e}^{j'} + \mathrm{e}(d|k|\mathrm{e}^{-d/4}+1)|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}} + 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}|y||z_2|\mathrm{e}^{j'} + \frac{3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2}\right]\\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{d}\left[2\|m'\|_\infty + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}|z_1|\mathrm{e}^{j'} + \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{3/4}|k'| + \mathrm{e}^{3/4}|y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}} + \mathrm{e}^{3/4} + \frac{1}{2}\right)|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}} + 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}|y||z_2|\mathrm{e}^{j'} + \frac{3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2}\right]\\ &\leqslant \frac{2\mathrm{e}^2(1+|k'|)(1+\|m'\|_\infty)(1+|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})[1+(|z_1|+2|y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}]}{d}. \quad \text{(这里运用了 (3.11))}\end{aligned} \tag{3.13}$$

因此, 由 (3.11)–(3.13), 我们有

$$\begin{aligned}&d^3(1+|k|-|k|\mathrm{e}^{-d/2})(1+(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})|m_2|)(1+(1-\mathrm{e}^{-d})|m_1|+d\mathrm{e}^{-d/4}|m_2|)\\ &\quad\leqslant [d+\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-d/2})(1+|k'|+|y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})][d+\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})(\|m'\|_\infty+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|+1)][d+2\mathrm{e}^2\\ &\qquad\times(1-\mathrm{e}^{-d})(1+|k'|)(1+\|m'\|_\infty)(1+|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})[1+(|z_1|+2|y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}]+\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}d(\|m'\|_\infty+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|+1)]\\ &\quad\leqslant 2\mathrm{e}^4(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})(2+|k'|+|y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(2+\|m'\|_\infty+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|)\\ &\qquad\times[1+(1+|k'|)(1+\|m'\|_\infty)(1+|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})[1+(|z_1|+2|y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}]+(\|m'\|_\infty+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|+1)]\\ &\quad\leqslant 8\mathrm{e}^4(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+|y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|)\\ &\qquad\times[1+(1+|z_2|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})[1+(|z_1|+2|y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}]+(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|)]\\ &\quad\leqslant 16\mathrm{e}^4(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+|y|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|z_2|)^2\\ &\qquad\times[1+(|z_1|+|y||z_2|)\mathrm{e}^{j'}].\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.10 设 $\phi,\psi\in B_0, f\in L^2(\mathbb{R}^2)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $1\geqslant d_0>0$, 使得对任意 $d_0\geqslant d>0$, 我们有

$$\begin{aligned}I = &\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})\\ &\times\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2} N^d_{j,k,m}\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{(a,s,t)^{-1}\cdot E^d_{j,k,m}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)<\varepsilon.\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}I\leqslant&\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})\\ &\times\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2} N^d_{j,k,m}\sum_{\substack{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2\\ E^1_{j',k',m'}\cap(a,s,t)^{-1}\cdot E^d_{j,k,m}\neq\emptyset}}\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\ =&\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})\\ &\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2\\ (a,s,t)\cdot E^1_{j',k',m'}\cap E^d_{j,k,m}\neq\emptyset}} N^d_{j,k,m}\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\ \leqslant&\, 16\mathrm{e}^4\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\end{aligned}$$

$$\times \sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2\\(a,s,t)\cdot E^1_{j',k',m'}\cap E^d_{j,k,m}\neq\emptyset}} (1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+|s|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|t_2|)^2$$

$$\times [1+(|t_1|+|s||t_2|)\mathrm{e}^{j'}]\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t). \quad \text{(这里运用了引理 3.9)}$$

因此, 由引理 2.1 可知, 存在

$$C^1_d=\left(\frac{1}{d}+2\right)\left[\left(\frac{1}{d}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+1\right]\left[\left(\frac{1}{d}+1\right)\mathrm{e}^{d}+1\right]\left[\left(\frac{1}{d}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+1\right],$$

使得

$$I\leqslant 16\mathrm{e}^4\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2C^1_d(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})$$
$$\times\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t).$$

对任意 $1\geqslant d>0$, 由 Q_N 的定义知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在足够大的 $N_d>0$, 使得

$$\begin{aligned}
&16\mathrm{e}^4\iiint_S |SH_\phi f(a,s,t)|^2C^1_d(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\
&\quad\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\||_\infty)^2(1+|s|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|t_2|)^2[1+(|t_1|+|s||t_2|)\mathrm{e}^{j'}]\\
&\quad\times\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
&\leqslant 16\mathrm{e}^4\iiint_{Q_{N_d}} |SH_\phi f(a,s,t)|^2C^1_d(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\
&\quad\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\||_\infty)^2(1+|s|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|t_2|)^2[1+(|t_1|+|s||t_2|)\mathrm{e}^{j'}]\\
&\quad\times\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=R_{N_d}+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

取 $N=\max\{N_d:1\geqslant d>0\}$, 则对上述的 $\varepsilon>0$, 我们有

$$I\leqslant R_N+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.14}$$

下面考虑当 $d\to 0$ 时 R_N 的取值情况,

$$\begin{aligned}
R_N&=16\mathrm{e}^4\iiint_{Q_N} |SH_\phi f(a,s,t)|^2C^1_d(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d/2})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\
&\quad\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\||_\infty)^2(1+|s|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|t_2|)^2[1+(|t_1|+|s||t_2|)\mathrm{e}^{j'}]\\
&\quad\times\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
&\leqslant 16\mathrm{e}^4\iiint_{Q_N} |SH_\phi f(a,s,t)|^2C^1_d(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\
&\quad\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2\left(1+\frac{N}{2}\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}\right)^3\left(1+\frac{N^2}{2}\mathrm{e}^{j'}\right)\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)
\end{aligned}$$

$$\leqslant N^5\mathrm{e}^4\iiint_{Q_N}|SH_\phi f(a,s,t)|^2C_d^1(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})$$
$$\times\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3\|SH_{\phi_1}\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty d\mu_S(a,s,t).$$

