中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 1039～1044
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

KLS 时间周期宇宙的物理性质

王增桂

聊城大学数学科学学院, 聊城 252059
E-mail: guigui1024@tom.com

收稿日期: 2009-02-18; 接受日期: 2009-03-05

摘要 在本文中我们探讨了由孔德兴、刘克峰及沈明构造的一个新的真空 Einstein 方程时间周期解的物理性质. 通过对这个解的 Penrose 图进行分析, 我们发现这个解与已知的真空 Einstein 方程的解是不同的.

关键词 时间周期解 类光曲线 Finkelstein 图 Penrose 图

MSC(2000) 主题分类 **83C05, 83C15, 83C75, 35C05**

1 引言

Einstein 方程的严格解在广义相对论与宇宙学的研究中起着非常重要的作用. 最典型的两个例子就是 Schwarzschild 解和 Kerr 解. 然而, 依然存在一些基本未解决的问题. 其一就是对于 Einstein 方程, 是否存在含有物理奇点 (例如黑洞) 的 "时间周期解". 在广义相对论中, 如果存在时间周期黑洞解, 就能为引力坍塌的最终状态提供一个合理的解释. 因此, 这仍是一个值得研究的课题.

最近, 孔德兴等人 [1−3] 首次构造了真空 Einstein 方程的严格时间周期解. 特别地, 孔德兴等人 [3] 构造了一个带有物理奇点的时间周期解. 这个解描述了一个带有 "黑洞" 的时间周期宇宙. 用球极坐标 (t, r, θ, ϕ), 其中 $t \in \mathbb{R}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ 并且 $x^0 = t,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \phi$.

在球极坐标 (t, r, θ, ϕ) 中, 度规形式为

$$ds^2 = \frac{16r^{3/2}(2-\sin t)}{(1+\sin t)^7}dt^2 + \frac{2r}{(1+\sin t)^4}dtd\phi - \frac{1}{\sqrt{r}(1+\sin t)^6}dr^2 - \frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2. \tag{1}$$

显然, 这个度规描述了一个时间周期时空, 我们称之为 KLS 时间周期宇宙. 如文献 [3] 所示, Riemann 曲率范数为

$$\mathbf{R} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{3(1+\sin t)^{12}}{4r^3} \tag{2}$$

是非奇异的, 除了 $r = 0$ 这个物理奇性之外. 并且当 $(1+\sin t) \to 0$ (即, $t \to 2k\pi - \pi/2\,(k \in \mathbb{Z})$) 时, $\mathbf{R}$ 为零. 另外, 这个解含有一些由超曲面 $t = 2k\pi - \pi/2\,(k \in \mathbb{Z})$ 构成的非本性奇点.

固定 θ 与 ϕ, 此时度规为

$$ds^2 = \frac{16r^{3/2}(2-\sin t)}{(1+\sin t)^7}dt^2 - \frac{1}{\sqrt{r}(1+\sin t)^6}dr^2.$$

引用格式: 王增桂. KLS 时间周期宇宙的物理性质. 中国科学 A, 2009, 39(8): 1039–1044
Wang Z G. Physical characters of KLS time-periodic universe. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0181-9

考虑 (t,r)-平面中的类光曲线:

$$\frac{16r^{3/2}(2-\sin t)}{(1+\sin t)^7}dt^2-\frac{1}{\sqrt{r}(1+\sin t)^6}dr^2=0,$$

则由上式得

$$\frac{dt}{dr}=\pm\frac{\sqrt{1+\sin t}}{4r\sqrt{2-\sin t}}.$$

因此, 类光线与光锥见图 1 (由文献 [3] 给出).

