

指定零点和极点的半纯函数的存在性

陈怀惠

张顺燕

(南京师范学院数学系)

(北京大学数学系)

摘 要

经典的 Abel 定理是关于闭 Riemann 曲面的. Ahlfors 得到了开 Riemann 曲面上的一个 Abel 定理. 但是他的结果不十分令人满意, 因为 Ahlfors 定理中的“拟有理函数”除常数外是否确实存在值得怀疑; 当曲面是有型 Riemann 曲面, 即紧带边 Riemann 曲面时, 只有常数才是拟有理函数. 本文将 Abel 定理推广到了具有两组不同边条件的紧带边 Riemann 曲面上, 定理所描述的函数是大量存在的, 文中还给出了具体例子.

1. 定理的叙述 作者在文献[1]中证明了紧带边 Riemann 曲面上的一个 Abel 定理, 给出指定除子(指定零点和极点)的、在边界上绝对值为常数的半纯函数的存在性的充分必要条件. 作者在文献[2]中考虑了在部分边界围道上函数的绝对值是常数, 而在其它的边界围道上函数的幅角是常数的情况. 本文进一步考虑不同围道上的常数可以不一样的情形.

定理. 设 $\bar{F}$ 是一个紧的带边 Riemann 曲面, 它的边界围道 D_i 的方向都取定为相对于 F 是正的; δ 是 F 上的一个零维链. 把边界围道分为若干组: $C_1, \dots, C_l, B_1, \dots, B_m$, 其中每一个 C_i 或 B_i 都包含一个或几个围道, 那末, 存在以 δ 为除子的、在每一组 C_i 上的绝对值都是常数 ($i = 1, 2, \dots, l$, 不同的 C_i 上的常数可以不一样), 沿每一个 D_i 的幅角改变量为零, 沿每一组 B_i 上幅角都是常数 ($i = 1, 2, \dots, m$, 不同 B_i 上的常数可以不一样)的半纯函数的充分必要条件是: 存在一个以 δ 为边界的一维链 C , 使 $\int_C \omega = 0$ 对所有 $\bar{F}$ 上的、沿每一个 C_i 的围道为零、沿每一个 B_i 中的围道的法向为零、且满足

$$\begin{aligned} \int_{B_i} \omega &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \int_{C_i} \omega^* &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \end{aligned}$$

的调和微分 ω (无奇点) 成立 (其中 ω^* 表示 ω 的共轭微分).

以下, 我们设 $l, m \geq 1$, 特殊情形更为简单.

2. 基本调和微分 证明 Abel 定理的基本工具是调和微分 $\tau = \lambda + i\mu$. 设 W 是一个闭 Riemann 曲面, C 是 W 上的一个一维链, 那末存在唯一的调和微分 $\tau(C) = \lambda(C) + i\mu(C)$ (1

和 μ 是实的), 满足以下条件:

1) 若边界 ∂C (经化简) 中含 np_0 (n 是整数, $p_0 \in W$), 则 τ 在 p_0 的奇性是 $\frac{n}{z} dz$, 其中 z 是 p_0 附近的局部坐标, $z(p_0) = 0$; 并且 τ 不再有其它的 (除在 ∂C 中出现的点外) 奇点.

2) 对任一 W 上的调和微分 ω (没有奇点), 均有

$$\int_W \lambda(C) \omega = 0, \quad \int_W \mu(C) \omega = 2\pi \int_C \omega.$$

3) 对任一不经过 ∂C 中出现的点的一维循环 γ , 均有

$$\int_\gamma \mu(C) = 2\pi \gamma \times C,$$

其中 $\gamma \times C$ 表示 γ 对于 C 的相交数.

作为这些条件的推论, λ 是全微分, 当 C 是循环时, $\lambda(C) = 0$.

τ 的存在性和构造法以及关于闭 Riemann 曲面的经典的 Abel 定理均见文献 [3, V, §3].

3. 二重倍 关于带边 Riemann 曲面的倍的概念见文献 [3, II, §1]. 我们在这里对定理中的曲面 $\bar{F}$ 重复作两次倍.