而对于任意 $(a,s,t)\in Q_N$,

$$\begin{aligned}&|SH_\phi f(a,s,t)|^2C_d^1(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d})^3(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\&\quad\leqslant\|\phi\|_2^2\|f\|_2^2C_d^1(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d})^3(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\&\quad=(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})\|\phi\|_2^2\|f\|_2^2(d+1)[(d+1)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+d][(d+1)\mathrm{e}^{d}+d][(d+1)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+d]\\&\qquad\times\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}}}{d}\right)\left(\frac{d+1-\mathrm{e}^{-d}}{d}\right)^2\left(\frac{d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4}}{d}\right).\end{aligned}$$

因此, 对于任意 $(a,s,t)\in Q_N$,

$$\lim_{d\to0}|SH_\phi f(a,s,t)|^2C_d^1(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(d+1-\mathrm{e}^{-d})^3(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})=0.$$

而由引理 3.1(iv) 可知, 当 $\phi,\psi\in B_0$ 时, 我们有

$$\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3(1+\mathrm{e}^{j'})\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty<\infty.$$

又因为

$$\iiint_{Q_N}|SH_\phi f(a,s,t)|^2d\mu_S(a,s,t)\leqslant\iiint_S|SH_\phi f(a,s,t)|^2d\mu_S(a,s,t)=C_\phi\|f\|_2^2<\infty,$$

所以, 由 Lebesgue 控制收敛定理可知, 对 (3.14) 中的 $\varepsilon>0$, 存在 $1>d_0>0$, 使得对任意 $d_0>d>0$,

$$R_N<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.15}$$

从而, 由 (3.14) 和 (3.15) 可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $1>d_0>0$, 使得对任意 $d_0>d>0$, 我们有 $I\leqslant\varepsilon$. 证毕. □

引理 3.11 设 $\phi,\psi\in B_0,(x,y,z)$, $(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\in E^d_{j,k,m}$. 如果 $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$, 那么, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $1\geqslant d_0>0$, 使得对任意 $d_0\geqslant d>0$, 我们有

$$\begin{aligned}II=\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2d^3(\mathrm{e}^d-1)\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}&N^d_{j,k,m}|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\\&-SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)<\varepsilon.\end{aligned}$$

证明 对任意 $1\geqslant d>0$, 由 Q_N 的定义知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在足够大的 $N>0$, 使得

$$\begin{aligned}II\leqslant\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d^3(\mathrm{e}^d-1)\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}&N^d_{j,k,m}|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\\&-SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)+\frac{\varepsilon}{2}=R_N+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

下面估计当 $d\to0$ 时, R_N 取值情况. 由于 $(x,y,z),(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\in E^d_{j,k,m}$, 因此, 为了估计当 $d\to0$ 时, R_N 取值情况, 我们可以将 R_N 中的 (j,k,m) 按 $Q_M\cap E^d_{j,k,m}\neq\emptyset$ 和 $Q_M\cap E^d_{j,k,m}=\emptyset$ 进行分类. 当 $M>0$ 时, 令

$$\Lambda^d_M=\{(j,k,m):Q_M\cap E^d_{j,k,m}\neq\emptyset\},$$

则我们有

$$
\begin{aligned}
R_N = &\iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1) \sum_{(j,k,m)\notin\Lambda_M^d} N_{j,k,m}^d |SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\\
&- SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))| d\mu_S(a,s,t)\\
&+ \iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1) \sum_{(j,k,m)\in\Lambda_M^d} N_{j,k,m}^d |SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\\
&- SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))| d\mu_S(a,s,t) =: R_N^1 + R_N^2.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

我们先估计 R_N^1,

$$
\begin{aligned}
R_N^1 \leqslant\ & 2\iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1) \sum_{(j,k,m)\notin\Lambda_M^d} N_{j,k,m}^d \|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{(a,s,t)^{-1}\cdot E_{j,k,m}^d}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
\leqslant\ & 2\iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1)\\
&\times \sum_{(j,k,m)\notin\Lambda_M^d} N_{j,k,m}^d \sum_{\substack{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2\\ E_{j',k',m'}^1\cap(a,s,t)^{-1}\cdot E_{j,k,m}^d\neq\emptyset}} \|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
=\ & 2\iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1)\\
&\times \sum_{(j',k',m')\notin\Lambda_M^d} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2\\ (a,s,t)\cdot E_{j',k',m'}^1\cap E_{j,k,m}^d\neq\emptyset}} N_{j,k,m}^d \|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
\leqslant\ & 2\iiint_{Q_N} |SH_\psi f(a,s,t)|^2 C_d^1 d^3(\mathrm{e}^d-1)\\
&\times \sum_{(j',k',m')\notin\Lambda_M^d} \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2\\ (a,s,t)\cdot E_{j',k',m'}^1\cap E_{j,k,m}^d\neq\emptyset}} N_{j,k,m}^d \|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
&\text{(这里运用了引理 2.1)}\\
\leqslant\ & 32\mathrm{e}^4 \iiint_{Q_N} |SH_\phi f(a,s,t)|^2 C_d^1 (\mathrm{e}^d-1)(d+1-\mathrm{e}^{-d})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\\
&\times \sum_{(j',k',m')\notin\Lambda_M^d} (1+|k'|)^2(1+\|m'\||_\infty|)^2(1+|s|\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}}|t_2|)^2[1+(|t_1|+|s||t_2|)\mathrm{e}^{j'}]\\
&\times \|SH_{\phi_1}\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty d\mu_S(a,s,t) \quad \text{(这里运用了引理 3.9)}\\
\leqslant\ & 2C\mathrm{e}^4 N^5 \iiint_{Q_N} |SH_\phi f(a,s,t)|^2 \sum_{(j',k',m')\notin\Lambda_M^d} (1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3\\
&\times \|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty d\mu_S(a,s,t) \quad \text{(下面运用了引理 3.8(i))}\\
\leqslant\ & 2C\mathrm{e}^4 N^5 \iiint_{Q_N} |SH_\phi f(a,s,t)|^2 d\mu_S(a,s,t) \sum_{|j'|\geqslant\frac{M+1}{2}\text{ 或 }|k'|\geqslant\frac{M-1}{2}\text{ 或 }\|m'\|_\infty\geqslant\frac{M-1}{3}}\\
&\times (1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E_{j',k',m'}^1}\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2C\mathrm{e}^4N^5C_\varphi\|f\|_2^2 \sum_{\|j'|\geqslant\frac{M+1}{2}\text{ 或 }|k'|\geqslant\frac{M-1}{2}\text{ 或 }\|m'\|_\infty\geqslant\frac{M-1}{3}} (1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3 \\
&\quad\times \|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C &= \sup_{0<d\leqslant 1} C_d^1(\mathrm{e}^d-1)(d+1-\mathrm{e}^{-d})^2(d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4}) \\
&= \sup_{0<d\leqslant 1}\left[\frac{\mathrm{e}^d-1}{d}+2(\mathrm{e}^d-1)\right][(1+d)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+d][(1+d)\mathrm{e}^d+d][(1+d)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+d] \\
&\quad\times\left(\frac{d+1-\mathrm{e}^{-d}}{d}\right)^2\left(\frac{d+\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4}}{d}\right).
\end{aligned}
$$

