

用有限单元法研究曾侯乙编钟双音激发过程

张 怀 严珍珍 杨长春 石耀霖 *

(中国科学院研究生院, 北京 100049; 中国科学院地质与地球物理所, 北京 100029. * 联系人, E-mail: shiy1@gucas.ac.cn)

摘要 曾侯乙编钟是我国宝贵的文物, 它具有敲击不同部位时会发出不同音调声音的双音特性. 从弹性波动理论基础出发, 采用有限单元数值方法, 模拟曾侯乙编钟具有扁圆截面特殊几何形状下, 以不同方式敲击时, 弹性波传播和自由振荡激发的过程. 通过对数值模拟激发振荡峰值分布结果的观察和对钟体的频谱分析, 认识曾侯乙编钟双音激发物理过程的特征.

关键词 曾侯乙编钟 双音特性 有限单元法 自由振荡 波动方程

曾侯乙编钟的出土是我国考古史上的重大发现. 它在地下沉睡了 2400 多年, 是迄今为止出土数量最多、重量最重、音律最全、气势最宏伟的一套古代编钟, 堪称“编钟之王”, 是大型的国宝级文物之一.

曾侯乙编钟带给我们的不仅仅是美妙的音乐, 也带给了我们很多难解之谜. 青铜编钟是古代一种很重要的合奏乐器, 曾侯乙编钟经过刻意设计, 与一般钟横截面为圆形不同, 它的横截面为扁形, 敲击方式不同时能发出 2 个不同的音调. 一般认为由于钟的正面与侧面, 其内距不对称, 因此一个独立的编钟单位有 2 个基频, 可以得到通常为小三度或大三度音程的 2 个乐音 [1,2], 使人能够听到高低不同的 2 种声音, 这就是编钟的双音特性.

几十年来, 很多音乐、考古、声学、物理学、冶金及铸造等方面的专家和学者对该编钟的双音特性进行了大量的研究工作. 他们大多数都是基于对钟体本身的结构和特性进行物理研究, 例如华觉明 [3] 分析了青铜编钟的复杂钟腔结构和发声机制; 冯光生 [4] 使用原生双音、铸生双音、铸调双音 3 个概念, 从双音技术的角度, 对双音钟的界定、双音技术的形成和应用范围等问题进行了讨论; 韩宝强 [2] 依据多年对编钟音响测量分析的实践经验, 提出编钟音乐性能的判定方法, 旨在推进编钟音乐性能研究和检测手段的现代化; 严燕来等人 [1] 基于圆柱形模型中弹性驻波的理论振型和椭圆形柱面的刚性和曲率分布特征, 对古编钟的一钟双音和短延音等声学特性进行了分析, 并分析了钟枚的长短对声音的影响作用; 王大钧等人 [5] 用有限单元法分析了可能的振型及形成双音的基础.

对于编钟固有频率的各种振型的讨论 [1,4] 虽然能解释产生双音发音的基础, 但仅仅从固有频率出发, 无法认识曾侯乙编钟因敲击位置不同而激发双音的物理过程. 我们目前尚未见到直接以解析方法或数值模拟分析来研究编钟双音激发的物理过程的工作. 本文将用有限单元数值方法, 模拟敲击编钟的不同部位时弹性波的传播及激发钟体振荡的全过程, 并对敲击不同部位激发产生的波动进行频谱分析, 以便进一步认识编钟双音激发产生的机理.

1 模拟编钟的有限元模型和计算方法

如前所述, 本文将用有限单元法模拟敲击钟体不同部位后弹性波在钟体内的传播、反射、叠加, 最后激发钟体振荡的过程. 在解决波动问题的产生和传播问题上, 有限单元法具有很大的优越性 [6~11], 它不受求解区域的几何形状限制, 也不需要特殊的边界条件处理. 但为了精确模拟钟体的几何形状和钟体内波的传播, 空间上将需要超过百万至千万的三维有限元网格, 求解时每个时间步的步长也不能过大, 因此数值模拟计算量非常大, 对计算的算法和软件实现提出了很高的要求.