记 $\bar{F}$ 的镜象为 $\bar{F}'$, 并把 $\bar{F}'$ 和 $\bar{F}$ 中属于 C_i 和 C'_i (C'_i 表示 C_i 的镜象) 中的互为镜象的点等同起来, 得到 $\bar{F}$ 的一个倍 $\hat{F} = \bar{F} + \bar{F}'$. 记 $\hat{F}'$ 是 $\hat{F}$ 的镜象, 并把 $\hat{F}$ 中属于 B_i 和 B'_i 的点和它们在 $\hat{F}'$ 中的镜象等同起来, 得到 $\hat{F}$ 的倍 $\hat{\hat{F}} = \hat{F} + \hat{F}'$. 任一 $p \in \hat{F}$, 它的第一次镜象记为 p' , 任一 $p \in \hat{\hat{F}}$, 它的第二次镜象记为 p'' . 按 $p' = p''$ 把映照 “ $\cdot$ ” 开拓到整个 $\hat{\hat{F}}$ 上. 这样的表示法也应用到 $\hat{\hat{F}}$ 上的集合、弧和零维的以及一维的链上, 其意义是自明的. 设 ω 是 $\hat{\hat{F}}$ 上的一个微分, 它经 “变量” 替换 $p = q'$ (或 $p = q''$) 后得到的微分也记为 ω' (或 ω''). 显然有 $\int_C \omega = \int_{C'} \omega'$. 另外, “ $\cdot$ ” 可以换为 “ $\cdot'$ ”; “ $\cdot''$ ” 和 “ $\cdot'$ ” 都可消去; 而 $\omega'' = -\omega'$. 微分 ω 叫做对 “ $\cdot'$ ” 是奇的 (或偶的), 如果 $\omega = -\omega'$ (或 $\omega = \omega'$); 对 “ $\cdot$ ” 有同样的定义. 奇微分的共轭微分是偶微分, 反之亦然. 我们有

$$\lambda(C)' = \lambda(C'), \quad \mu(C)' = -\mu(C') = \mu(-C').$$

若 $C = C'$, 则 $\lambda(C)$ 对 “ $\cdot'$ ” 是偶的, $\mu(C)$ 对 “ $\cdot'$ ” 是奇的. 对于 “ $\cdot$ ” 有同样的结论.

证. 首先注意, $\lambda(C)'$ 和 $\lambda(C')$ 有同样的奇性, 而 $\mu(C)'$ 和 $-\mu(C')$ 也有同样的奇性. 所以 $\lambda(C)' - \lambda(C')$ 是一个没有奇点的调和全微分, 因而 $\lambda(C)' - \lambda(C') = 0$, $\lambda(C)' = \lambda(C')$. 设 γ 是 $\hat{\hat{F}}$ 上的一个循环,

$$\begin{aligned} \int_\gamma (\mu(C)' + \mu(C')) &= \int_\gamma \mu(C)' + \int_\gamma \mu(C') = \int_{\gamma'} \mu(C) + \int_{\gamma'} \mu(C') \\ &= 2\pi(\gamma' \times C + \gamma \times C'), \end{aligned}$$

容易看到 $\gamma' \times C = -\gamma \times C'$, 所以 $\mu(C)' + \mu(C')$ 也是一个没有奇点的调和全微分. 因而 $\mu(C)' = -\mu(C') = \mu(-C')$. 引理的后一部分是前一部分的推论.

设包含在 C_i ($i = 1, 2, \dots, l$) 中的围道共有 k 个, 记为 $D_1, D_2, \dots, D_k$. 若 $i_1 < i_2$, 则 C_{i_1} 中的围道被排列在 C_{i_2} 中的围道的前面. 又把包含在 B_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 中的围道依次记为 $A_1, \dots, A_j$. 在 $\bar{F}$ 中作弧 e , 它的起点和终点分别在 D_1 和 D_2 上, 令 $E_1 = e - e'$. 同样地作出 $E_2, \dots, E_{k-1}$ 以及穿过 A_i ($i = 1, 2, \dots, j$) 的 $F_1, \dots, F_{j-1}$. 再在 $\bar{F}$ 中

作弧 e , 起点和终点分别在 D_i 和 A_i 上, 令 $F_i = e - e' + e'' - e'$. 设 $\bar{F}$ 的格为 p , $G_i, H_i, \dots, G_r, H_r$ 是 $\bar{F}$ 的模边界的典型同调基, 它们不与 D_i, A_i, E_i, F_i 相交. 那末, $G_i, H_i, G'_i, H'_i, G_i, H_i, G'_i, H'_i$ ($i = 1, \dots, p$); $D_1, \dots, D_{k-1}, D_i, \dots, D_{k-1}; E_1, \dots, E_{k-1}, E_i, \dots, E_{k-1}; A_1, \dots, A_{l-1}, A_i, \dots, A_{l-1}; F_1, \dots, F_{j-1}, F_i, \dots, F_{j-1}$ 组成 $\hat{F}$ 的一组同调基.