因为 $\phi,\psi\in B_0$, 所以, 由定理 3.1(iv), 我们有

$$
\sum_{j',k'\in\mathbb{Z},m'\in\mathbb{Z}^2}(1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j',k',m'}}\|_\infty<\infty.
$$

因此, 对 (3.16) 中 ε, 我们可以选择足够大 M, 使得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|j'|>\frac{M+1}{2}\text{ 或 }|k'|>\frac{M-1}{2}\text{ 或 }\|m'\|_\infty>\frac{M-1}{3}} (1+|k'|)^2(1+\|m'\|_\infty)^2(1+\mathrm{e}^{j'})(1+\mathrm{e}^{\frac{j'}{2}})^3 \\
&\qquad\times\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{Q_1(\mathrm{e}^{j'},k'\mathrm{e}^{-\frac14},\mathrm{e}^{-\frac14}m')}\|_\infty\leqslant\frac{\varepsilon}{8C6\mathrm{e}^4N^5C_\varphi\|f\|_2^2}.
\end{aligned}
$$

从而可知,

$$
R_N^1<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.18}
$$

再估计 R_N^2. 因为

$$
\begin{aligned}
&|SH_\phi\psi(a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})| \\
&\quad=|\langle\psi,\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\phi-\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\phi\rangle| \\
&\quad\leqslant\|\psi\|_2\|\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\phi-\sigma((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\phi\|_2,
\end{aligned}
$$

所以, 由引理 3.7 可知, 对任意 $1\geqslant d'>0$, 存在 $d'\geqslant d_1>0$, 对任意 $d_1\geqslant d>0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
R_N^2&\leqslant\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d^3(\mathrm{e}^d-1)\sum_{(j,k,m)\in\Lambda_M^d}N^d_{j,k,m}d'd\mu_S(a,s,t) \\
&\leqslant\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d'd^3(\mathrm{e}^d-1)\#\Lambda_M^d\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d})\left(\left(\frac{M}{2d}+\frac12\right)\mathrm{e}^d+\frac{d+M}{4}\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right)\right. \\
&\quad\left.+dd\mathrm{e}^{-d/4}\left(\frac{N}{2d}+\frac12\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]\left[1+(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\left(\frac{M}{2d}+\frac12\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}\right] \\
&\quad\times\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d/2})\left(\frac{M}{2d}+\frac12\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]d\mu_S(a,s,t)\quad(\text{这里运用了引理 3.8(ii)}) \\
&\leqslant\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d'd^3(\mathrm{e}^d-1)\left(\frac{M}{d}+2\right)\left[\left(\frac{M}{d}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[\left(\frac{M}{d}+1\right)\mathrm{e}^{d}+1\right]\left[\left(\frac{M}{d}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+1\right]\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d})\left(\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{d}+\frac{d+M}{4}\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right)\right.\\
&\left.+\,d\mathrm{e}^{-d/4}\left(\frac{N}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]\left[1+(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}\right]\\
&\times\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d/2})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]d\mu_S(a,s,t)\quad(\text{这里运用了引理 2.1(ii)})\\
=&\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d'\left[\frac{M(\mathrm{e}^{d}-1)}{d}+2(\mathrm{e}^{d}-1)\right][(M+d)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+d][(M+d)\mathrm{e}^{d}+d]\\
&\times[(M+d)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+d]\left[(1+(1-\mathrm{e}^{-d})\left(\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{d}+\frac{d+M}{4}\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right)+d\mathrm{e}^{-d/4}\left(\frac{N}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]\\
&\times\left[1+(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}\right]\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d/2})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]d\mu_S(a,s,t)\\
=&\iiint_{Q_N}F^{d'}(a,s,t)d\mu_S(a,s,t).
\end{aligned}
$$

而对于任意 $(a,s,t)\in Q_N, 1\geqslant d'>0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
F^{d'}(a,s,t)\leqslant{}&\|\psi\|_2^2\|f\|_2^2d'\left[\frac{M(\mathrm{e}^{d}-1)}{d}+2(\mathrm{e}^{d}-1)\right][(M+d)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}+d][(M+d)\mathrm{e}^{d}+d][(M+d)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}+d]\\
&\times\left[(1+(1-\mathrm{e}^{-d})\left(\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{d}+\frac{d+M}{4}\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right)+d\mathrm{e}^{-d/4}\left(\frac{N}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right]\\
&\times\left[1+(\mathrm{e}^{-d/4}-\mathrm{e}^{-3d/4})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{2}}\right]\left[1+(1-\mathrm{e}^{-d/2})\left(\frac{M}{2d}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}\right].
\end{aligned}
$$