本文的问题是求解编钟这样一个扁圆体几何模型的波动问题, 依据弹性介质的波动方程 [11~14]:

$$\rho \ddot{u} + c \dot{u} - (\mu \nabla \cdot (\nabla u) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u)) + f = 0, \quad (1)$$

其中 ρ 为介质密度; $\ddot{u}_i$ ($i=1, 2, 3$) 为 3 个方向上的加速度分量, $\dot{u}_i$ 为速度, u_i 为位移; f_i 为体力分量; c 为与介质的品质因子成反比的一个系数, 考虑钟的震荡终将衰减, 因此包含此阻尼项. (1) 式中的应力应变关系满足虎克定律:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2)$$

式中, C_{ijkl} 为弹性系数, 与介质的物性有关; ε_{ij} 为体应变; σ_{ij} 为体应力分量.

应变和位移之间的几何关系为

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right), \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (3)$$

对于各向同性介质, 弹性模量可以简化为 2 个独立的弹性参数, 即 Lamé 常数 λ 和 μ , 其与 C_{ijkl} 关系为

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号.

对(1)式采用基于 Galerkin 方法的有限元求解方法, 进行空间离散化后, 写成矩阵形式可得

$$MA + CV + SU = F, \quad (5)$$

其中 M 为质量矩阵, A 为加速度向量, V 为速度向量, U 为位移向量, C 为阻尼矩阵, S 为刚度矩阵, F 为载荷向量.

我们采用速度法的时间离散格式:

$$MA^{t+\Delta t/2} + CV^{t+\Delta t/2} + SU^{t+\Delta t/2} = F^{t+\Delta t/2}, \quad (6)$$

由

$$A^{t+\Delta t/2} = (V^{t+\Delta t} - V^t) / \Delta t, \quad (7)$$

$$V^{t+\Delta t} = 2(U^{t+\Delta t} - U^t) / \Delta t - V^t, \quad (8)$$

$$V^{t+\Delta t/2} = (U^{t+\Delta t} - U^t) / \Delta t, \quad (9)$$

$$U^{t+\Delta t/2} = (U^{t+\Delta t} + U^t) / 2, \quad (10)$$

综合(7)~(10)式可将(6)式改写为

$$\begin{aligned} & \left(M + C \frac{\Delta t}{2} + S \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \right) U^{t+\Delta t} \\ &= F^{t+\Delta t/2} \frac{\Delta t^2}{2} + MU^t + MV^t \Delta t + CU^t \frac{\Delta t}{2} - SU^t \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

本文采用显式求解算法^[15], 利用有限元模拟技术, 对该问题进行了详细的数值模拟和分析.

2 编钟模型及数值模拟结果

本文采用有限元方法模拟编钟的双音特性时, 为了突出重点, 模型主要考虑了其扁型这一主要因

素. 对钟枚等其他影响因素, 虽然它在稳定基频、抑制噪音等方面具有重要作用^[1,2], 但不作为本文章讨论的重点. 另外, 对于钟体上的花纹等相关因素我们也将以后考虑.

图 1 是模型编钟的几何形状图, 分别是该几何造型在 x - y 平面、 x - z 平面和 y - z 平面上的几何投影, 其中底面椭圆形长轴长约 0.55 m; 短轴长约 0.35 m; 模型高(钟铤长)约为 0.4 m; 模型横接底面长轴两端处钟壁厚约为 24 mm, 短轴两端处钟壁厚约为 15 mm. 在钟体其他比例因素不变的情况下, 改变钟壁的厚度, 激发出的音律基频也会随之改变^[4], 但本文暂时不研究钟厚变化的影响. 在用有限元方法模拟数值分析时, 考虑编钟的材料是青铜质, 应用的一些物性参数如下: 密度大小为 8.9 g/cm³; 泊松比为 0.25; 杨氏模量为 1.2×10^{11} ; 阻尼常数为 0.02; 不考虑重力等因素影响. 除钟上端部 4 个节点位移固定外, 其余边界均为自由边界条件, 表面上正应力和剪应力恒为 0.

图 2 是模型的切片视觉图, 可以观察到编钟的几何模型的内腔视觉效果. 图 3 是模型的网格化结构图, 由于模型形状复杂, 我们采用的是四面体网格划分, 因为四面体网格划分能够灵活有效地模拟复杂不规则边界, 更好地模拟出编钟的真实结构. 网格密度也是影响模拟结果的重要因素, 一般情况下, 网格间距越小, 计算精度越高, 频散效应也越小, 但是也会花费更多时间和占用更大计算内存, 权衡问题的实际情况, 此例子总节点数为 88178 个, 总单元数为 424699 个.