4. 必要性的证明 设 f 为 $\bar{F}$ 上满足定理中的条件的半纯函数, 则 $d \log f = d \log |f| + i \arg f$ 的实部沿围道 D_i 为零, 而它的虚部沿围道 A_i 为零. 所以可以把它开拓为 $\hat{F}$ 上的一个解析微分 $\hat{Q}$, 它的实部对 “,” 是奇的, 对 “ $\cdot$ ” 是偶的, 虚部的情形正好相反. 在 F 上作一维链 σ_i , 使得 $\partial \sigma_i = \delta$, 且使 σ_i 不与 E_i, F_i 相交. 令 $\hat{\sigma}_i = \sigma_i + \sigma_i - \sigma' - \sigma''$, $\tau(\hat{\sigma}_i) = \lambda(\hat{\sigma}_i) + i\mu(\hat{\sigma}_i)$. 由上段的引理, $\lambda(\hat{\sigma}_i)$ 和 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 以及 $\mu(\hat{\sigma}_i)$ 和 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 分别有相同的奇性. 但因 $\partial \sigma_i = \delta$ 是 f 的除子, 而在 $\bar{F}$ 上, $\hat{Q} = d \log f$, 所以, $\tau(\hat{\sigma}_i)$ 和 $\hat{Q}$ 在 $\bar{F}$ 上有相同的奇性. 接着, 由它们的相同的奇偶性, 就在 $\hat{F}$ 上有相同的奇性.

$\lambda(\hat{\sigma}_i)$ 是一个全微分, 而 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 虽在 $\bar{F}_1$ 上是全微分, 但在整个 $\hat{F}$ 上不一定是. 由 f 所满足的条件和 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 的奇偶性, 除 $E_1, \dots, E_{k-1}, E_i, \dots, E_{k-1}, F_1, \dots, F_{j-1}, F_i, F'_1, \dots, F'_{j-1}$ 外, $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 沿同调基中其它的循环的积分都是零. 对于 $F_i = e - e'$, 由于 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 对 “ $\cdot$ ” 是偶的, 所以

$$\begin{aligned} \int_{F_i} \operatorname{Re} \hat{Q} &= \int_e \operatorname{Re} \hat{Q} - \int_{e'} \operatorname{Re} \hat{Q} = \int_e \operatorname{Re} \hat{Q} - \int_{\dots} (\operatorname{Re} \hat{Q})' \\ &= \int_e \operatorname{Re} \hat{Q} - \int_{e'} \operatorname{Re} \hat{Q} = 0 \quad (i = 1, \dots, j-1). \end{aligned}$$

同样的理由, $\int_{F_i} \operatorname{Re} \hat{Q} = 0$. 接着, 因为它对 “ $\cdot$ ” 是奇的, 故有

$$\int_{F'_i} \operatorname{Re} \hat{Q} = 0 \quad (i = 1, \dots, j-1).$$

设 $|f|$ 在 $C_1, \dots, C_l$ 上的常数值分别是 $M_1, \dots, M_l$. 若 E_i 穿过属于同一组的两个围道, 则

$$\begin{aligned} \int_{E_i} \operatorname{Re} \hat{Q} &= \int_e d \log |f| - \int_{e'} \operatorname{Re} \hat{Q} = - \int_e (\operatorname{Re} \hat{Q})' \\ &= \int_e \operatorname{Re} \hat{Q} = \int_e d \log |f| = 0; \end{aligned}$$

若 E_i 穿过分别属于组 C_i 和 C_{i+1} 的两个围道, 则

$$\int_{E_i} \operatorname{Re} \hat{Q} = 2 \int_e d \log |f| = 2(\log M_{i+1} - \log M_i).$$

令

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\pi} (\log M_2 - \log M_1) \mu(C_2) + \frac{1}{\pi} (\log M_3 - \log M_1) \mu(C_3) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{\pi} (\log M_l - \log M_1) \mu(C_l), \end{aligned}$$

则 ω_1 和 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 沿每一个 E_i 有相同的周期, 而 ω_1 沿同调基中的其它循环的周期是零. 另有

$$\begin{aligned}\omega_i &= -\frac{1}{\pi} (\log M_i - \log M_i) \mu(C_i) \\ &= \cdots = -\frac{1}{\pi} (\log M_i - \log M_i) \mu(C_i).\end{aligned}$$