因此, 对于任意 $(a,s,t)\in Q_N$, 由 $d'\geqslant d>0$, 我们有

$$\lim_{d'\to 0}F^{d'}(a,s,t)=0.$$

又因为

$$\iiint_{Q_N}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d\mu_S(a,s,t)\leqslant\iiint_{S}|SH_\psi f(a,s,t)|^2d\mu_S(a,s,t)=C_\psi\|f\|_2^2<\infty,$$

所以, 由 Lebesgue 控制收敛定理可知, 对 (3.16) 中 ε, 存在 $1>d_2>0$, 使得对任意 $d_2>d>0$,

$$R_N^2<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{3.19}$$

从而由 (3.16)–(3.19) 可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $1>d_0=\min\{d_1,d_2\}>0$, 使得对任意 $d_0>d>0$, 我们有 $II<\varepsilon$. 证毕. □

下面采用文献 [25] 中的证明方法对我们的主要结果定理 1.1–1.3 进行证明.

定理 1.1 的证明 由引理 3.4 知, $\{\sigma(\gamma)\phi:\gamma\in\Gamma\}$ 是一个 Bessel 点列. 下面证明当 h 足够小时, $\{\sigma(\gamma)\phi:\gamma\in\Gamma\}$ 有正框架下界.

首先, 我们可以证明对任意 $j,k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}^2$, $E^d_{j,k,m}\cap\Gamma\neq\emptyset$, 这里 $d=\frac{3h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}$. 否则, 存在 $j_0,k_0\in\mathbb{Z}$, $m_0\in\mathbb{Z}^2$, 使得 $E^d_{j_0,k_0,m_0}\cap\Gamma=\emptyset$. 则对任意 $\gamma\in\Gamma$, 我们有

$$(\mathrm{e}^{j_0d},dk_0\mathrm{e}^{-d/4},d\mathrm{e}^{-d/2}m_0)\notin\{\gamma\cdot(a,s,t)^{-1}:(a,s,t)\in Q_d\}.\tag{3.20}$$

由 (3.20) 和 $d=\frac{3h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}$, 我们可以断言 $(\mathrm{e}^{j_0 d}, dk_0\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m_0)\notin Q_h(\gamma)$. 否则存在 $(a_0,s_0,t_0)\in Q_h$, 使得

$$(\mathrm{e}^{j_0 d}, dk_0\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m_0)=\gamma\cdot(a_0,s_0,t_0)=\gamma\cdot((a_0,s_0,t_0)^{-1})^{-1}.$$

又因为

$$\left(\left|\frac{1}{a_0}\right|, \frac{-s_0}{\sqrt{|a_0|}}, -B_{\frac{-s_0}{\sqrt{|a_0|}}}A_{\frac{1}{a_0}}t_0\right)\in[\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}},\mathrm{e}^{\frac{h}{2}})\times\left[-\frac{h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{4}},\frac{h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{4}}\right)\times\left[-\frac{3h}{4}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}},\frac{3h}{4}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}\right)\times\left[-\frac{h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{4}},\frac{h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{4}}\right),$$

所以,

$$(a_0,s_0,t_0)^{-1}=\left(\frac{1}{a_0}, \frac{-s_0}{\sqrt{|a_0|}}, -B_{\frac{-s_0}{\sqrt{|a_0|}}}A_{\frac{1}{a_0}}t_0\right)\in Q_{\frac{3h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}}=Q_d.$$

因此,

$$(\mathrm{e}^{j_0 d}, dk_0\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m_0)\in\{\gamma\cdot(a,s,t)^{-1}:(a,s,t)\in Q_d\}.$$

这与 (3.20) 矛盾.

再由 γ 的任意性及 Γ 在 S 中 Q_h- 稠, 我们有

$$(\mathrm{e}^{j_0 d}, dk_0\mathrm{e}^{-d/4}, d\mathrm{e}^{-d/2}m_0)\notin\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Q_h(\gamma)=S.$$

这是一个矛盾. 因此, 对任意 $j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2,E^d_{j,k,m}\cap\Gamma\neq\emptyset$.

对任意 $j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2$, 取 $E^d_{j,k,m}\cap\Gamma$ 中的某个元素, 将它表示为 $(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})$. 对于 $\psi\in B_0$, 由引理 3.2, 对任意 $(x,y,z)\in S$, 我们有

$$SH_\phi f(x,y,z)=\frac{1}{C_\psi}\iiint_S SH_\psi f(a,s,t)SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))d\mu_S(a,s,t).$$

这表明, 当 d 足够小且 $(x,y,z)\in E^d_{j,k,m}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\phi f(x,y,z)-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N^d_{j,k,m})^{\frac{1}{2}}}SH_\phi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\right|^2\\
&\quad=\left|\frac{1}{C_\psi}\iiint_S SH_\psi f(a,s,t)\bigg(\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N^d_{j,k,m})^{\frac{1}{2}}}\right.\\
&\qquad\left.\times SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\bigg)d\mu_S(a,s,t)\right|^2\\
&\quad\leqslant\frac{1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N^d_{j,k,m})^{\frac{1}{2}}}\right.\\
&\qquad\left.\times SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\right|d\mu_S(a,s,t)\iiint_S\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N^d_{j,k,m})^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\right|d\mu_S(a,s,t)\\
&\quad=\frac{1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N^d_{j,k,m})^{\frac{1}{2}}}\right.\\
&\qquad\left.\times SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\right|d\mu_S(a,s,t)\iiint_S\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\psi\phi((x,y,z)^{-1}\cdot(a,s,t))\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}} SH_\psi\phi((x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})^{-1}\cdot(a,s,t))\Big| d\mu_S(a,s,t)\\
&\leqslant \frac{\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2\bigg(\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}}\bigg)\bigg|\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\\
&\cdot(x,y,z))-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}}SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))\bigg|d\mu_S(a,s,t)\\
&\leqslant \frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2 \mathrm{e}^{\frac{d}{2}(j-\frac{1}{2})}}\bigg[\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\\
&\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)+\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2\bigg|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}}\bigg|\\
&\times|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)\bigg]\\
&\leqslant \frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2 \mathrm{e}^{d(j-\frac{1}{2})}}\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\\
&\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)+\frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})}{C_\psi^2\mathrm{e}^{d(j-\frac{1}{4})}}\\
&\times\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi(((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)\\
&\leqslant \frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2 \mathrm{e}^{d(j-\frac{1}{2})}}\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\\
&\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)+\frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})}{C_\psi^2\mathrm{e}^{d(j-\frac{1}{4})}}\\
&\times\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{(a,s,t)^{-1}E_{j,k,m}^d}\|_\infty d\mu_S(a,s,t).
\end{aligned}
$$