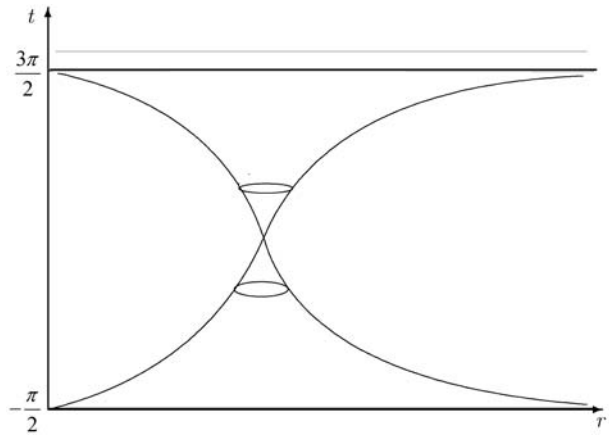

图 1　在 $\pi/2<t<3\pi/2$ 内的类光曲线与光锥

本文考虑这个新周期解的物理性质. 通过定义新的坐标构造这个解的 Penrose 图 [4−6], 从而可以研究周期宇宙时空的大尺度因果结构, 并可以在图中显示出共形无穷远以及奇点.

2　Finkelstein 图

不失一般性, 我们只考虑一个周期范围内的宇宙模型 $\mathscr{M}:-\pi/2\leqslant t\leqslant 3\pi/2,\ 0<r<\infty$. 定义

$$\tau=\int_{\pi/2}^{t}\sqrt{\frac{2-\sin\eta}{1+\sin\eta}}d\eta, \tag{3}$$

则

$$\tau=\begin{cases}-\infty, & t=-\pi/2,\\ 0, & t=\pi/2,\\ \infty, & t=3\pi/2,\end{cases} \tag{4}$$

即 $\tau\in[-\infty,\infty]$. 在 (τ,r,θ,ϕ) 坐标下, 度规对应的形式为

$$ds^2=\frac{16r^{3/2}}{(1+\sin t)^6}d\tau^2+\frac{2r}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}d\tau d\phi-\frac{1}{\sqrt{r}(1+\sin t)^6}dr^2-\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2. \tag{5}$$

接下来, 定义

$$r^*=\int\frac{1}{4r}dr=\frac{1}{4}\ln r.$$

则

$$v=\tau+r^*=\tau+\frac{1}{4}\ln r \tag{6}$$

为超前零坐标, 而

$$w = \tau - r^* = \tau - \frac{1}{4}\ln r \tag{7}$$

为延迟零坐标. 在坐标 (v, r, θ, ϕ) 下, 度规有类似 Eddington-Finkelstein 形式 [4]

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{16r^{3/2}}{(1+\sin t)^6}\left(dv^2 - \frac{1}{2r}dvdr\right) + \frac{2r}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}\left(dv - \frac{1}{4r}dr\right)d\phi \\ & -\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2. \end{aligned} \tag{8}$$

时间周期解的这种表示仍然有奇异特征, 即它不是时间对称的. 我们可以从 Finkelstein 图 (即图 3) 中清晰地看到这一点. 由 Finkelstein 图, 我们可知 $r = 0$ 是类光本性奇点. Finkelstein 图是时空中 (θ, ϕ) 为常数的截面, 任一点表示拓扑结构为 $ds^2 = -\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2$ 的二维曲面. 在图 2 中, 我们给出一些光锥和径向类光测地曲线.

如果我们用坐标 w 代替 v, 则度规形式为

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{16r^{3/2}}{(1+\sin t)^6}\left(dw^2 + \frac{1}{2r}dwdr\right) + \frac{2r}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}\left(dw + \frac{1}{4r}dr\right)d\phi \\ & -\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2. \end{aligned} \tag{9}$$

