Does Poincaré's test identify spheres in four-dimensional space?

四维光滑 Poincaré 猜测

邓少雄, 朱熹平*

中山大学数学学院, 广州 510275

* 联系人, E-mail: stsxp@mail.sysu.edu.cn

2017-01-03 收稿, 2017-06-08 修回, 2017-06-10 接受, 2017-11-22 网络版发表

摘要 首先讨论更为熟悉的三维Poincaré猜测, 它的解是现代几何分析的一个主要成果, 这启发了本文中给出的光滑四维Poincaré猜测的精确陈述. 然后解释流形上的拓扑结构与光滑结构之间的差异以及 Donaldson 利用 Yang-Mills 方程瞬子解定义四维流形微分不变量的开创性工作. 最后, 给出了尝试解决该猜想的一些新方法.

关键词 2-连通, 微分同胚, 标准四维球面, Ricci 流, 微分不变量

Science 杂志上第123问题叙述如下:

“Poincaré 试验能辨认出四维球面吗?”

你可用一条细绳捆住一个油炸圈饼, 但捆不住一个球面. 数学理论证明这个实验可确信地从所有三维物体中辨认出三维球面. Henri Poincaré 猜测这原理对四维物体也成立, 但至今仍未被证实”.

我们现对这问题的具体内涵和发展现状解读如下:

油炸圈饼的形状是环面. “可用一条细绳捆住一个油炸圈饼, 但捆不住一个球面”的数学表达为: 球面上的任何一条闭曲线可在球面上连续地形变收缩为一点, 而环面上存在某闭曲线永远不能在环面上连续地形变收缩为一点(图1).

为更准确地描述这问题, 我们引进一些数学术语. 在数学上通常称一个 N 维物体为一个 N 维闭流形 (这里 N 为自然数). 如果一个流形上任何一条闭曲线均可连续地形变收缩为一点, 则称这流形是单连通的. 我们已经看到一个二维球面是单连通的. 显然一个椭球面也是单连通的. 容易看出, 椭球面与球面之间可建立一个 1-1 的连续映射, 这时数学上称椭球面与球面是同胚的. 更一般地, 如两个流形之间存在 1-1 的连续映射, 则称这两个流形是同胚的. 如果同

胚映射还是光滑的, 则称这两个流形是微分同胚的.

Poincaré 实验的数学表达是: 每个单连通的二维闭流形同胚于二维球面 (这结果的严格数学证明早于 1863 年由 Mobius 给出). 在 1904 年, Poincaré 提出如下著名问题:

三维 Poincaré 猜测: 是否每个单连通的三维闭流形必同胚于三维球面?

1982~2002 年, Hamilton 引进了 Ricci 流方法, 并建立了利用 Ricci 流解决 Poincaré 猜测的研究框架. 2002~2003 年, Perelman 在互联网上贴出 3 篇论文, 简略地给出了完成 Hamilton 框架的论证. 随后于 2006 年, 这证明的全面细节分别由 Cao 和 Zhu^[1], Morgan 和 Tian^[2], Kleiner 和 Lott^[3] 独立地给出. Perelman 因此工作获 2006 年 Fields 奖. 从而经历近百年来许多数学家的努力, Poincaré 的这个著名问题已被正面回答 (即, Poincaré 实验可以从所有三维物体中辨认出三维球面).

本文主要问题“Poincaré 实验能辨认出四维球面吗?” 中“Henri Poincaré 猜测这原理对四维物体也成立, 但至今仍未被证实”的具体含义是什么? 难道说: 每个单连通的四维闭流形必同胚于四维球面? 这显然不对! 例如 $S^2 \times S^2$ 和 CP^2 都是单连通的四维闭流形,

引用格式: 邓少雄, 朱熹平. 四维光滑 Poincaré 猜测. 科学通报, 2017, 62: 3807~3810

Deng S X, Zhu X P. The four-dimensional smooth Poincaré conjecture (in Chinese). Chin Sci Bull, 2017, 62: 3807~3810, doi: 10.1360/N972017-00962

图1 可用一条绳捆住一个油炸圈饼,但捆不住一个球面
Figure 1 You can hold a doughnut by a string, but not a sphere

但它们都不同胚于四维球面 S^4 .

让我们重新审视Poincaré试验. 在一个二维或三维流形上, Poincaré试验是考察是否每条闭曲线(即落在流形上的 S^1)都可在流形上连续地形变收缩为一点. 在四维流形上, Poincaré试验还需进一步考察是否每个二维球面(即落在流形上的 S^2)都可在流形上连续地形变收缩为一点. 在数学上, 如果一个单连通流形具有把每个二维球面连续地形变收缩于一点的性质, 则称这流形是2-连通的. 本文主要问题似乎可表达为:

四维(拓扑)Poincaré猜测: 是否每个2-连通的四维闭流形必同胚于标准四维球面?

然而, 这猜测已被Freedman^[4]于1982年证明成立. Freedman因此获得了1986年的Fields奖. 这样, 我们认为本文主要问题的具体含义为:

四维光滑Poincaré猜测: 是否每个2-连通的四维闭流形必微分同胚于标准四维球面?

本文主要问题与Freedman已经证明了的四维(拓

扑)Poincaré猜测的唯一区别在于把“同胚”换成“微分同胚”. 这究竟有多少差距?