因此, 由引理 3.5 和上式, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\iiint_{E_{j,k,m}^d}\bigg|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\psi f(x,y,z)-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}}SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\bigg|^2dxdydz\\
&\leqslant \frac{8\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^d-1)\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}N_{j,k,m}^d\max_{(x,y,z),(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\in E_{j,k,m}^d}\\
&\quad\times|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x,y,z))-SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m}))|d\mu_S(a,s,t)\\
&\quad+\frac{8\|SH_\psi\varphi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S |SH_\psi f(a,s,t)|^2 d^3(\mathrm{e}^{\frac{3d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})(\mathrm{e}^{\frac{d}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{d}{4}})\\
&\quad\times\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}N_{j,k,m}^d\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{(a,s,t)^{-1}\cdot E_{j,k,m}^d}\|_\infty d\mu_S(a,s,t)\\
&=: II+I.
\end{aligned}
$$

从而, 由上式、引理 3.10 和 3.11, 对任意正常数 $0<\Delta<C_\psi$, 存在 $1\geqslant d_0>0$ 使得对任意 $d_0>d>0$,

$$
\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\iiint_{E_{j,k,m}^d}\bigg|\frac{1}{|x^{\frac{1}{2}}|}SH_\psi f(x,y,z)-\frac{1}{|x_{j,k,m}|^{\frac{1}{2}}(N_{j,k,m}^d)^{\frac{1}{2}}}SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})\bigg|^2dxdydz
$$

$$\leqslant \Delta\|f\|_2^2. \tag{3.21}$$

又因为

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\iiint_{E^d_{j,k,m}}\left|\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}SH_\psi f(x,y,z)\right|^2 dxdydz$$
$$=\iiint_S\frac{1}{|x|}\left|SH_\psi f(x,y,z)\right|^2 dxdydz=\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{f}(\xi)|^2\left[\int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}}|\hat{\psi}(B_y^{-\mathrm{T}}A_x^{-1}\xi)|^2 dy\frac{dx}{|x|}\right]d\xi$$
$$=C_\psi\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi=C_\psi\|f\|_2^2, \tag{3.22}$$

所以, 由 (3.21) 和 (3.22), 我们有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\iiint_{E^d_{j,k,m}}\frac{1}{|x_{j,k,m}|N^d_{j,k,m}}|SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})|^2 dxdydz\geqslant(C_\psi^{\frac{1}{2}}-\Delta^{\frac{1}{2}})^2\|f\|_2^2.$$

但另一方面, 由引理 3.5, 我们有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}\iiint_{E^d_{j,k,m}}\frac{1}{|x_{j,k,m}|N^d_{j,k,m}}|SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},x_{j,k,m})|^2 dxdydz$$
$$\leqslant\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}4d^3(\mathrm{e}^d-1)|SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})|^2.$$

这表明,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle f,\sigma(\gamma)\phi\rangle|^2\geqslant\sum_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}|SH_\psi f(x_{j,k,m},y_{j,k,m},z_{j,k,m})|^2\geqslant\frac{1}{4d^3(\mathrm{e}^d-1)}(C_\psi^{\frac{1}{2}}-\Delta^{\frac{1}{2}})^2\|f\|_2^2,$$

即当 $d=\frac{3h}{2}\mathrm{e}^{\frac{h}{2}}$ 足够小时, $\{\sigma(\gamma)\phi:\gamma\in\Gamma\}$ 有正框架下界. □

定理 1.2 的证明 设 B 和 A 分别为框架 $\{\sigma(\gamma_n)\phi:n\in\mathbb{Z}\}$ 的上下框架界. 由引理 2.3 和 2.6 可知, 对任意 $h>0$, Γ 是相对 Q_h- 分离的. 我们先假设 Γ 是 Q_{h_0}- 分离的. 不失一般性, 不妨设 $1\geqslant h_0>0$.

由引理 3.6 可知, 当 $\gamma_n'\in Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma_n)$ 时, $Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma_n')\subseteq Q_{h_0}(\gamma_n)$. 因此, 根据 Γ 是 Q_{h_0}- 分离的, 我们可以得到

$$Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma_n')\cap Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}(\gamma_m')=\emptyset,\quad n\neq m,$$

即 $\{\gamma_n':n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}$- 分离的, 于是容易证明对任意 $(a,s,t)\in S$, $\{(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n':n\in\mathbb{Z}\}$ 也是 $Q_{\frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}h_0}$- 分离的. 因此, 存在取决于 h_0 的常数 C_1 和 C_2 使得

$$\begin{aligned}&\#\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-1/4},\mathrm{e}^{-1/2}m)\}\leqslant C_1,\\&\#\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n'\in Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-1/4},\mathrm{e}^{-1/2}m)\}\leqslant C_2,\quad\forall\,(a,s,t)\in S,\quad j,k\in\mathbb{Z},\quad m\in\mathbb{Z}^2.\end{aligned} \tag{3.23}$$