ω_i 沿 E_i 的周期就是 ω_i 沿 E_i 的周期, 就是 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 沿 E_i 的周期, 因而由 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 对“ $\cdot$ ”是偶的, 也就是 $\operatorname{Re} \hat{Q}$ 沿 E_i 的周期; 而它沿同调基的其它循环的周期都是零. 于是, $\operatorname{Re} \hat{Q} - \omega_i - \omega_i$ 就是一个全微分; 但它和 $\lambda(\hat{Q})$ 有相同的奇性, 所以

$$\operatorname{Re} \hat{Q} = \omega_i + \omega_i + \lambda(\hat{Q}_i).$$

现在, 我们来考察 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 和 $\mu(\hat{Q}_i)$ 的关系. 它们沿 $G_i, H_i (i = 1, \cdots, p)$ 的周期可能不同, 但都是 2π 的整数倍, 因而有整数 $z_i, w_i (i = 1, \cdots, p)$, 使

$$\begin{aligned}\omega_2 &= z_1 \mu(H_1) + w_1 \mu(G_1) + \cdots + z_p \mu(H_p) + w_p \mu(G_p) \\ &= \mu(z_1 H_1 + w_1 G_1 + \cdots + z_p H_p + w_p G_p) = \mu(\sigma_2),\end{aligned}$$

沿每一个 G_i 和 $H_i (i = 1, \cdots, p)$ 有和 $\operatorname{Im} \hat{Q} - \mu(\hat{Q}_i)$ 相同的周期, 而它沿同调基中的其它循环的积分是零. 由 $\operatorname{Im} \hat{Q} - \mu(\hat{Q}_i)$ 的奇偶性, $\omega'_2 = -\mu(\sigma'_2)$, $-\omega'_2 = +\mu(\sigma'_2)$, $-\omega'_2 = -\mu(\sigma'_2)$ 具有对应的性质. $\operatorname{Im} \hat{Q} - \mu(\hat{Q}_i)$ 沿每一 $D_i (i = 1, \cdots, k)$ 和 $A_i (i = 1, \cdots, j)$ 的周期为零, 这是因为 $\hat{Q}_i$ 不和这些围道相交, 而 $\operatorname{Im} \hat{Q} = \operatorname{darg} f$, f 按假定在 A_i 上为常数, 而沿 D_i 的幅角改变量是零; 由于 $\operatorname{Im} \hat{Q} - \mu(\hat{Q}_i)$ 对于“ $\cdot$ ”是偶的, 所以它沿每一个 $E_i (i = 1, \cdots, k-1)$ 以及 F_j 的周期为零; 由它的奇偶性, 它沿所有这些循环的两种镜象的周期都是零. 剩下需要考虑的是 $F_1, \cdots, F_{j-1}$ 以及它们的镜象. $\mu(\hat{Q}_i)$ 沿它们的周期总是零. 当 F_i 穿过属于同一组的两个围道时, 因 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 关于“ $\cdot$ ”是奇的, 故

$$\int_{F_i} \operatorname{Im} \hat{Q} = 2 \int_c \operatorname{Im} \hat{Q} = 2 \int_c \operatorname{darg} f$$

是 4π 的整数倍; 否则, 这个积分就是一个一般的实数. 和前面一样, 有实数 $x_2, \cdots, x_m$, 使

$$\omega_4 = x_2 \mu(B_2) + \cdots + x_m \mu(B_m)$$

沿穿过不同组的两个围道的 F_i 有和 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 相同的周期, 而它沿同调基中的其它的循环的周期都是零; 又有整数 $y_2, \cdots, y_j$, 使

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 2y_2 \mu(A_2) + \cdots + 2y_j \mu(A_j) \\ &= \mu(2y_2 A_2 + \cdots + 2y_j A_j) = \mu(2\sigma_3) = \mu(\sigma_3 + \sigma'_3).\end{aligned}$$

沿每一个穿过同一组的两个围道的 F_i 有和 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 相同的周期, 而它沿同调基中的其它循环的周期也都是零. 因为 $\operatorname{Im} \hat{Q}$ 对“ $\cdot$ ”是偶的, 所以, ω'_3 和 ω'_4 具有对应的性质. 最后, 我们得到

$$\begin{aligned}\omega_2 + \omega'_2 - \omega'_2 - \omega'_2 + \omega_3 + \omega'_3 + \omega_4 + \omega'_4 \\ = \mu(\sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma'_2 - \sigma'_2) + \mu(\sigma_3 + \sigma'_3 - \sigma'_3 - \sigma'_3) + \omega_4 + \omega'_4 \\ = \mu(\hat{Q}_2) + \mu(\hat{Q}_3) + \omega_4 + \omega'_4.\end{aligned}$$