根据激发波在铜质材料中的传播速度 3750 m/s, 网格化后最小网格距约为 2.3 mm, 由网格距与时间步长选取之间的关系^[12,13], 此问题模拟波传播时时间步长 Δt 取为 1×10^{-7} s.

模拟敲击造成的边界力取形状近似为 Ricker 子波(图 4)脉冲型的时间函数的正值部分, Ricker 子波的一般解析表达式为

$$f(t) = [1 - (\pi f_0 t)^2] \exp[-(\pi f_0 t)^2], \quad (12)$$

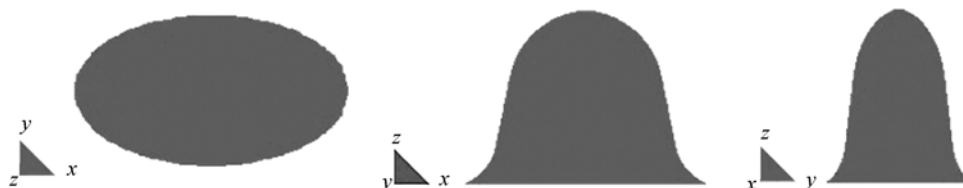


图 1 模型编钟几何模型的俯视图、正视图和侧视图



图2 模型的切片视图

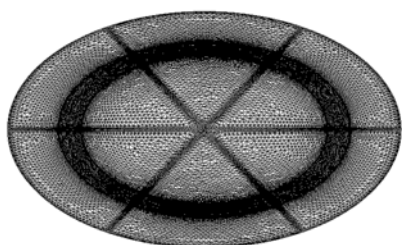


图3 模型的网格化结构

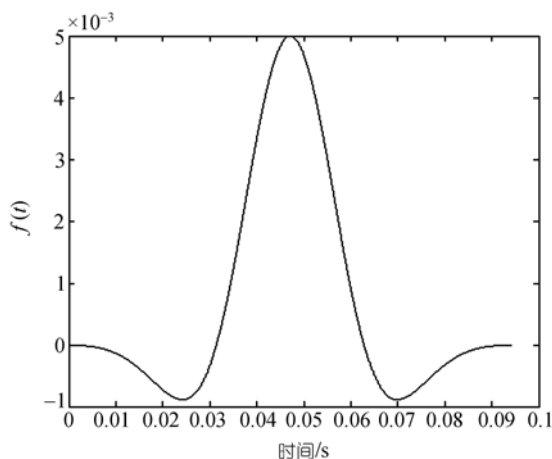


图4 Richer子波的波形图

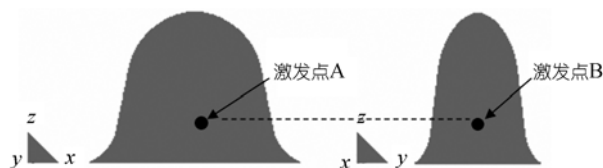


图5 几何模型上不同的激发点正视图

其中, f_0 为 Richer 子波的主频, 本研究中取 $f_0 = 22.22$ Hz. 2种不同的敲击位置如图5, 2个不同敲击点上分别给定同样的 Richer 子波脉冲.

图6是在A和B两个不同点敲击激发波在扁型钟体中传播的结果对照图. 图6的前6张图给出最初

0.1 ms 的波动传播情况, 可以看出敲击时波的传播, 在第4幅图中可以看到波在钟外壁和内壁之间多次反射而形成的环状条纹以及波在传到下边缘时的反射等情况; 后4张图显示了10 ms 过程中的几个图像, 可以看出波的传播和叠加逐步形成按特定基频为主的振荡. 图6中可以明显看出, 激发位置不同, 产生的激发波振型不同. 敲击A激发的振荡频率成分丰富, 震荡图案花样复杂, 反映了除基频外, 其余泛音也很丰富. 而敲击B激发的振荡成分较A相对简单, 震荡图案比较光滑, 下缘振动有起伏, 对应的是基频的震荡. 模拟还表明这些振型是三维的, 不能简单地以二维模型描述. 虽然我们这里没有足够的篇幅详细展现激发的全部过程, 但不同敲击方式激发不同三维振荡的基本物理图像已得到很清楚的显示.