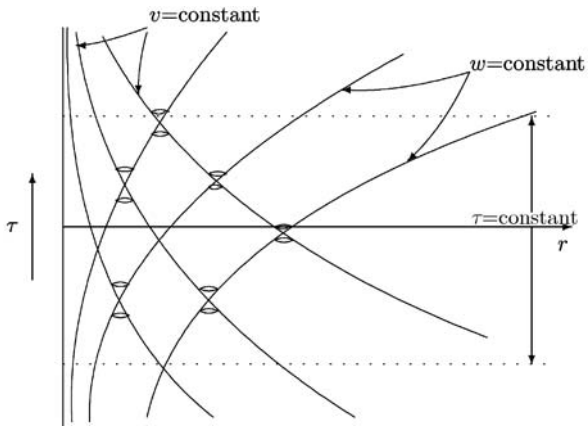

图 2 由 (τ, r) 坐标得到的 (θ, ϕ) 常数截面

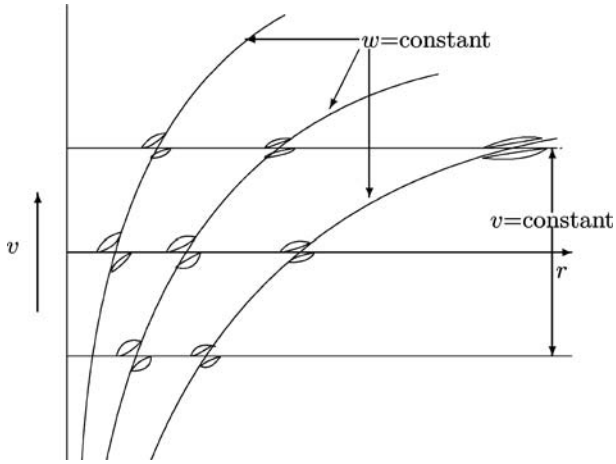

图 3 由 (v, r) 坐标得到的 **Finkelstein** 图

3 KLS 时间周期宇宙的物理性质

通过选取由 (6) 和 (7) 定义的超前和延迟零坐标 v, w, 我们可以得到另一个坐标系, 度规相应地变为

$$ds^2 = \frac{16r^{\frac{3}{2}}}{(1+\sin t)^6}dvdw + \frac{r}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}(dv+dw)d\phi - \frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2, \tag{10}$$

其中 t, r 分别由下式给出

$$\frac{1}{2}(v+w) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t}\sqrt{\frac{2-\sin\eta}{1+\sin\eta}}d\eta, \quad v-w = \frac{1}{2}\int\frac{1}{r}dr = \frac{1}{2}\ln r. \tag{11}$$

它代表零共形平直坐标下的二维空间 (θ, ϕ 为常数), 因为度规为 $ds^2 = dvdw$ 的空间是平直的. 使这个二维空间保持这种共形平直的两个类光坐标表示的最一般的坐标变换是 $v' = v'(v)$, $w' = w'(w)$, 其中 v' 与 w' 是任意的 C^1 函数, 得到的度规为

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{16r^{\frac{3}{2}}}{(1+\sin t)^6}\frac{dv}{dv'}\frac{dw}{dw'}dv'dw' + \frac{r}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}\left(\frac{dv}{dv'}dv' + \frac{dw}{dw'}dw'\right)d\phi \\ & -\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2. \end{aligned} \tag{12}$$

定义

$$t' = \frac{1}{2}(v'+w'), \quad x' = \frac{1}{2}(v'-w'). \tag{13}$$

则度规的形式为

$$ds^2 = F^2(t',x')(dt'^2 - dx'^2) + G(t',x')dt'd\phi - H(t',x')dx'd\phi - L^2(t',x')d\theta^2. \tag{14}$$

函数 v', w' 的选取决定度规的具体形式. 我们选取 $v' = \exp(2v)$, $w' = -\exp(-2w)$, 于是 r 由方程

$$t'^2 - x'^2 = -r \tag{15}$$

确定, 且 t 由方程

$$t' + x' = -(t'-x')\exp(4\tau) = -(t'-x')\exp\left(4\int_{\pi/2}^{t}\sqrt{\frac{2-\sin\eta}{1+\sin\eta}}d\eta\right) \tag{16}$$

确定. 进而 F, G, H 与 L 分别由下式给出

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{4\sqrt{r}}{(1+\sin t)^6}, & G &= \frac{x'}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}, \\ H &= \frac{t'}{(1+\sin t)^4}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2-\sin t}}, & L^2 &= \frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \tag{17}$$

对坐标 (t', x', θ, ϕ) 在 $t'^2 - x'^2 < 0$ 条件下定义的流形 $\mathscr{M}^*$, 函数 r 和 F^2, L^2 为正且解析. 用 (14) 定义度规 g^*, 则 $x' > |t'|$ 定义的 $(\mathscr{M}, g^*)$ 的区域 I 等距于 $(\mathscr{M}, g)$. 由图 4 知我们可以看到存在另一个由 $x' < -|t'|$ 定义的区域 I', 同样等距于 $(\mathscr{M}, g)$. 我们称之为 KLS“喉”另一端的另一个渐近平直宇宙.