1952年, Moise^[5]证明了每个维数 ≤ 3 的闭流形上微分结构是唯一的. 换言之, 如果两个三维(或二维)流形是同胚的话, 那么它们也是微分同胚的. 所以对于三维Poincaré猜测, “同胚”与“微分同胚”是无区别的. 但另一方面, 1956年Milnor^[6]发现存在七维怪球面, 怪球面同胚于标准球面但不微分同胚于标准球面. 随后于1963年, Kervaire和Milnor^[7]证明了一个 N 维球面上的微分同胚类形成一个结合半群 S_N , 并且当 $N \neq 4$ 时 S_N 是有限Abel群. 本文主要问题等价于问四维球面上的微分结构是否唯一. 这恰好是Kervaire和Milnor所不能回答的维数.

现讨论四维闭流形上微分结构的唯一性问题. 在1983年, Freedman^[8]利用Donaldson^[9]的毕业论文发现四维欧氏空间 R^4 上存在怪异微分结构(Donaldson因此获1986年Fields奖). Donaldson的方法基于物理规范场中Yang-Mills方程瞬子解形成的模空间拓扑研究. 随后, Donaldson把这些方法延伸到四维闭流形上微分不变量的构造, 并用这些不变量证明某些四维闭流形具有无穷多个微分结构. 经历30多年来的研究现状是: 一方面存在某些四维闭流形具有无穷多个微分结构; 另一方面不知任何具有有限多个微分结构的四维闭流形的例子. 这促使部分数学家相信任何四维闭流形上都存在无穷多个微分结构.

在20世纪70年代, Cappell和Shaneson^[10]构造了一系列四维闭流形. 这些四维流形同胚于标准球面, 但不知它们是否微分同胚于标准球面. 考虑Cappell-Shaneson系列中最简单的一个, 记为 Σ . 在近期的一篇文章中, Freedman等人^[11]希望借助计算机证明 Σ 具有怪异微分结构. 然而, 令人意外的是: Akbulut^[12]证明 Σ 是微分同胚于标准四维球面. 最近, Gompf断言Cappell-Shaneson系列中的每个元素均微分同胚于标准四维球面.

这些失败的尝试是否提升了人们对四维光滑Poincaré猜测正确性的信心? 最后, 我们想提及Colding等人^[13]最近的一篇论文. 他们暗示地提出了用平均曲率流论证四维光滑Poincaré猜测的方法.

参考文献

- 1 Cao H D, Zhu X P. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian J Math*, 2006, 10: 165–492
- 2 Morgan J, Tian G. Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. *Clay Mathematics Monographs*, vol. 3 American Mathematical Society/Clay Mathematics Institute, Providence/Cambridge, 2007
- 3 Kleiner B, Lott J. Notes on Perelman's papers. *Geom Topol*, 2008, 12: 2587–2855
- 4 Freedman M H, Michael H. The topology of four-dimensional manifolds. *J Diff Geom*, 1982, 17: 357–453
- 5 Moise E E, Edwin E. Affine structures in 3-manifolds: V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann Math*, 1952, 56: 96–114
- 6 Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann Math*, 1956, 64: 399–405
- 7 Kervaire M A, Milnor J W. Groups of homotopy spheres I. *Ann Math*, 1963, 77: 504–537
- 8 Freedman M H, Michael H. There is no room to spare in four-dimensional space. *Notices Amer Math Soc*, 1984, 31: 3–6
- 9 Donaldson S K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J Differential Geom*, 1983, 18: 279–315
- 10 Cappell S E, Shaneson J L. Some new four-manifolds. *Ann Math(2)*, 1976, 104: 61–72
- 11 Freedman M, Gompf R, Morrison S, et al. Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture. *Quantum Topol*, 2010, 1: 171–208
- 12 Akbulut S. Cappell-Shaneson homotopy spheres are standard. *Ann Math(2)*, 2010, 171: 2171–2175
- 13 Colding T H, Minicozzi W P II, Pedersen E K. Mean curvature flow. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2015, 52: 297–333

朱熹平

中山大学副校长，教授、博士生导师。长期从事理论数学的研究，在流形的几何与拓扑方面作出了一系列重要贡献。1998年获国家杰出青年科学基金资助，1999年入选国家人事部“百千万人才工程”第一、二层次人才，2001年9月至2006年9月被聘为教育部长江学者奖励计划特聘教授，1991年获中国科学院自然科学奖二等奖，2004年12月获世界华裔数学家大会晨兴数学银奖，2013年获教育部自然科学奖一等奖，2016年获世界华裔数学家大会陈省身奖、国家自然科学基金二等奖。

Summary for “四维光滑 Poincaré 猜测”

The four-dimensional smooth Poincaré conjecture

DENG ShaoXiong & ZHU XiPing*

School of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China

* Corresponding author, E-mail: stszxp@mail.sysu.edu.cn

We start with a discussion of the more familiar 3-dimensional Poincaré conjecture whose solution constitutes a major achievement of modern geometric analysis. This motivates the precise formulation of the smooth 4 dimensional Poincaré conjecture given in this article. Then we explain the difference between the topological and smooth structures on a manifold as well as the groundbreaking work of Donaldson in defining differential invariant for 4-dimensional manifolds using Yang-Mills instanton. At the end, we give some recent approaches in the attack of the conjecture

2-connected, diffeomorphism, standard four sphere, Ricci flow, differential invariant

doi: 10.1360/N972017-00962