图7是分别敲击不同点A和B时, A和B处位移分别随时间变化的时间位移波形图. 可以看出, 在同等敲击力下, 敲击A时造成的振幅较大, 频率成分也比较丰富; 敲击B时造成的振幅则较小, 除基频外, 其余频率成分比较单调. 二者的声波振动可以看出有明显的不同. 图8是对图7中数据进行快速 Fourier 频谱的分析结果. 在模拟编钟激发的过程中, 编钟从开始振动到形成共振有一时间段, 而这一时间段中起主要作用的是 Richer 子波脉冲, 所以我们在进行频谱分析时, 不考虑这一时间段的数据而直接对编钟形成谐振后的数据进行频谱分析. 由于人耳听觉频率范围是 20 Hz~20 kHz, 在模拟编钟双音特性时, 对激发出的波进行频谱分析, 我们也只给出人耳比较敏感的频段范围的结果. 从图8中可以明显的看出对于同一个模型编钟, 敲击同一个点, 在不同位置记录到的频谱成分是不一样的; 敲击两个不同位置的点, 在同一个位置记录到的频谱成分也是不一样的. () 在敲击B时(图8(c)和(d)), 振幅最大的是基频(212 Hz); 在敲击A时(图8(a)和(b)), 振幅最大的是424 Hz的振荡. () A的频率成分比较丰富, 图8中比较明显的峰值出现在212.3, 424.6, 530.8 Hz, 在636.9, 1061.6, 1167.7, 2017.0, 2335.5, 2653.9和3609.3 Hz等也都存在较强的泛音. 在敲击B时, 形成的泛音就没有那样丰富, 基频在212.3 Hz, 还存在636.9 Hz的振动等, 但高频泛音总的看来不很发育. () 基频为212.3 Hz, 然后有424.6 Hz的倍频, 636.9 Hz三倍频等的泛音, 在物理上是合理的. () A和B