设 $N>0$, $D_N=\{[\mathrm{e}^{-N},\mathrm{e}^N)\cup[-\mathrm{e}^N,-\mathrm{e}^{-N})\}\times[-N,N)\times[-2N,2N)\times[-N,N)$, 则对任意 $\gamma_n\in\Gamma$, $n\in\mathbb{Z}$, 我们可以按 $(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N$ 或 $(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in D_N$ 来估计

$$|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n')|$$

的值. 当 $(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N$ 时, 由

$$\bigcup_{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2}E^1_{j,k,m}=S,$$

我们有

$$|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)|\leqslant\sum_{\{j,k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^2:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N,(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in E^1_{j,k,m}\}}\|SH_\phi\psi\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty. \tag{3.24}$$

因为

$$\begin{aligned}(p,q,r):=&(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in E^h_{j,k,m}\\ &=\left\{(u\mathrm{e}^j,v+k\mathrm{e}^{-1/4}\sqrt{u},w+\mathrm{e}^{-1/2}B_vA_um):|u|\in[\mathrm{e}^{-\frac12},\mathrm{e}^{\frac12}),v\in\left[-\frac12,\frac12\right),w\in\left[-\frac12,\frac12\right)^2\right\},\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{j-\frac12}\leqslant|p|\leqslant\mathrm{e}^{j+\frac12},\\ &-\frac12+|k|\mathrm{e}^{-\frac12}\leqslant|q|\leqslant\frac12+|k|,\\ &\mathrm{e}^{-1}|m_1|-\frac{\mathrm{e}^{-\frac14}}{2}|m_2|-\frac12\leqslant|r_1|\leqslant|m_1|+\frac{\mathrm{e}^{-\frac14}}{2}|m_2|+\frac12,\\ &\mathrm{e}^{-\frac34}|m_2|-\frac12\leqslant|r_2|\leqslant\mathrm{e}^{-\frac14}|m_2|+\frac12.\end{aligned} \tag{3.25}$$

由此可知, 满足 $(p,q,r)\notin D_N,(p,q,r)\in E^1_{j,k,m}$ 的 (j,k,m) 至少可为以下几种情形之一:

情形 1

$$|p|\notin[\mathrm{e}^{-N},\mathrm{e}^N),\quad \mathrm{e}^{j-\frac12}\leqslant|p|\leqslant\mathrm{e}^{j+\frac12}\Rightarrow|j|\geqslant N+\frac12;$$

情形 2

$$q\notin[-N,N),\quad |q|\leqslant\frac12+|k|\Rightarrow|k|\geqslant N-\frac12;$$

情形 3

$$r_1\notin[-2N,2N),\quad |r_1|\leqslant|m_1|+\frac{\mathrm{e}^{-\frac14}}{2}|m_2|+\frac12\Rightarrow|m_1|+\frac{\mathrm{e}^{-\frac14}}{2}|m_2|+\frac12\geqslant 2N\Rightarrow\|m\|_\infty\geqslant\frac{4N-1}{2+\mathrm{e}^{-\frac14}};$$

情形 4

$$r_2\notin[-N,N),\quad |r_2|\leqslant\mathrm{e}^{-\frac14}|m_2|+\frac12\Rightarrow\mathrm{e}^{-\frac14}|m_2|+\frac12\geqslant N\Rightarrow\|m\|_\infty\geqslant\mathrm{e}^{\frac14}\left(N-\frac12\right).$$

因此, 由 (3.24) 可知, 当 $(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N$ 时, 我们有

$$SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)|\leqslant\sum_{|j|>N+\frac12\text{ 或 }|k|>N-\frac12\text{ 或 }\|m\|_\infty\geqslant\mathrm{e}^{\frac14}(N-\frac12)}\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty. \tag{3.26}$$

从而, 由 (3.23) 和 (3.26) 可知, 存在常数 C_1, 使得

$$\begin{aligned}&\sum_{\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N\}}|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)|\\ &\leqslant C_1\sum_{|j|>N+\frac12\text{ 或 }|k|>N-\frac12\text{ 或 }\|m\|_\infty\geqslant\mathrm{e}^{\frac14}(N-\frac12)}\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{E^1_{j,k,m}}\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.27}$$

又因为 $(p,q,r)=(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n$ 和 $\gamma_n'\in Q_{\frac{1}{3\sqrt{e}}h_0}(\gamma_n)\subset Q_1(\gamma_n)$, 所以, 存在 $|u|\in[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})$, $v\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $w\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2$ 使得

$$(p',q',r'):=(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'=\left(up,v+q\sqrt{|u|},\begin{pmatrix} w_1+ur_1+v\sqrt{|u|}r_2\\ w_2+\sqrt{|u|}r_2\end{pmatrix}\right).$$

从而, 当 $(p,q,r)\notin D_N$ 时, 我们可以断言 $(p',q',r')\notin D_N'$, 其中

$$\begin{aligned}D_N'=&[\mathrm{e}^{-N+\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{N-\frac{1}{2}})\times\left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N+\frac{1}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2}\right)\times\left[-\left(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2}\right)N+\frac{1}{2},\left(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2}\right)N-\frac{1}{2}\right)\\&\times\left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N+\frac{1}{2},\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

事实上, 当 $(p,q,r)\notin D_N$, 我们得到

(i) 当 $|p|\notin[\mathrm{e}^{-N},\mathrm{e}^{N})$, 我们有 $|p'|=|up|\notin[\mathrm{e}^{-N+\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{N-\frac{1}{2}})$;

(ii) 当 $q\notin[-N,N)$ 时, 我们有 $|q'|=|v+q\sqrt{|u|}|\geqslant|q\sqrt{|u|}|-|v|>\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2}$;