它沿同调基中的每一个循环都有和 $\operatorname{Im} \hat{Q} - \mu(\hat{Q}_i)$ 相同的周期; 所以, 这两个微分的差是没有奇点的全微分, 因而它们是相等的. 于是

$$\operatorname{Im} \hat{Q} = \mu(\hat{Q}_1) + \mu(\hat{Q}_2) + \mu(\hat{Q}_3) + \omega_4 + \omega'_4.$$

令 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = C$, 则 $\partial C = \partial \sigma_1 = \delta$,

$$\operatorname{Im} \hat{Q} = \mu(\hat{C}) + \omega_4 + \omega'_4.$$

现在, 设 ω 是满足定理中的条件的一个调和微分. 把它开拓为 $\hat{F}$ 上的微分 $\hat{\omega}$, 它对“ $\cdot$ ”

是奇的, 对“·”是偶的. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\hat{F}} (\operatorname{Im} \hat{Q}) \hat{\omega} &= \int_{\hat{F}} \mu(\hat{C}) \hat{\omega} + \int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1) \hat{\omega} \\ &= \left\{ \int_{\hat{C}} \hat{\omega} + x_2 \int_{B_2-B'_2} \hat{\omega} + \cdots + x_m \int_{B_m-B'_m} \hat{\omega} \right\} \cdot 2\pi \\ &= 2\pi \left\{ \int_C \omega + \int_{-C'} \hat{\omega} + \int_{C'} \hat{\omega} + \int_{-C'} \hat{\omega} + x_2 \int_{B_2-B'_2} \hat{\omega} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + x_m \int_{B_m-B'_m} \hat{\omega} \right\};\end{aligned}$$

但是

$$\int_{-C'} \hat{\omega} = \int_{-C} \hat{\omega}' = - \int_{-C} \hat{\omega} = \int_C \omega,$$

同样

$$\int_{C'} \hat{\omega} = \int_{-C'} \hat{\omega} = \int_C \omega;$$

而

$$\int_{B_i-B'_i} \hat{\omega} = \int_{B_i} \omega - \int_{B_i} \hat{\omega}' = 2 \int_{B_i} \omega,$$

按假定, $\int_{B_i} \omega = 0$ ($i = 1, \cdots, m$), 从而 $\int_{B_i-B'_i} \hat{\omega} = 0$ ($i = 1, \cdots, m$); 所以

$$\int_{\hat{F}} (\operatorname{Im} \hat{Q}) \hat{\omega} = 8\pi \int_C \omega.$$

另一方面, 因为

$$(\operatorname{Re} \hat{Q})^* = \operatorname{Im} \hat{Q},$$

故

$$\int_{\hat{F}} (\operatorname{Im} \hat{Q}) \hat{\omega} = \int_{\hat{F}} (\operatorname{Re} \hat{Q})^* \hat{\omega} = \int_{\hat{F}} \lambda(\hat{\sigma}_1)^* \hat{\omega} + \int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1)^* \hat{\omega},$$

由 $\lambda(\hat{\sigma}_1)$ 所满足的条件 2),

$$\int_{\hat{F}} \lambda(\hat{\sigma}_1)^* \hat{\omega} = 0;$$

同时,

$$\begin{aligned}\int_{\hat{F}} \omega_1^* \hat{\omega} &= - \int_{\hat{F}} \omega_1 \hat{\omega}^* \\ &= -2(\log M_2 - \log M_1) \int_{C_2} \omega^* - \cdots - 2(\log M_l - \log M_1) \int_{C_l} \omega^*,\end{aligned}$$

按假定, $\int_{C_i} \omega^* = 0$ ($i = 1, \cdots, l$), 故 $\int_{\hat{F}} \omega_1^* \hat{\omega} = 0$; 同样地

$$\begin{aligned}\int_{\hat{F}} \omega_l^* \hat{\omega} &= 2(\log M_2 - \log M_1) \int_{C_2} \omega^* + \cdots + 2(\log M_l - \log M_1) \int_{C_l} \omega^* \\ &= 2(\log M_2 - \log M_1) \int_{C_1} \omega^* + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(\log M_l - \log M_1) \int_{C_l} \omega^{**} \\
& = -2(\log M_2 - \log M_1) \int_{C_2} \omega^* - \cdots \\
& \quad - 2(\log M_l - \log M_1) \int_{C_l} \omega^* = 0.
\end{aligned}$$

所以, $8\pi \int_C \omega = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \hat{Q} = 0$. 必要性证完.