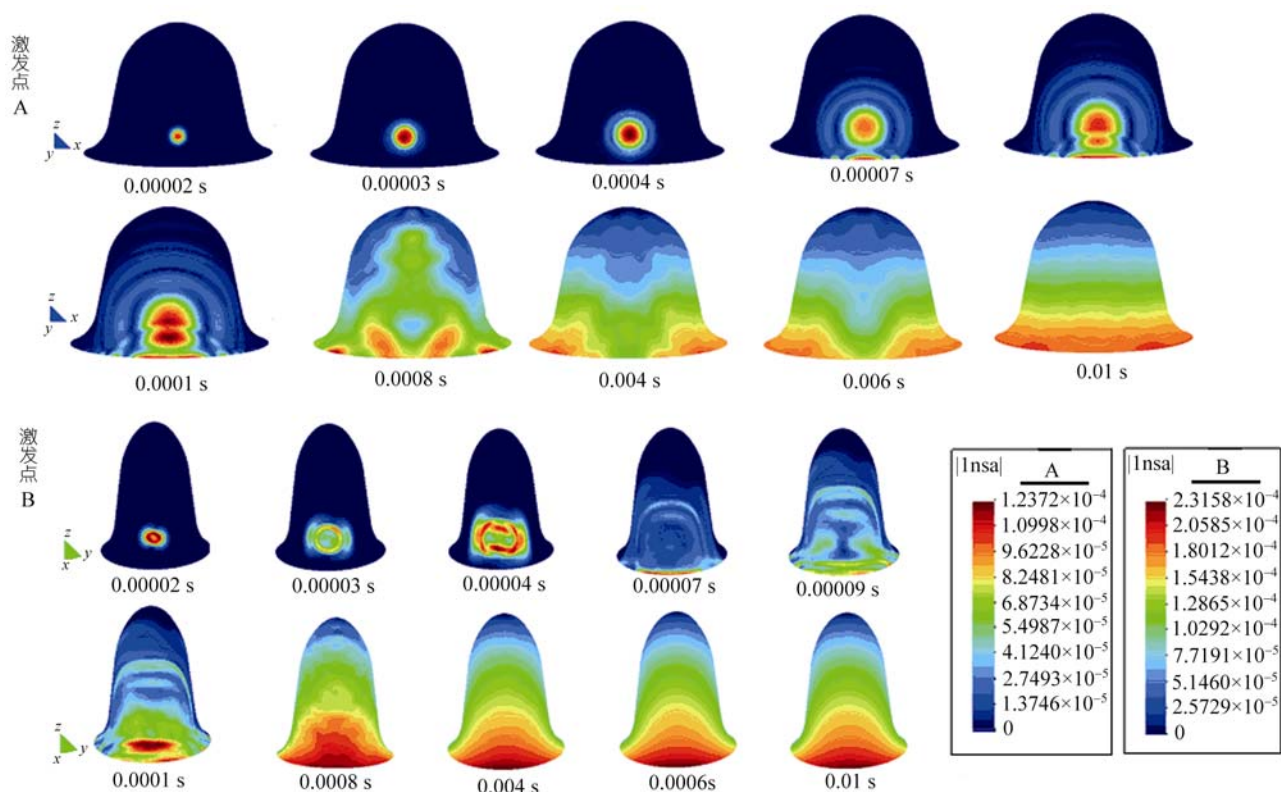


图 6 A 和 B 两激发点在同一时刻的波动图(位移总量等值线图)对照

两种情况, 有一些频率共同出现, 也有一些振荡只在 A 中被激发或只在 B 中被激发。总之, 频谱分析清楚显示了不同激发方式下的双音特性。

3 讨论

首先, 本文的初步计算显示了用有限单元法数值模拟曾侯乙编钟在不同敲击方式下双音的激发过程是可行的。振动图案的时间变化和比较、振动曲线的比较和频谱分析结果, 均显示了数值计算可以用于分析不同敲击方式激发双音的物理过程, 使我们可以对解释双音之谜提供一条定量化的、可视化的新途径。敲击 A 处时, 由于该处曲率小、刚度小、易变形, 因此振动频率丰富, 424.6 Hz 的频率成为主要成分; 敲击 B 处时, 由于该处曲率大、刚度大、不易变形, 因此振动频率比较单调, 212.3 Hz 为主要成分。这些计算结果在物理上是合理的。计算的振动频率、A 和 B 存在共同成分, 也存在不同成分, 特别是基频 212.3 Hz 及其倍频 424.6 Hz 在 A 中的出现和占主导地位、其三倍频在 B 中的出现等, 定量地进一步显示了数值计算模拟结果的合理性。

尽管我们没有足够的篇幅来详细讨论振荡的激发过程, 但可以看出, 钟的振荡基频和主要低频振荡在一定时间与初始敲击的 Richer 子波频率无关, 主要与弹性波的传播、反射和叠加、干涉有关。编钟存在一定的振荡模式, 在敲击不同点时, 有时形成相长干涉, 一些振型得以发育; 有时形成相消干涉, 一些振型被压制。

真正的曾侯乙编钟, 其取材要求严格、钟腔结构复杂, 才保证其高质量的音乐特性。本文采用有限元方法模拟编钟的双音特性时, 模型主要考虑了其横截面是椭圆形这一主要因素, 探讨了不同激发点的影响。而对频率特性与钟体的材料、精细几何形状、铣长、装饰图案等关系, 尚未展开研究。我们的模拟也仅对一个钟体进行了分析, 如何尺寸和造型才能使整套编钟成为和谐的乐器, 也需要做大量的研究。我们的祖先以惊人的聪明才智、设计和制造了曾侯乙编钟, 甚至被称为“世界第八奇迹”, 我们今天也应该能够运用先进的计算技术, 进一步揭开编钟的奥秘。