(iii) 当 $r=(r_1,r_2)^{\mathrm{T}}\notin[-2N,2N)\times[-N,N)$ 时, 我们分下面两种情形考虑:

当 $|r_2|\geqslant N$ 时, 我们有

$$|r_2'|=|w_2+\sqrt{|u|}r_2|\geqslant|\sqrt{|u|}r_2|-|w_2|>\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2};$$

当 $|r_2|<N,|r_1|\geqslant 2N$ 时, 我们有

$$|r_1'|=|w_1+ur_1+v\sqrt{|u|}r_2|\geqslant|ur_1|-|w_1|-|v\sqrt{|u|}r_2|>\left(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2}\right)N-\frac{1}{2}.$$

这表明, 当 $(p,q,r)\notin D_N$ 时, 我们有 $(p',q',r')\notin D_N'$. 由此可知, 当 $(p,q,r)\notin D_N$ 时, 满足 $(p',q',r')\notin D_N'$, $(p',q',r')\in Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-1/4},\mathrm{e}^{-1/2}m)$ 的 (j,k,m) 至少为以下几种情形之一:

情形 1　当 $|p'|\notin[\mathrm{e}^{-N+\frac{1}{2}},\mathrm{e}^{N-\frac{1}{2}})$, $\mathrm{e}^{j-\frac{1}{2}}\leqslant|p'|\leqslant\mathrm{e}^{j+\frac{1}{2}}$ 时, 我们有 $|j|\geqslant N$;

情形 2　当 $|q'|\geqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}+|k|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\leqslant|q'|\leqslant\frac{1}{2}+|k|$ 时, 我们有 $|k|\geqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-1$;

情形 3　当 $|r'|_1\geqslant(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2})N-\frac{1}{2}$, $\mathrm{e}^{-1}|m_1|-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{2}|m_2|-\frac{1}{2}\leqslant|r_1'|\leqslant|m_1|+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{2}|m_2|+\frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$\|m\|_\infty\geqslant\frac{(4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})N-2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}+1};$$

情形 4　当 $|r_2'|\geqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-\frac{1}{2},\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}|m_2|-\frac{1}{2}\leqslant|r_2|\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}|m_2|+\frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$\|m\|_\infty\geqslant N-\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}.$$

因此, 当 $(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N$, 我们也有

$$\begin{aligned}&|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot{\gamma'}_n)|\\&\leqslant\sum_{|j|>N\text{ 或 }|k|>\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-1\text{ 或 }\|m\|_\infty\geqslant\frac{(4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})N-2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}+1}}\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-1/4},\mathrm{e}^{-1/2}m)}\|_\infty.\end{aligned}\tag{3.28}$$

从而, 由 (3.23) 和 (3.28) 可知, 存在常数 C_2, 使得

$$\begin{aligned}&\sum_{\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\notin D_N\}}|SH_\varphi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot{\gamma'}_n)|\\&\leqslant C_2\sum_{|j|>N\text{ 或 }|k|>\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}N-1\text{ 或 }\|m\|_\infty\geqslant\frac{(4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})N-2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}+1}}\|SH_\varphi\psi\cdot\chi_{Q_1(\mathrm{e}^j,k\mathrm{e}^{-1/4},\mathrm{e}^{-1/2}m)}\|_\infty.\end{aligned}\tag{3.29}$$

因此, 由 (3.27) 和 (3.29), 我们能找到足够大的 N 使得

$$\sum_{\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot(a,s,t)\notin D_N\}}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|<\Delta_1,\tag{3.30}$$

其中 Δ_1 是满足下列条件的一个常数,

$$0<\Delta:=\frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}\Delta_1}{C_\psi}<A,$$

这里 A 为框架 $\{\sigma.(\gamma_n)\phi:n\in\mathbb{Z}\}$ 的下框架界.

另一方面, 从 (3.23) 和 (3.25), 对任意 $(a,s,t)\in S$, 我们可以得到

$$\#\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in D_N\}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\sum_{|j|\leqslant N}\mathrm{e}^{N-j}\left(N+\frac{1}{2}\right)^2\left(2N+\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)C_1=:C_N.$$

而由引理 3.7 可知, $SH_\phi\psi$ 是连续函数, 因此, 我们能找到 $h_0>h>0$ 使得对任意 $\gamma'_n\in Q_h(\gamma_n)$ 和 $(a,s,t)\in S$, 有

$$\sum_{\{n:(a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n\in D_N\}}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|<\Delta_1.\tag{3.31}$$

结合 (3.30) 和 (3.31), 对任意 $(a,s,t)\in S$, 我们可以得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|<2\Delta_1.$$

结合引理 3.2 和上式, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}}|SH_\phi f(\gamma_n)-SH_\phi f(\gamma'_n)|^2\\&\quad=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{C_\psi^2}|SH_\psi f(a,s,t)(SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n))d\mu(a,s,t)|^2\\&\quad\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|d\mu(a,s,t)\\&\qquad\times\iiint_S|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|d\mu(a,s,t)\\&\quad\leqslant\frac{2\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma_n)-SH_\phi\psi((a,s,t)^{-1}\cdot\gamma'_n)|d\mu(a,s,t)\\&\quad\leqslant\frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}\Delta_1}{C_\psi^2}\iiint_S|SH_\psi f(a,s,t)|^2d\mu(a,s,t)\end{aligned}$$

$$= \frac{4\|SH_\psi\phi\|_{L^1(S)}\Delta_1}{C_\psi}\|f\|_2^2 = \Delta\|f\|_2^2.$$

当 $\Gamma = \bigcup_{l=1}^r \Gamma_l$, 其中每个 $\Gamma_l = \{\gamma_n^l\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 Q_h- 分离点集, 我们可以采用上述类似的方法证得存在 $h_0 > 0$ 使得对任意 $h_0 > h > 0, \eta_n^l \in Q_h(\gamma_n^l)$,

$$\sum_{l=1}^r \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|SH_\phi f(\gamma_n^l) - SH_\phi f(\eta_n^l)\right|^2 \leqslant \Delta\|f\|_2^2.$$