5. 充分性的证明 设 C 是 F 上的满足定理中的条件的一维链. 令 $\hat{C} = C - C' + C' - C''$. 令 $\omega_1 = u_2 \mu(C_2) + \cdots + u_l \mu(C_l)$, $u_2, \cdots, u_l$ 都是实的; 我们要寻求适当的 $u_2, \cdots, u_l$, 使

$$\int_{C_i} (\lambda(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1^*)^* = 0 \quad (i = 2, \cdots, l),$$

即

$$\begin{aligned}
u_2 \int_{C_2} \mu(C_2 - C_i)^* + \cdots + u_l \int_{C_l} \mu(C_l - C_i)^* &= - \int_{C_i} \lambda(\hat{C})^* \\
& \quad (i = 2, \cdots, l).
\end{aligned}$$

这是关于 $u_2, \cdots, u_l$ 的实线性代数方程组, 我们来证明它的系数行列式不为零. 否则, 就有

$$\omega_0 = v_2 \mu(C_2 - C_i)^* + \cdots + v_l \mu(C_l - C_i)^*,$$

其中 $v_i (i = 2, \cdots, l)$ 是不全为零的实数, ω_0 满足

$$\int_{C_i} \omega_0 = 0, \quad i = 2, \cdots, l.$$

但

$$\begin{aligned}
\int_{C_i} \omega_0 &= v_2 \int_{C_i} \mu(C_2 - C_i)^* + \cdots + v_l \int_{C_i} \mu(C_l - C_i)^* \\
&= v_2 \int_{C_i} \mu(C_2 - C_i)^* + \cdots + v_l \int_{C_l} \mu(C_l - C_i)^* \\
&= -v_2 \int_{C_i} \mu(C_2 - C_i)^* - \cdots - v_l \int_{C_l} \mu(C_l - C_i)^* \\
&= - \int_{C_i} \omega_0 = 0, \quad i = 2, \cdots, l,
\end{aligned}$$

所以,

$$\int_{C_i - C_i'} \omega_0 = 0, \quad i = 2, \cdots, l.$$

这就是

$$\int_{\mathbb{R}} \mu(C_i - C_i') \omega_0 = 0, \quad i = 2, \cdots, l;$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \omega_0^* \omega_0 &= - \int_{\mathbb{R}} [v_2 \mu(C_2 - C_i) + \cdots + v_l \mu(C_l - C_i)] \omega_0 = 0, \\
-\omega_0^* &= v_2 \mu(C_2 - C_i) + \cdots + v_l \mu(C_l - C_i) = 0.
\end{aligned}$$

设 E_i 是穿过分属 C_1 和 C_2 的两个围道, 则

$$\int_{E_i} (-\omega_0^*) = 2\pi\nu_2,$$

于是 $\nu_2 = 0$; 再考虑穿过分属 C_2 和 C_3 的两个围道的 E_i , 就可证明 $\nu_3 = 0$, 如此下去, 知道所有的 ν_i 都是零, 产生矛盾. 所以, 满足前面的要求的 ω_1 是存在的. 同样, 存在

$$\omega_4 = x_2\mu(B_2) + \cdots + x_m\mu(B_m),$$

使

$$\int_{B_i} (\mu(\hat{C}) + \omega_4 + \omega'_i)^* = 0, i = 2, \cdots, m.$$

令

$$\hat{\omega} = \lambda(\hat{C}) + \omega_1 + \omega'_1 + (\mu(\hat{C}) + \omega_4 + \omega'_i)^*,$$

$\hat{\omega}$ 限制在 $\bar{F}$ 上就满足定理中的条件. 事实上, 由前面的保证及明显的理由, $\int_{B_i} \hat{\omega} = 0 (i=2, \cdots, m)$. 因 $\hat{\omega}$ 对 “ $\cdot$ ” 是奇的, 对 “ $\cdot$ ” 是偶的, 故 $\hat{\omega}$ 沿 C_i 中的围道为零, 当然就有 $\int_{C_i} \hat{\omega} = 0 (i=1, \cdots, l)$. 于是

$$\int_{B_1} \hat{\omega} = -\int_{B_2} \hat{\omega} - \cdots - \int_{B_m} \hat{\omega} - \int_{C_1} \hat{\omega} - \cdots - \int_{C_l} \hat{\omega} = 0.$$