数值模拟分析结果表明, 编钟的双音特性主要

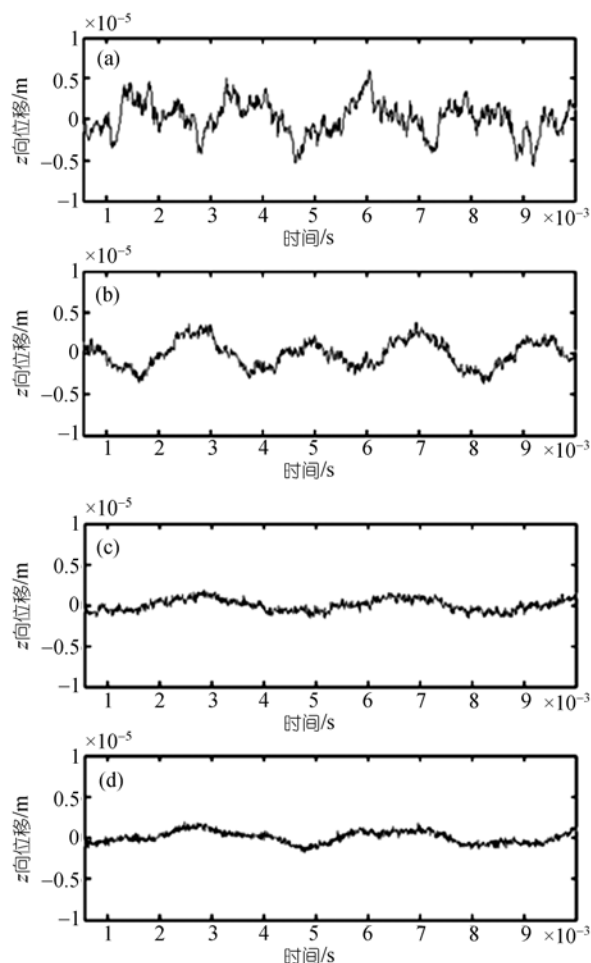


图 7

(a) 敲击 A 点时 A 的振动图; (b) 敲击 A 点时 B 的振动图; (c) 敲击 B 点时 A 的振动图; (d) 敲击 B 点时 B 的振动图

由编钟的几何形状和激发部位来控制。不同科学领域内有许多问题在实质上是相通的。我们知道, 特大地震, 如 1960 年的智利大地震及 2004 年 12 月 26 日印度尼西亚苏门答腊大地震, 都激发了地球的自由振荡, 不同的地震激发的地球自由振荡情况不同、同一地震在地球不同部位造成的振荡也不相同。本文的方法已经显示了敲击在不同部位引起的振荡位移是不同的, 原则上也可以运用于大地震激发的横向不均匀地球内部自由振荡激发问题高精度的数值模拟, 从而对地球在地震触发下自由振荡规律及其影响的这一重要科学问题做更深入的解释。

由于模拟过程中各种条件的限制对模拟结果都有一定的影响, 网格单元数及计算时间长度的限制, 都会给模拟结果带来一定的误差。初步计算已经表明利用有限单元法计算波的传播和激发自由振荡过

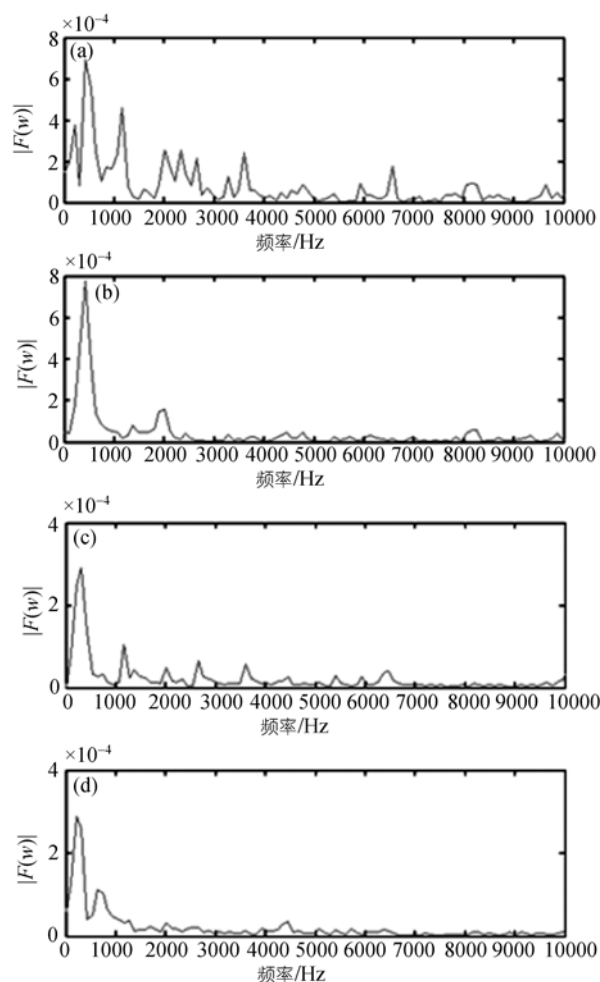


图 8 敲击时激发的振动的频谱分析结果

(a) 敲击 A 点时 A 点振动的频谱分析; (b) 敲击 A 点时 B 点振动的频谱分析; (c) 敲击 B 点时 A 点振动的频谱分析; (d) 敲击 B 点时 B 点振动的频谱分析