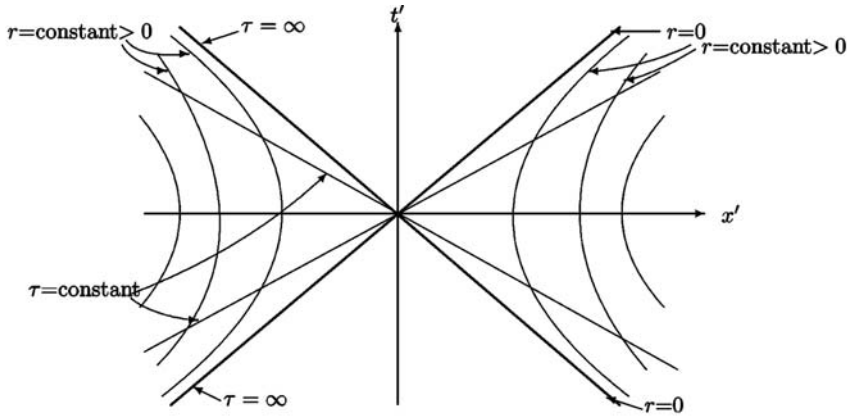

图 4　Kruskal 图, 显示了时间周期宇宙空间区域 I 和 I', 以及 $r<0$ 的区域

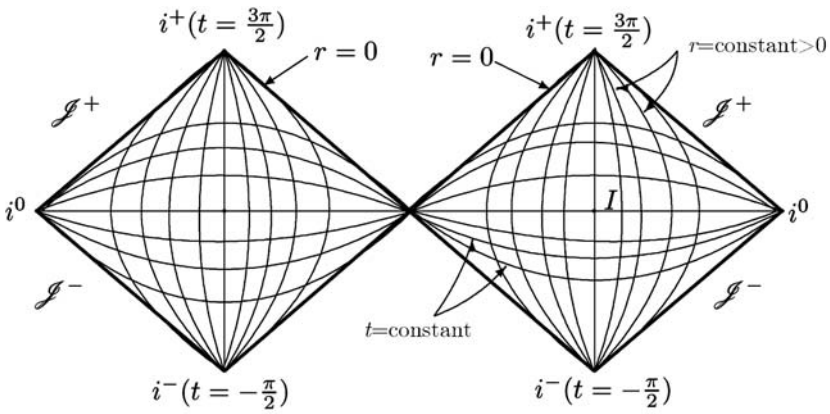

图 5　KLS 时间周期宇宙的 Penrose 图

为了研究时间周期时空的无穷远处的结构, 我们可以结合 (1) 通过定义新的超前和延迟零坐标来构造 Penrose 图

$$v''=\arctan(v'),\quad w''=\arctan(w'), \tag{18}$$

其中

$$-\pi<v''+w''<\pi,\quad 且\quad -\pi/2<v''<\pi/2,\quad -\pi/2<v''<\pi/2.$$

在 Penrose 图中, 时空结构由共形坐标 (14) (类光曲面总是由斜率为 ±1 的直线表示) 并且整个时空映射为一个有限图. 因为类光曲面是由一种简单的方式表示, 因果关系可以直观地在图中给出. Penrose 图中的每一点 (τ,r) 代表远处观测者在 τ (或 t) 时刻看到的一个拓扑结构为

$$ds^2=-\frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{r}}d\theta^2$$

的二维曲面. 图 5 中的 Penrose 图完整地阐述了带有 “黑洞” 时间周期解的整体结构.

致谢　作者感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Kong D, Liu K. Time-periodic solutions of the Einstein's field equations I: General framework. *Sci China Ser A*, **52**(11), to appear (2009)

2 Kong D, Liu K, Shen M. Time-periodic solutions of the Einstein's field II. ArXiv: 0807.4981

3 Kong D, Liu K, Shen M. Time-periodic universe. ArXiv: 0809.0046

4 Hawking S, Ellis G. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press, 1973

5 Penrose R. Structure of space-time. In: Battelle Rencontres, by Dewitt C, Wheeler J A. eds. New York: Benjiamin, 1968, 121–235

6 Stephani H, Kramer D, MacCallum M, et al. Exact solutions of Einstein's field equations 2nd Ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2003