同样可验证 $\hat{\omega}$ 满足其它的条件. 考虑积分

$$\begin{aligned} \int_{\hat{F}} \hat{\omega}^* \hat{\omega} &= \int_{\hat{F}} \{ \lambda(\hat{C})^* + (\omega_1 + \omega'_1)^* - \mu(\hat{C}) - (\omega_4 + \omega'_i) \} \{ \hat{\omega} \} \\ &= \int_{\hat{F}} \lambda(\hat{C}) \hat{\omega} + \int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1)^* \hat{\omega} - \int_{\hat{F}} \mu(\hat{C}) \hat{\omega} - \int_{\hat{F}} (\omega_4 + \omega'_i) \hat{\omega}. \end{aligned}$$

我们有

$$\int_{\hat{F}} \lambda(\hat{C})^* \hat{\omega} = 0;$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1)^* \hat{\omega} &= -\int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1) \hat{\omega}^* \\ &= -\int_{\hat{F}} (u_2\mu(C_2 - C'_2) + \cdots + u_l\mu(C_l - C'_l)) \hat{\omega}^* \\ &= -u_2 \int_{C_2 - C'_2} \hat{\omega}^* - \cdots - u_l \int_{C_l - C'_l} \hat{\omega}^*, \end{aligned}$$

因为 $\hat{\omega}^*$ 对 “ $\cdot$ ” 是奇的, 故 $\int_{C_i - C'_i} \hat{\omega}^* = 2 \int_{C_i} \hat{\omega}^*$,

$$\int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1)^* \hat{\omega} = -2u_2 \int_{C_2} \hat{\omega}^* - \cdots - 2u_l \int_{C_l} \hat{\omega}^*.$$

上面已指出 $\int_{C_i} \hat{\omega}^* = 0 (i=1, \cdots, l)$, 所以

$$\int_{\hat{F}} (\omega_1 + \omega'_1)^* \hat{\omega} = 0.$$

同样地,

$$\int_{\hat{F}} (\omega_4 + \omega'_i) \hat{\omega} = 0;$$

最后,

$$\int_{\hat{F}} \mu(\hat{C}) \hat{\omega} = 2\pi \int_{\hat{F}} \hat{\omega} = 2\pi \left(\int_C \hat{\omega} - \int_{C'} \hat{\omega} + \int_{C''} \hat{\omega} - \int_{C'''} \hat{\omega} \right),$$

由 $\hat{\omega}$ 的奇偶性和关于 C 的假定,

$$\int_{\bar{F}} \mu(\hat{C}) \hat{\omega} = 8\pi \int_C \hat{\omega} = 0.$$

所以

$$\int_{\bar{F}} \hat{\omega}^* \hat{\omega} = 0,$$

$$\hat{\omega} = 0,$$

$$(\lambda(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1^*)^* = \mu(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1';$$

就是说

$$\hat{Q} = (\lambda(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1') + i(\mu(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1')$$

是一个解析微分.

令

$$f = \exp \left\{ \int \hat{Q} \right\},$$

f 是 $\bar{F}$ 上的一个单值函数. 事实上, 任给 $\bar{F}$ 上的循环 γ ,

$$\int_{\gamma} \hat{Q} = \int_{\gamma} \lambda(\hat{C}) + \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_1' + \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_1' + i \int_{\gamma} \mu(\hat{C}),$$

其中前面几项都是零, 就是最后一项是 $2\pi i$ 的整数倍. 由 $d \log f = \hat{Q}$ 和 $\hat{Q}$ 所具有的奇性, 知道 δ 是 f 的除子. 设 E_i 是同调基中穿过同一组中的两个围道的循环, 有 $E_{i_0} = e - e'$, e 在 $\bar{F}$ 中联结这两个围道. 考虑

$$\int_e d \log |f| = \int_e \operatorname{Re} \hat{Q} = \int_e (\lambda(\hat{C}) + \omega_1 + \omega_1').$$

由 λ 的奇偶性, 我们有

$$2 \int_e \lambda(\hat{C}) = \int_e \lambda(\hat{C}) - \int_{e'} \lambda(\hat{C}) = \int_{E_{i_0}} \lambda(\hat{C}) = 0,$$

故 $\int_e \lambda(\hat{C}) = 0$; 另外,

$$\begin{aligned} 2 \int_e \omega_1 &= \int_{E_{i_0}} \omega_1 = \int_{E_{i_0}} [u_2 \mu(C_2) + \cdots + u_l \mu(C_l)] \\ &= 2\pi(u_2 E_{i_0} \times C_2 + \cdots + u_l E_{i_0} \times C_l). \end{aligned}$$