程的科学思路是可行的, 今后如果模拟真正复杂形状的编钟, 需要开展更大规模的并行有限元计算^[16,17]。在并行计算中采用区域分解法, 首先将整个物理模型分解为若干不相重叠的子区域, 相应的有限元模型也根据所选并行算法做离散化处理, 将每个子区域模型独立分配给一个计算进程处理, 并行地进行单元计算, 分布式总体刚度矩阵合成计算和并行大规模线性系统的求解。而各个子区域之间的内边界黏结条件则借助于针对于不同并行算法相应的计算进程之间信息交换与迭代求解来完成。目前, 我们已经完成了并行程序的调试, 即将在今后进一步研究工作中得以应用。

4 结论

本文基于弹性波动理论用有限单元法进行数值

计算,模拟了仿曾侯乙编钟模型在不同敲击部位下振荡的激发过程,通过对敲击不同部位时激发波动的传播图案、对钟体质点振动位移的时间变化记录和对振荡曲线的频谱分析等多方面分析,有效地显示了曾侯乙编钟不同的敲击部位产生了 2 种不同频率特性的乐音的物理过程以及编钟的双音特性通过相长与相消干涉的实现。

曾侯乙编钟让我们不得不折服于我国古代先人的聪明与智慧,它吸引了无数的音乐爱好者和科学爱好者对它的研究兴趣。到目前为止,我们对此编钟的研究远未结束,它极其复杂的内腔结构需要 we 更深层地认识和进一步的研究工作。另外,我们还将对钟体的材料组分、厚度、内部的复杂结构及钟体表面上的钟枚、花纹等相关因素继续进行研究分析。我们相信,各个学科的综合努力将有助于进一步揭开曾侯乙编钟的一系列难解之谜。

致谢 感谢 Y. Ricard 的帮助和两位审稿人的建设性意见。

参 考 文 献

- 1 严燕来,孔令达,柴康敏,等. 中华古编钟的乐钟性质研究. 大学物理, 2004, 23(2): 53—57
- 2 韩宝强. 双音钟音乐效能之检测. 乐器, 2002, 7: 18—22
- 3 华觉明. 从陶寺铜铃到中华和钟——双音青铜编钟的由来、衍变和创新. 清华大学学报, 2000, 15(5): 72—79
- 4 冯光生. 周代编钟的双音技术及应用. 中国音乐学, 2002, 1: 40—54
- 5 王大钧,陈健,王慧君. 中国乐钟的双音特性. 力学与实践, 2003, 25(4): 12—16
- 6 张永刚. 地震波场数值模拟方法. 石油勘探. 2003, 42(2): 143—148
- 7 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003. 14—253
- 8 Li X, Zhou H. Partition of unity finite element method for short wave propagation in solids. Appl Math Mech, 2005, 26(8): 1056—1063[DOI]
- 9 Liu Y, Qiao A, Feuchter D, et al. Finite element method on numerical simulation of stratum corneum's penetration property. Appl Math Mech, 2006, 27(4): 469—475[DOI]
- 10 王琥,李光耀,钟志华. 有限元并行计算中网格自动分区的优化. 工程力学, 2005, 22(增刊): 46—51.
- 11 胡德绥. 弹性波动力学. 北京: 地质出版社, 1989. 1—122
- 12 Komatitsch D, Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. Geophys J Int, 1999, 139: 806—822[DOI]
- 13 Komatitsch D, Tromp J. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-. Geophys J Int, 1999, 149: 390—412[DOI]
- 14 Thompson L L, Huan R. Finite element formulation of exact non-reflecting boundary conditons for the time-dependent wave equation. Int J Numer Meth Eng, 1999, 45: 1607—1630[DOI]
- 15 寇哲君,程建钢,黄文彬,等. 结构动力分析显隐式混合积分并行算法及实现. 清华大学学报(自然科学版), 1999, 39(4): 21—24
- 16 刘耀儒,周维恒,杨强,等. 三维有限元并行计算及其工程应用. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(14): 2434—2438
- 17 陈国良. 并行计算——结构·算法·编程. 北京: 高等教育出版社, 2003. 1—280