因此, 由引理 2.8 可知, 定理的结论成立. 证毕. □

定理 1.3 的证明 由引理 2.3 和 2.6 可知, 对 $1 \geqslant h > 0$, Γ 是相对 Q_h- 分离的. 由引理 3.4 可知, 当 $\|SH_\psi(\phi - \tilde{\phi})\|_{L^1(S)} + \|SH_{(\phi-\tilde{\phi})}\psi\|_{W_S(C,L^1)}$ 取任意小时, Bessel 点列

$$\{\sigma(\gamma)(\phi - \tilde{\phi}) : \gamma \in \Gamma\}$$

的 Bessel 上界也可以取任意小. 因此, 由引理 2.8 知, 定理 1.3 的结论成立. □

致谢 对审稿人提出的宝贵建议表示衷心的感谢.

参考文献

1 Donoho D L. Wedgelets: Nearly minimax estimation of edges. Ann Statist, 1999, 27: 859–897
2 Candes E J, Donoho D L. Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. Technical Report. Department of Statistics, Stanford University, 1999
3 Candues E J, Demanet L. The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 1472–1528
4 Li J W, Wong M W. Localization operators for curvelet transforms. J Pseudo-Differ Oper Appl, 2012, 3: 121–143
5 Candues E J, Donoho D L. Continuous curvelet transform, I: Resolution of the wavefront set. Appl Comput Harmon Anal, 2005, 19: 162–197
6 Li J W. Sparsity of matrices of localization operators for curvelet transforms. J Pseudo-Differ Oper Appl, 2012, 3: 255–262
7 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image Representation. IEEE Trans Image Process, 2005, 14: 2091–2106
8 Kingsbury N. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. Appl Comput Harmon Anal, 2001, 10: 234–253
9 Pennec E L, Mallat S. Sparse geometric image representation with bandelets. IEEE Trans Image Process, 2005, 14: 423–438
10 Kutyniok G, Labate D. Resolution of the wavefront Set using continuous shearlets. Trans Amer Math Soc, 2009, 361: 2719–2754
11 Kutyniok G, Labate D. Shearlets Multiscale Analysis for Multivariate Data. Appl Numer Harmon Anal. Basel: Birkhäuser, 2012
12 Kutyniok G, Labate D. The construction of smooth Parseval frames of shearlets. Math Model Nat Phenom, 2013, 8: 82–105
13 Kutyniok G, Labate D. Construction of regular and irregular shearlet frames. J Wavelet Theory Appl, 2007, 1: 1–10
14 Kutyniok G, Lemvig J, Lim W-Q. Compactly supported shearlets. In: Springer Proceedings in Mathematics. New York: Springer, 2012, 163–186
15 Kittipoom P, Kutyniok G, Lim W-Q. Irregular shearlet frames: Geometry and approximation properties. J Fourier Anal Appl, 2011, 17: 604–639
16 Kittipoom P. Construction of compactly supported shearlet frames. Constr Approx, 2012, 35: 21–72
17 Kittipoom P. Irregular shearlet frames. Http://d-nb.info/1001858190/34, 2009
18 Grohs P. Continuous shearlet tight frames. J Fourier Anal Appl, 2011, 17: 506–518
19 Grohs P. Bandlimited shearlet frames with nice duals. SAM Report 2011-55, EIT Zurich, 2011

20 Grohs P. Continuous shearlet frames and resolution of the wavefront set. Monatsh Math, 2011, 164: 393–426
21 Li S, Shen Y. Shearlet frames with short support. ArXiv.org/abs/1101.4725, 2011
22 Dahlke S. Gabriele steidl and gerd teschke. Shearlet coorbit spaces: Compactly supported analysis shearlets, trace and embeddings. J Fourier Anal Appl, 2011, 17: 1232–1255
23 Dahlke S, Steidl G, Teschke G. Multivariate shearlet coorbit spaces and their structural properties. Appl Numer Harmon Anal, 2012, 86: 105–144
24 Dahlke S, Kutyniok G, Steidl G, et al. Shearlet coorbit spaces and associated Banach frames. Appl Comput Harmon Anal, 2009, 27: 195–214
25 Feichtinger H G, Sun W, Zhou X. Two Banach spaces of atoms for stable wavelet frame expansions. J Approx Theory, 2007, 146: 28–70
26 Feichtinger H G, Sun W. On a new Segal algebra. Monatsh Math, 1981, 92: 269–289
27 Feichtinger H G, Grobner K. Banach spaces of distributions defined by decompositions methods, I. Math Nachr, 1985, 123: 97–120

On sufficient conditions and stability of shearlet frame

JIANG ShenMing & JIANG ZeTao

Abstract In 2011, Kittipoom et al. introduced a new class of shearlet generators, and gave many good properties. For example, the new class of shearlet generators is dense in the space of square integrable functions and the shearlet frame generated by a member of the new class of shearlet generators possesses the strong HAP etc. In this paper, our main goal is to study sufficient conditions and the stability of shearlet frame. Specifically, we first adjust the definition of shearlet group introduced by Kittipoom et al. through referring to the definition of shearlet group introduced by Dahlke et al., and make each element of the new class of shearlet generators to be admissible. Secondly, we show that a function from the new class of shearlet generators generates shearlet frames for every sufficiently dense and relatively separated sequence. Finally, we prove that a frame generated by a function from the space remains a frame when the time, scale and shear parameters and the generating function undergo small perturbations. These conclusions make shearlet framework to possess great flexibility and practicality in engineering applications.

Keywords **shearlet group, shearlet, shearlet transform, shearlet frame**

MSC(2010) **42C15, 94A12**

doi: 10.1360/N012013-00160