容易看到, E_{i_0} 和某 C_{i_1} 以相反的方向相交两次, 而和其它的 C_i 不相交, 所以 $\int_e \omega_1 = 0$; 而

$\int_e \omega_1' = 0$ 是更明显的. 总之, 我们证明了 $\int_e d \log |f| = 0$, $|f|$ 在同一组的所有围道上是一个常数. 再设 $F_{i_0} = e - e'$ 是穿过同一组 B_i 的两个同调基中的循环, 考虑

$$\int_e d \arg f = \int_e \operatorname{Im} \hat{Q} = \int_e \mu(\hat{C}) + \int_e \omega_1 + \int_e \omega_1'.$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_e \mu(\hat{C}) &= \int_e \mu(C - C') + \int_e \mu(C' - C'') \\ &= \int_e \mu(C - C') - \int_{e'} \mu(C - C') = \int_{F_{i_0}} \mu(C - C'), \end{aligned}$$

故 $\int_C \mu(\hat{C})$ 是 2π 的整数倍; 和前面的理由一样, $\int_C \omega_1 = \int_C \omega'_1 = 0$. 所以, f 在同一组 B_i 的所有围道上取公共的常数. 最后考虑 $\int_{C_i} \text{darg} f = \int_{C_i} \mu(\hat{C}) + \int_{C_i} \omega_1 + \int_{C_i} \omega'_1$. C_i 和 $\hat{C}$ 不相交, 故 $\int_{C_i} \mu(\hat{C}) = 0$; 同样的理由指出 $\int_{C_i} \omega_1 = \int_{C_i} \omega'_1 = 0$. 于是, f 为满足定理中的条件的半纯函数; 充分性证完.

6. 例子和评注 本文定理中所描述的函数确实是存在的, 现在我们来构造这样的例子. 在 ξ 平面上任意取定位于以原点为中心的一些圆周上的弧, 又任意取定位于从原点出发的一些半直线上的线段(不过原点); 它们(圆弧和线段)互不相交. 可把 Riemann 球面上除去这些圆弧和线段后的区域共形映照到 z 球面上的圆界区域 G , 它的余集记以 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. 逆映照是 G 连同它的边界上的半纯函数 f , 在 G 的边界围道上, f 或有不变的模, 同时幅角改变量为零, 或有不变的幅角. 所以 f 就是定理中所描述的函数. 这里 G 的格是 0. 为了得到任意格的紧带边曲面上的函数, 我们先令

$$w = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{2g+2})}, \quad g \geq 1.$$

它的 Riemann 曲面 W 的格是 g , 并成为以 $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ 为枝点的 Riemann 球面的一个二叶覆盖 π . $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 被提升为 W 上的 $2n$ 块(为简单计, 可令 $z_1, \dots, z_{2g+2}$ 均在 $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ 之外). 从 W 中除去这 $2n$ 块后得到的紧带边曲面记为 $\bar{F}$; $f \circ \pi$ 就是 $\bar{F}$ 上的满足定理中的要求的函数. $\bar{F}$ 和 W 有相同的格 g .

经典的 Abel 定理和 Riemann-Roch 定理都是关于闭曲面的; 以后人们把它们推广到所谓零边界(例如抛物型曲面)的曲面上. Ahlfors 提出, 应去掉对曲面的限制, 而代之以对定理中的函数和微分加上相应的条件; 并且, 他自己做了一个这样的结果^[4,5]. 人们在评论 Ahlfors 的结果时指出: Ahlfors 的定理中的所谓“拟有理函数”除常数外是否确实存在值得怀疑; 当曲面为有限曲面(即紧带边曲面)时, 只有常数才是“拟有理函数”; 因此, 他的定理就有点乏味了. 本文中的定理以及文献[1]中所证明的定理(容许零点和极点有不同的个数)中所描述的函数则是大量存在的, 前面已经给出了例子. 本文中的定理在 l 和 m 中有一个为零时的情况可推广到一般的开曲面. 定理的一般情况也应有到开曲面的相应推广.

参 考 文 献

- [1] 陈怀惠, 数学学报, **25**(1982), 5: 603.
- [2] 张顺燕, 陈怀惠, 北京大学学报(自然科学版), 1982, 6: 46.
- [3] Ahlfors & Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton, 1960.
- [4] Royden, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 37—51.
- [5] Ahlfors, *Abel's Theorem for Open Riemann Surfaces*, Seminars on Analytic Functions, II. Institute for Advanced Study, Princeton, 1958, 1—19.
- [6] Accola, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 13—26.
- [7] 陈怀惠, 数学进展, 1982, 4: 315.